Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 38-46
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.41007 Published Online January 2014 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Boundedness of Solutions for a Class of Second-Order Isochronous Periodic Systems

Chenchen Chu[1], Zhesheng Li[1], Quan Sun[1], Shunjun Jiang[2]

[1]Overseas Education College, Nanjing University of Technology, Nanjing
[2]College of Sciences, Nanjing University of Technology, Nanjing
Email: 2274241450@qq.com, jiangshunjun@njut.edu.cn

Received: Dec. 12th, 2013; revised: Dec. 28th, 2013; accepted: Jan. 3rd, 2014

Abstract: In this paper, we will study the following second-order periodic system: $x''+V'(x)+p(t)|x|^{\alpha}=F_x(x,t)$. Under some assumptions on the $V'(x)$, $p(x,t),F_x(x,t)$ by Ortega's small twist theorem, we obtain the existence of quasi-periodic solutions and boundedness of all the solutions.

Keywords: Boundedness of Solutions; Singularity; Small Twist Theorem

一类等时二阶系统解的有界性

储晨晨[1]，李哲晟[1]，孙　泉[1]，江舜君[2]

[1]南京工业大学海外教育学院，南京
[2]南京工业大学理学院，南京
Email: 2274241450@qq.com, jiangshunjun@njut.edu.cn

收稿日期：2013 年 12 月 12 日；修回日期：2013 年 12 月 28 日；录用日期：2014 年 1 月 3 日

摘　要：在本文中，我们将研究下面的二阶周期性系统：$x''+V'(x)+p(t)|x|^{\alpha}=F_x(x,t)$，通过 Ortega 的小扭转定理，对$V'(x)$，$p(x,t),F_x(x,t)$做适当假设，我们得到拟周期解的存在性，从而得出所有解的有界性。

关键词：解的有界性；奇点；小扭转定理。

1. 引言和主要成果

柳[1]研究了下面等时二阶方程的拟周期解的存在性和所有解的有界性：

$$x''+V'(x)+g(x)-p(t)=0 \tag{1.1}$$

其中$V(x)$具有奇点，非线性项$g(x)$是一个有界扰动，$p(t)$以 2π 为周期。文[1]中，以下假设成立：

(1) $x\neq 0$时，$V(0)=V'(0)=0$，$V''(X)>0$；$\lim_{x\to a_+}V(x)=+\infty, a\in(-\infty,0)$，且 $V(x)$定义域为$(a,+\infty)$。

(2) 方程

$$W(x):=\frac{V(x)}{V'(x)}$$

在区间 $(-1,\infty)$ 是光滑的且极限 $\lim_{x\to-1} W(x)$ 存在。此外，对任意 $1\le K\le 6$ 有一个恒定的 c_0 有：

$$\left|W(x)\right|\le c_0(1+x),\left|W^K(x)\right|\le c_0, x\in[-1,\infty]$$

(3) 函数 V 是光滑，有 $0\le k\le 6$

$$\left|(1+x)^k V^k(x)\right|\le c_0' V(x)$$

此时 c_0' 是一个正常数。

(4) 当 $x>0$，使得 $\Phi(x)=V(x)-\frac{1}{8}x^2$，函数 Φ 满足

$$\lim_{x\to+\infty} x^k\Phi^k(x)=0$$

对任意正整数 k 都满足。由[2]的结论，辅助方程 $x''+V_x(x)=0$

解的周期 $T=2\pi$，这意味着辅助方程是等时的。

(5) 函数 g 定义域为 $[-1,+\infty)$，$x>0$ 时 $g(x)>0$。此外，下列不等式成立：

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}g(x)=0$$

(6) 如果极限 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=g^+$ 存在，$p^*(\theta)=\int_0^{2\pi} p(t+\theta)\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\mathrm{d}t$，Lazer-Landesman 条件成立：

$$4g^+>\max_\theta p^*(\theta)$$

柳[1]先将原系统化为规范型，然后应用扭转定理证明的拟周期解的存在性和所有解的有界性。

我们观察到，在[1,2]，扰动 $g(x)-p(t)$是光滑的和有界的，我们考虑当扰动无界时，(1.1)所有的解是否都是界？这也是本文的目的。

由[1-6]的启发，我们讨论如下方程：

$$x''+V'(x)+p(t)|x|^\alpha=F_x(x,t) \tag{1.2}$$

其中 $0<\alpha<1$，我们假设(1)~(4)成立，此外有

(5′) $F(x,t)$关于 t 是光滑的，$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x,t)}{|x|^\alpha x}=0$，$F(x,t+2\pi)=F(x,t)$，$p(t+2\pi)=p(t)$，$p(t)>0$。

