Pure Mathematics 理论数学, 2014, 4, 197-200
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2014.45028

Hans汉斯

The Centre of Quantum Weyl Algebras

Luning Liu, Yanhua Wang

School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai
Email: liuluningde@163.com, yhw@mail.shufe.edu.cn

Received: Jul. 16th, 2014; revised: Aug. 15th, 2014; accepted: Aug. 24th, 2014

Abstract

This paper shows that the centre of (−1)-quantum Weyl algebra $k\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle / x_i x_j + x_j x_i = a_{ij}$ **is generated by** $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$.

Keywords

Weyl Algebra, Quantum Weyl Algebra, Centre of an Algebra, Cohomology

量子Weyl代数的中心

柳鲁宁，王艳华

上海财经大学数学学院，上海
Email: liuluningde@163.com, yhw@mail.shufe.edu.cn

收稿日期：2014年7月16日；修回日期：2014年8月15日；录用日期：2014年8月24日

摘　要

本文给出了(−1)-量子Weyl代数 $k\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle / x_i x_j + x_j x_i = a_{ij}$ 的中心是由 $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$ 生成的。

关键词

Weyl代数，量子Weyl代数，代数的中心，上同调

1. 引言

设 A 是一个代数，A 的中心定义为代数中与所有元素可交换的元素集合，即 $Z(A)=\{z\in A \mid za=az,\forall a\in A\}$。代数的中心对刻画代数本身的性质具有重要作用，如一个代数的零次上同调群就是代数的中心，即 $HH^0(A)=Z(A)$。另外，在新近的研究中，我们发现代数的中心对于研究代数的自同构群也起着重要作用，见参考文献[1] [2]。以往的代数学者大多关注代数中心的性质，见参考文献[3]-[5]，所研究代数涉及群代数、Leavitt 路代数、Effect 代数、Kumjian-Pask 代数等众多代数，见参考文献[6]-[9]，但对于计算代数的中心鲜少研究。

量子Weyl代数诞生于上世纪30年代。该代数具有独特的物理背景，是一个典型的结构清晰的无限维非交换代数，其涉及领域之广、研究成果之丰富在非交换代数领域中可以说是独一无二的。研究表明，量子Weyl代数与Lie代数、微分算子代数、代数几何、D2模理论、Artin-Schelter正则代数以及非交换代数几何都有着深刻的联系，为非交换代数理论的发展提供了许多行之有效和值得借鉴的方法。一些代数学者把(量子)Weyl代数作为非交换代数研究的一个范例，例如Weyl代数 $k\langle x_1,x_2\rangle / x_2x_1-x_1x_2=1$ 作为一类具体的2维Artin-Schelter正则代数，其在非交换代数的研究中占据重要的地位，它的许多性质揭示了2维Artin-Schelter正则代数的性质。

实际上，求一个具体的代数的中心不是一件简单的事情，有些代数的中心即使借助计算机辅助计算也很难找到。目前，一些代数的中心我们还不是很清楚，这在一定程度上阻碍了这些代数的进一步发展。本文以(−1)-量子 Weyl 代数为例，从代数的生成元和生成关系出发，给出了(−1)-量子 Weyl 代数的中心。此结果对于进一步研究量子 Weyl 代数的性质，特别是自同构群的刻画起着重要作用。

2. (−1)-量子 Weyl 代数的中心

设 k 是特征为 0 的域。令 $\alpha\triangleq\{a_{ij} \mid 1\le i<j\le n\}$ 是 k 中的数集，(−1)-量子 Weyl 代数 $V_n(\alpha)$ 定义为由 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 生成且满足关系：$x_ix_j+x_jx_i=a_{ij}$，$\forall 1\le i<j\le n$ 的代数，一般地我们表示为 $V_n(\alpha)=k\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle / x_ix_j+x_jx_i=a_{ij}$。利用 diamond lemma，易知其基为 $kx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$，其中 $l_i\in\mathbb{N}^+, i=1,\cdots,n$。

本文主要讨论 $V_n(\alpha)$ 的中心。首先，我们观察到生成元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不可能是 $V_n(\alpha)$ 的中心元，否则，$V_n(\alpha)$ 就是一个交换代数。我们有下面的引理：

引理 2.1 设 l_i、l_j 是正整数。如果 l_i、l_j 中有一个为偶数，则我们有 $x_j^{l_j}x_i^{l_i}=x_i^{l_i}x_j^{l_j},\forall 1\le i<j\le n$。

证明： 由代数 $V_n(\alpha)$ 的生成关系 $x_ix_j+x_jx_i=a_{ij}$，我们有 $x_jx_i=a_{ij}-x_ix_j$，则有：

$$\begin{aligned} x_j^{l_j}x_i^{l_i} &= x_j^{l_j-1}\left(a_{ij}-x_ix_j\right)x_i^{l_i-1}=a_{ij}x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-1}-x_j^{l_j-1}x_ix_jx_i^{l_i-1}=a_{ij}x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-1}-x_j^{l_j-1}x_i\left(a_{ij}-x_ix_j\right)x_i^{l_i-2} \\ &= x_j^{l_j-1}x_i^2x_jx_i^{l_i-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