(6′) 类似的 Lazer-Landesman 条件：$\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^\alpha p(t_0+\theta)\mathrm{d}\theta>0$

我们的主要结论是下面的定理。

定理 1：若假设(1)~(4)和(5′)(6′)成立，那么(1.2)有无限多的拟周期的解且(1.2)所有的解是有界的。

2. 定理的证明

2.1. 作用角变量

观察到(1.2)等价于下面的哈密顿系统

$$x'=\frac{\partial H}{\partial x},\ y'=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1.3}$$

其中哈密顿方程为

$$H(x,y,t)=\frac{1}{2}y^2+V(x)+\frac{p(t)}{(\alpha+1)}|x|^\alpha-F(x,t)$$

我们首先考虑辅助方程：

$$x' = y,\ \ y' = -V'(x) \tag{1.4}$$

这是一个可积哈密顿系统，哈密顿函数为

$$H_1(x,y,t) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

定义 $T(h)$为积分曲线Γ_h的周期，定义 I 为区域Γ_h所围成的面积令$-1<\alpha_h<\beta_h$，使得$V(-\alpha_h)=V(\beta_h)=h$。由假设(1)，我们有

$$\lim_{h\to+\infty}(\alpha_h)=1,\ \lim_{h\to+\infty}=+\infty$$

不难得出

$$I(h)=\int_{-a_h}^{\beta_h}\sqrt{2(h-V(s))}\mathrm{d}s,\ \forall h>0$$

定义

$$T_-(h)=\int_{-\alpha_h}^{0}\frac{1}{\sqrt{2(h-V(s))}}\mathrm{d}s,\ T_+(h)=\int_{0}^{\beta_h}\frac{1}{\sqrt{2(h-V(s))}}\mathrm{d}s$$

通过假设(4)，我们知道，辅助方程的是等时的，其周期为$T(h)=T_-(h)+T_+(h)=2\pi$，故有$I(h)=2\pi h$。类似的[4]估计，我们有

$$\left|h^k T_+^{(k)}(h)\right| \le C\cdot\frac{1}{\sqrt{h}},\ k>0 \tag{1.5}$$

并且

$$\left|h^k T_-^{(k)}(h)\right| \le C\cdot\frac{1}{\sqrt{h}},\ k\ge 0. \tag{1.6}$$

下面对作用角变量作标准的约化。我们定义一个生成函数，$S(x,I)=\int_C\sqrt{2(h-V(s))}\mathrm{d}s,\ C$ 是闭曲线Γ_h的一部分。

我们定义映射$(\theta,I)\to(x,y)$：

$$y=\frac{\partial S}{\partial x}(x,I),\ \theta=\frac{\partial S}{\partial x}(x,I),$$

这个映射是辛的，因为有下面条件满足：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\wedge(S_{xx}\mathrm{d}x+S_{xI}\mathrm{d}I)=S_{xI}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}I$$
$$\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}I=(S_{Ix}\mathrm{d}x+S_{II}\mathrm{d}I)\wedge\mathrm{d}I=S_{Ix}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}I$$

从上述讨论，我们可以发现

$$\theta=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\alpha h}^{x}\frac{1}{\sqrt{2(h(x,y)-V(S))}}\mathrm{d}s, & \text{if } y\ge 0\\[2ex] \displaystyle 2\pi-\int_{-\alpha h}^{x}\frac{1}{\sqrt{2(h(x,y)-V(S))}}\mathrm{d}s, & \text{if } y<0\end{cases}$$

$$I(x,y)=\int_{-\alpha h}^{\beta h}\sqrt{2(h(x,y)-V(s))}\mathrm{d}s$$

在新的变量(θ,I)下，系统(1.3)就可以写成

$$\theta'=\frac{\partial H}{\partial I},\quad I'=-\frac{\partial H}{\partial \theta} \tag{1.7}$$

其中，

$$H(\theta,I,t)=I+2\pi\frac{p(t)}{(\alpha+1)}|x(\theta,I)|^{\alpha}x(\theta,I)-2\pi F(x(\theta,I),t). \tag{1.8}$$