依次进行下去，(1)式等于

$$\begin{aligned} x_j^{l_j-2}\left(a_{ij}-x_ix_j\right)x_ix_jx_i^{l_i-2} &= a_{ij}x_j^{l_j-2}x_ix_jx_i^{l_i-2}-x_j^{l_j-2}x_ix_jx_ix_jx_i^{l_i-2}=a_{ij}x_j^{l_j-2}x_ix_jx_i^{l_i-2}-x_j^{l_j-2}x_i\left(a_{ij}-x_ix_j\right)x_jx_i^{l_i-2} \\ &= x_j^{l_j-2}x_i^2x_j^2x_i^{l_i-2}. \end{aligned} \tag{2}$$

每次当 x_i 与前面的 x_j 交换位置时用公式 $x_jx_i=a_{ij}-x_ix_j$。这样，由(1)、(2)两式我们有：

$$\begin{aligned} x_j^{l_j}x_i^{l_i} &= x_jx_i^2x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-2}=\left(a_{ij}-x_ix_j\right)x_ix_j^{l_j-1}x_i^{l_i-2}=a_{ij}x_ix_j^{l_j-1}x_i^{l_i-2}-x_ix_jx_ix_j^{l_j-1}x_i^{l_i-2} \\ &= a_{ij}x_ix_j^{l_j-1}x_i^{l_i-2}-x_i\left(a_{ij}-x_ix_j\right)x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-2}=x_i^2x_j^{l_j}x_i^{l_i-2}. \end{aligned} \tag{3}$$

对(3)式继续上述过程，我们有如下的方程：

$$x_i^2 x_j^{l_j-1}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i^{l_i-3}=a_{ij}x_i^2 x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-3}-x_i^2 x_j^{l_j-1}x_i x_j x_i^{l_i-3}=a_{ij}x_i^2 x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-3}-x_i^2 x_j^{l_j-1}x_i\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i^{l_i-4}$$
$$=x_i^2 x_j^{l_j-1}x_i^2 x_j x_i^{l_i-4}. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&=x_i^2 x_j^{l_j-2}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i x_j x_i^{l_i-4}\\&=a_{ij}x_i^2 x_j^{l_j-2}x_i x_j x_i^{l_i-4}-x_i^2 x_j^{l_j-2}x_i x_j x_i x_j x_i^{l_i-4}\\&=a_{ij}x_i^2 x_j^{l_j-2}x_i x_j x_i^{l_i-4}-x_i^2 x_j^{l_j-2}x_i\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j x_i^{l_i-4}\\&=x_i^2 x_j^{l_j-2}x_i^2 x_j^2 x_i^{l_i-4}.\end{aligned} \tag{5}$$

这样，重复上述过程，由(4)、(5)两式，我们可以得到：

$$x_j^{l_j}x_i^{l_i}=x_i^2 x_j x_i^2 x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-4}$$

对上式右端再重复以上的过程，我们可以得到：

$$x_j^{l_j}x_i^{l_i}=x_i^2\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-4}=a_{ij}x_i^3 x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-4}-x_i^3 x_j x_i x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-4}=a_{ij}x_i^3 x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-4}-x_i^3\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j^{l_j-1}x_i^{l_i-4}$$
$$=x_i^4 x_j^{l_j}x_i^{l_i-4}. \tag{6}$$

(3)、(6)两式意味着 x_i^2、x_i^4 与 x_j 可以交换。如果 l_i 是偶数，继续以上过程，则有：

$$\begin{aligned}x_j^{l_j}x_i^{l_i}&=x_i^{l_i-2}x_j^{l_j}x_i^2=x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-1}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i=a_{ij}x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-1}x_i-x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-1}x_i x_j x_i\\&=a_{ij}x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-1}x_i-x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-1}x_i\left(a_{ij}-x_i x_j\right)=x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-1}x_i^2 x_j.\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&=x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-2}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i x_j=a_{ij}x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-2}x_i x_j-x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-2}x_i x_j x_i x_j\\&=a_{ij}x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-2}x_i x_j-x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-2}x_i\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j=x_i^{l_i-2}x_j^{l_j-2}x_i^2 x_j^2.\end{aligned} \tag{8}$$

这样，由(7)、(8)两式，我们可以得到：

$$x_j^{l_j}x_i^{l_i}=x_i^{l_i-2}x_j x_i^2 x_j^{l_j-1}$$

对上式右端再重复以上的过程，我们可以得到：

$$x_j^{l_j}x_i^{l_i}=x_i^{l_i-2}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_i x_j^{l_j-1}=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i-1}x_j x_i x_j^{l_j-1}=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i-1}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j^{l_j-1}=x_i^{l_i}x_j^{l_j}.$$

即当 l_i 是偶数时，我们得到结论正确。类似地，当 l_j 是偶数时，我们也可以证明如上结论正确。

引理 2.2 设 l_i、l_j 是正整数。若 l_i、l_j 均为奇数，我们有 $x_j^{l_j}x_i^{l_i}=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i}x_j^{l_j}$，$\forall 1\le i<j\le n$。

证明： 如果 l_i 是奇数，则由(3)、(6)两式，我们有：

$$\begin{aligned}x_j^{l_j}x_i^{l_i}&=x_i^{l_i-1}x_j^{l_j}x_i=x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}x_i x_j\\&=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-2}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j=x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-2}x_i x_j^2.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&=x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-3}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j^2\\&=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-3}x_i x_j^3\\&=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-4}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j^3\\&=x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-4}x_i x_j^4.\end{aligned} \tag{10}$$

如果 l_j 是奇数，则由(9)、(10)两式，我们有：

$$x_j^{l_j}x_i^{l_i}=x_i^{l_i-1}x_j x_i x_j^{l_j-1}=x_i^{l_i-1}\left(a_{ij}-x_i x_j\right)x_j^{l_j-1}=a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}-x_i^{l_i}x_j^{l_j}.$$

引理2.1和引理2.2表明，当 l_i 和 l_j 都是奇数时，每次交换都会出现 $a_{ij}x_i^{l_i-1}x_j^{l_j-1}$ 这样的项，所以此时 $x_i^{l_i}$，$x_j^{l_j}$ 不能交换，这也就说明 l_i、l_j 的奇数次幂不会是中心元。

下面假设 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 是代数 $V_n(\alpha)$ 的中心元，鉴于以上两个引理，我们只需考虑 l_i 取 0 或 1 的情形，其中 $i=1,2,\cdots,n$。

引理 2.3 设 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 只能取 0 或 1，且 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 不全为 0，则 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 不是 $V_n(\alpha)$ 的中心元。

证明： 反证法，如果 $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\in Z(V(\alpha))$，则对任意的 $x_i\in V(\alpha)$，有：

$$\left(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\right)x_i=x_i\left(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\right)。$$

不妨设 $i=1$，$l_1=l_2=\cdots=l_n=1$，则有：

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2\cdots x_n)x_1\\
&=x_1x_2\cdots x_{n-1}(a_{1n}-x_1x_n)=a_{1n}x_1x_2\cdots x_{n-1}-x_1x_2\cdots x_{n-1}x_1x_n\\
&=a_{1n}x_1x_2\cdots x_{n-1}-x_1x_2\cdots x_{n-2}(a_{1,n-1}-x_1x_{n-1})x_n\\
&=a_{1n}x_1x_2\cdots x_{n-1}-a_{1,n-1}x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_1x_{n-1}x_n\\
&=\cdots\\
&=a_{1n}x_1x_2\cdots x_{n-1}-a_{1,n-1}x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+a_{1,n-2}x_1x_2\cdots x_{n-3}x_{n-1}x_n-\cdots+(-1)^n a_{12}x_1x_3\cdots x_n+(-1)^{n+1}x_1^2x_2\cdots x_n\\
&\neq x_1(x_1x_2\cdots x_n).
\end{aligned}$$

所以，

$$\left(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\right)x_i\neq x_i\left(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\right)$$

这样，$x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\notin Z(V(\alpha))$。

定理 2.4 我们有 $Z(V_n(\alpha))=k\left\langle x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2\right\rangle$。

证明： 由引理 2.1 知，$x_i^{2l}\in Z(V(\alpha))$，$i=1,2,\cdots,n$，$l\in\mathbb{Z}^+$，而由引理 2.2 知，$x_i^{2l-1}\notin Z(V(\alpha))$，$i=1,2,\cdots,n$，$l\in\mathbb{Z}^+$。进一步由引理 2.3 可知，$x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\notin Z(V(\alpha))$，其中 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 取 0 或 1。所以，我们得到 $V_n(\alpha)$ 的中心就是由 x_i，$i=1,2,\cdots,n$ 的偶次幂生成的。至此完成了定理的证明。

参考文献 (References)

[1] Ceken, S., Palmieri, J., Wang, Y.H. and Zhang, J.J. (2013) The discriminant controls automorphism groups of noncom mutative algebras. arXiv:1401.0793.

[2] Ceken, S., Palmieri, J.H., Wang, Y.H. and Zhang, J.J. (2014) The discriminant criterion and automorphism groups of quantized algebras. arXiv:1402.6625.

[3] Davydov, A., Kong, L. and Runkel, I. (2013) Functoriality of the center of an algebra. arXiv:1307.5956.

[4] Davydov, A. (2010) Centre of an algebra. *Advances in Mathematics*, **1**, 319-348.

[5] Davydov, A. (2012) Full centre of an H-module algebra. *Communications in Algebra*, **1**, 273-290.

[6] Rosenberg, A. (1961) Blocks and centres of group algebras. *Mathematische Zeitschrift*, **1**, 209-216.

[7] Pino, G.A. and Crow, K. (2011) The center of a Leavitt path algebra. *Revista Matemática Iberoamericana*, **2**, 621-644.

[8] Greechie, R.J., Foulis, D. and Pulmannová, S. (1995) The center of an effect algebra. *Order*, **1**, 91-106.

[9] Brown, J.H. (2012) The center of a Kumjian-Pask algebra. arXiv:1209.2627.