2.2. 新作用和角变量

现在，我们来讨论由(1.8)给出的哈密顿系统的。注意到

$$I\mathrm{d}\theta-H\mathrm{d}t=-(H\mathrm{d}t-I\mathrm{d}\theta)$$

这表示如果可以找出 I 关于 H 的函数关系(θ、t 都是参数)，那么

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\partial I}{\partial t}(t,H,\theta),\qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\partial I}{\partial H}(t,H,\theta) \tag{1.9}$$

也是一个由哈密顿函数所确定的哈密顿系统，并且现在作用量，角变量和时间分别是 H、θ 和 t。令

$$R(\theta,I,t)=2\pi\frac{p(t)}{(\alpha+1)}|x|^{\alpha}x-2\pi F(x(\theta,I),t) \tag{1.10}$$

为了估计 R，我们需要对函数 $x(I,\theta)$ 进行估计，因此，我们引入了下列的引理。

引理 1： 存在一个常数 C 满足

$$I^k\frac{\partial^k x}{\partial I^k}\le C(1+x)\le C\sqrt{I}\quad \text{for } 0\le k\le 6.$$

由(5)，(1.10)和引理 1，我们可以直接得到下面的引理。

引理 2： $\left|\dfrac{\partial^{k+l}R(\theta,I,t)}{\partial I^k\partial t^l}\right|<I^{\frac{\alpha+1}{2}}\quad \text{for } k+l\le 6.$

由(1.8)，我们得到

$$\frac{\partial H}{\partial I}=1+\frac{\partial R}{\partial I}\to 1,\ \text{as } I\to+\infty.$$

因此，由隐函数定理可得，存在一个函数 $R_1=R_1(t,H,\theta)$. 满足

$$I=H-R_1(t,H,\theta). \tag{1.11}$$

我们给出了 $R_1(t,H,\theta)$ 的估计，通过直接计算，我们得到

引理 3： $\left|H^k\dfrac{\partial^{k+l}R_1(t,H,\theta)}{\partial H^k\partial t^l}\right|<H^{\frac{\alpha+1}{2}}\quad \text{for } k+l\le 6.$

设

$$\begin{aligned}R_2(t,H,\theta)&=R(\theta,H,t)-R_1(t,H,\theta).\\&=-\int_0^1\frac{\partial R}{\partial I}(\theta,H-sR_1,t)R_1\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

我们有下面的估计

引理 4： $\left|\dfrac{\partial^{k+l} R_2(t,H,\theta)}{\partial H^k \partial t^l}\right| \le H^{\alpha}$ for $k+l \le 6$.

现在，哈密顿函数可以表示为下面的形式

$$\begin{aligned} I &= H - R_1(\theta,H,t) + R_2(t,H,\theta) \\ &= H - 2\pi \frac{p(t)}{(\alpha+1)} \left|x(\theta,H)\right|^{\alpha} x(\theta,H) \\ &\quad + 2\pi F\left(x(\theta,H),t\right) + R_2. \end{aligned}$$

系统变为下面形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\partial I}{\partial H} = 1 - 2\pi \dfrac{\partial x}{\partial H}(\theta,H)\Big(|x|^{\alpha}(\theta,H)\, p(t) \\ \qquad -F_x\left(x(\theta,H),t\right)\Big) + \dfrac{\partial R_2}{\partial H}(t,H,\theta), \\ \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{\partial I}{\partial t} = 2\pi \dfrac{p'(t)}{(\alpha+1)} \left|x(\theta,H)\right|^{\alpha} x(\theta,H) \\ \qquad - 2\pi F_t\left(x(\theta,I),t\right) - \dfrac{\partial R_2}{\partial t}(t,H,\theta). \end{cases} \tag{1.12}$$

在公式中引入了一个新的作用力变量 $\rho \in [1,2]$ 和一个参数 $\varepsilon > 0$，这样，当 $H \gg 1$ 时，$0 < \varepsilon \ll 1$，在这种转换下，系统(1.12)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = 1 - 2\pi \dfrac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\Big(|x|^{\alpha}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right) p(t) \\ \qquad -F_x\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right),t\right)\Big) + \dfrac{\partial R_2}{\partial H}\left(t,\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = 2\pi\varepsilon^{2} \dfrac{p'(t)}{(\alpha+1)} \left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha} x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right) \\ \qquad - 2\pi\varepsilon^{2} F_t\left(x(\theta,I),t\right) - \varepsilon^{2} \dfrac{\partial R_2}{\partial t}\left(t,\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right) \end{cases} \tag{1.13}$$

其函数为：

$$\begin{aligned} \Gamma(t,\rho,\theta;\varepsilon) &= \rho - 2\pi\varepsilon^{-2} \frac{p(t)}{\alpha+1} \left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha} x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right) \\ &\quad + 2\pi\varepsilon^{-2} F\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right),t\right) + \varepsilon^{-2} \frac{\partial R_2}{\partial t}\left(t,\varepsilon^{-2}\rho,\theta\right) \end{aligned}$$

显然，当 $\varepsilon \ll 1$ 时，在初始点为 $(t_0,\rho_0) \in R \times [1,2]$ 的情况下，(1.13)中的解 $\left(t(\theta,t_0,\rho_0)\right)$，$\left(\rho(\theta,t_0,\rho_0)\right)$ 就被定义在了区间 $\theta \in [0,2\pi]$ 和 $\rho(\theta,t_0,\rho_0) \in \left[\dfrac{1}{2},3\right]$ 中，这样(1.13)中的 Poincare 映射就被定义在了区域 $R \times [1,2]$ 中。

引理 5：([1]引理 5.1) (1.13)中的 Poincare 映射有自交性。

这个引理的证明和[4]中的相似，为了方便，我们引入符号 $O_k(1)$ 和 $o_k(1)$，我们说一个函数 $f(t,\rho,\theta,\varepsilon) \in O_k(1)$ 如果 $k_1 + k_2 \le k$ 并且函数在区间 (t,ρ) 光滑，有

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t^{k_1} \partial \rho^{k_2}} f(t,\rho,\theta,\varepsilon)\right| \le C,$$

在常数 $C>0$，且与 $t,\rho,\theta,\varepsilon$ 无关。

类似的， $f(t,\rho,\theta,\varepsilon)\in o_k(1)$，如果 $k_1+k_2\le k$ 时有下式满足 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t^{k_1}\partial\rho^{k_2}}f(t,\rho,\theta,\varepsilon)\right|=0$.

2.3. Poincare 映射和扭转定理

假设(1.13)中以 $(t(0),\rho(0))=(t_0,\rho_0)$ 为初始条件的解的形式如下：
$t=t_0+\theta+\varepsilon^{1-\alpha}\sum_1(t_0,\rho_0,\theta;\varepsilon)$, $\rho=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\sum_2(t_0,\rho_0,\theta;\varepsilon)$. 然后，(1.13)的 Poincare 映射就是：

$$P:t_1=t_0+2\pi+\varepsilon^{1-\alpha}\sum\nolimits_1(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon),\quad \rho_1=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\sum\nolimits_2(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon) \tag{1.14}$$

函数 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 满足

$$\begin{cases}\sum_1=2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^\theta\dfrac{\partial x}{\partial H}(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\left(|x|^\alpha p(t)-F_x\left(x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho),t\right)\right)\mathrm{d}\theta\\ \qquad+\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^\theta\dfrac{\partial R_2}{\partial H}(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\mathrm{d}\theta,\\ \sum_2=2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^\theta\left(\left|x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\right|^\alpha x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\dfrac{p'(t)}{\alpha+1}-F_t\left(x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho),t\right)\right)\mathrm{d}\theta\\ \qquad-\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^\theta\dfrac{\partial R_2}{\partial t}(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\mathrm{d}\theta,\end{cases} \tag{1.15}$$

$t=t_0+\theta+\varepsilon^{1-\alpha}\sum_1$， $\rho=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\sum_2$ 成立。由引理 1 和引理 3，我们有

$$\left|\sum\nolimits_1\right|+\left|\sum\nolimits_2\right|\le C\quad \text{for }\theta\in[0,2\pi]. \tag{1.16}$$

并且，我们可以证明

$$\sum\nolimits_1,\sum\nolimits_2\in O_6(1). \tag{1.17}$$

由直接计算，我们有

引理 7：

$$\left|x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\right|^\alpha x-\left|x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0)\right|^\alpha x\in\varepsilon^{-2\alpha}O_6(1),\ \left|x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho)\right|^\alpha\frac{\partial x}{\partial H}-\left|x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0)\right|^\alpha\frac{\partial x}{\partial H}\in\varepsilon^{2-2\alpha}O_6(1).$$

现在我们给出 Poincare 映射(1.15)的表达式，所以我们只需估计当 $\theta=2\pi$ 且 $\varepsilon\to 0$ 时 $\sum_1$ 和 $\sum_2$。

为了估算 $\sum_1$ 和 $\sum_2$，我们引入如下定义和引理。令 $\vartheta_+(I)$ 为 $[0,2\pi]$ 的子集，当 $\theta\in\vartheta_+(I)$，则 $x(\theta,I)>0$ 且 $\vartheta_-(I)$ 满足 $\theta\in\Theta(I)$， $x(\theta,I)<0$。由(1.5)和(1.6)，与[4]的计算相似，又因为当 $\eta\in\varepsilon O_6(1)$

即 $T_-(h)=T_-\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)=2\eta(t_0,\rho_0,\theta_0;\varepsilon)$。根据 ϑ_+ 和 ϑ_- 的定义定得

$$\text{measure}\,\vartheta_-=2\eta,\ \text{measure}\,\vartheta_+=2\pi-2\eta$$

接下来我们将用以下的引理：

引理 8：([1]引理 4.1)对 $\theta\in\vartheta_+(I)$， x 可表示成下列函数：

$$x(\theta,I)=2\sqrt{\frac{I}{\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{T_-(h)}{4}\right)+\sqrt{\frac{1}{\pi}}X\left(\theta-\frac{T_-(h)}{4},I\right)$$

$$\lim_{I\to+\infty}\sum_{k=1}^{6}\left|I^{k-\frac12}\left(\frac{\partial^k}{\partial I^k}\left(x(\theta,I)-2\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{T_-(h)}{4}\right)\right)\right)\right|=0$$

现在我们给出 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 的估计值

引理 9

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)\\&=-2^{\alpha+1}\pi^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_2\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)\\&=-2^{\alpha+2}\pi^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}\frac{p'\left(t_0+\theta\right)}{\alpha+1}\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\end{aligned}$$

证明。首先我们求 Σ_1。由引理 2 和 7，得

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)\\&=-2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\left(\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha}p\left(t\right)\right.\\&\quad\left.-F_x\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right),t\right)\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R_2}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\mathrm{d}\theta\\&=-2\pi\varepsilon^{\alpha-1}6\int_0^{2\pi}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\left(\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\right.\\&\quad\left.-F_x\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right),t\right)\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{1-\alpha}O_6\left(1\right)\\&=-2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\vartheta_+}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\left(\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\right.\\&\quad\left.-F_x\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right),t\right)\right)\mathrm{d}\theta\\&\quad-2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\vartheta_-}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\left(\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\right.\\&\quad\left.-F_x\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right),t\right)\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{1-\alpha}O_6\left(1\right)\end{aligned}$$

由引理 1，可知：当 $x\in\vartheta_-$

$$x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\in O_6\left(1\right),\ \frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\in\varepsilon^2O_6\left(1\right)\tag{1.18}$$

也就是说

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)\\&=-2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\vartheta_+}\frac{\partial x}{\partial H}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\left(\left|x\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\right.\\&\quad\left.-F_x\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right),t\right)\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{1-\alpha}O_6\left(1\right)\end{aligned}$$

由引理 8，有

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_1\left(t_0,\rho_0,2\pi;\varepsilon\right)\\&=-2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_{\vartheta_+}\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{\rho_0\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\eta}{4}\right)\right]\cdot\left[2\left(\varepsilon^{-1}\sqrt{\frac{\rho_0}{\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\eta}{4}\right)\right)\right]^{\alpha}\times p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+\varepsilon^{1-\alpha}O_6\left(1\right)\\&=-2^{\alpha+1}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_{\vartheta_+}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\\&=-2^{\alpha+1}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6\left(1\right)\end{aligned}$$

现在我们计算 Σ_2.

$$\sum\nolimits_2 = 2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\frac{p'(t)}{\alpha+1}\mathrm{d}\theta$$
$$-2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}F_t\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right),t\right)\mathrm{d}\theta-\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R_2}{\partial t}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\mathrm{d}\theta$$

由引理 4、7 和

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x,t)}{|x|^{\alpha+1}}=0$$

得

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &= 2\pi\varepsilon^{\alpha-1}\int_0^{2\pi}\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\right|^{\alpha}x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\frac{p'(t)}{\alpha+1}\mathrm{d}\theta\\
&\quad-2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}F_t\left(x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right),t\right)\mathrm{d}\theta-\varepsilon^{\alpha+1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R_2}{\partial t}\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\mathrm{d}\theta\\
&=2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_{\vartheta+}\left|x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0)\right|^{\alpha}x(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0)\frac{p'(t_0+\theta)}{\alpha+1}\\
&\quad+2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_{\vartheta_-}\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\right|^{\alpha}x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\frac{p'(t_0+\theta)}{\alpha+1}+o_6(1)\end{aligned}$$

由引理 1、8

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &= 2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_{\vartheta_+}\left|x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho_0\right)\right|^{\alpha}x\left(\theta,\varepsilon^{-2}\rho\right)\frac{p'(t_0+\theta)}{\alpha+1}+o_6(1)\\
&=2\pi\varepsilon^{\alpha+1}\int_{\vartheta_+}\left(2\varepsilon^{-1}\sqrt{\frac{\rho_0}{\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\eta}{4}\right)\right)\left|\cdot2\varepsilon^{-1}\sqrt{\frac{\rho_0}{\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\eta}{4}\right)\right|^{\alpha}\\
&\quad\cdot\frac{p'(t_0+\theta)}{\alpha+1}+o_6(1)\\
&=-2^{\alpha+1}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_{\vartheta_+}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6(1)\\
&=-2^{\alpha+1}\pi^{\frac{1-\alpha}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta+o_6(1)\end{aligned}$$

令

$$\psi_1\left(t_0,\rho_0\right)=-2^{\alpha+1}\pi^{\frac{1-\pi}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}p\left(t_0+\theta\right)\mathrm{d}\theta,$$

$$\psi_2\left(t_0,\rho_0\right)=-2^{\alpha+2}\pi^{\frac{1-\pi}{2}}\rho_0^{\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha}\frac{p'\left(t_0+\theta\right)}{\alpha+1}\mathrm{d}\theta$$

根据 Poincare 映射得函数(1.16) ϕ_1 和 ϕ_2，所以

$\mathrm{P}: t_1=t_0+2\pi+\varepsilon^{1-\alpha}\psi_1\left(t_0,\rho_0\right)+\varepsilon^{1-\alpha}\phi_1$， $\rho_1=\rho_0+\varepsilon^{1-\alpha}\psi_2\left(t_0,\rho_0\right)+\varepsilon^{1-\alpha}\phi_2$

其中 $\phi_1,\phi_2\in o_6(1)$。

注意到 $p(t)>0$，我们有

$$\psi_1<0,\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_0}>0$$

令

$$L = \frac{\rho_0^{-\frac{\alpha+1}{2}}}{\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{\alpha} p(t_0+\theta)\mathrm{d}\theta}$$

得

$$\frac{\partial L}{\partial t_0}\psi_1(t_0,\rho_0) + \frac{\partial L}{\partial \rho_0}\psi_2(t_0,\rho_0) = 0$$

[5]中的 Orgega 定理的另一假设很容易得到验证。所以，有不变曲线 P 在圆环域$(t_0, \rho_0) \in S_1 \times [1.2]$验证了原式(1.2)的有界性。因而定理 1 得证。

参考文献 (References)

[1] Liu, B. (2009) Quasi-periodic solutions of forced isochronous oscillators at resonance. *Journal of Differential Equations*, **246**, 3471-3495.

[2] Bonheure, D., Fabry, C. and Smets, D. (2002) Periodic solutions of forced isochronous oscillators at resonance. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **8**, 907-930.

[3] Morris, G.R. (1976) A case of boundedness of Littlewood’s problem on oscillatory differential equations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **14**, 71-93.

[4] Capietto, W.D. and Liu, B. (2009) On the boundedness of solutions to a nonlinear singularoscillator. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **60**, 1007-1034.

[5] Ortega, R. (1999) Boundedness in a piecewise linear oscillator and a variant of the small twist theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **79**, 381-413.

[6] Kunze, M., Kupper, T. and Liu, B. (2001) Boundedness and unboundedness of solutions for reversible oscillatorsat resonance. *Nonlinearity*, **14**, 1105-1122.