Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(5), 219-226
Published Online September 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55031

Quaternion-Valued Admissible Wavelet Transform and Weyl Transform

Yin Liu, Jiman Zhao*

Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing
Email: lylight@mail.bnu.edu.cn, *jzhao@bnu.edu.cn

Received: Aug. 30th, 2015; accepted: Sep. 22nd, 2015; published: Sep. 25th, 2015

Abstract

In this paper, we study one kind of quaternion-valued admissible wavelet transform related to a special Fourier transform. We present some properties of this kind of the admissible wavelet transform. Then, we define the Weyl transform associated with the quaternion-valued admissible wavelet transform, and prove that the Weyl operators W_σ are bounded when $1 \le p \le 2$.

Keywords

Quaternion, Admissible Wavelet, Weyl Transform

四元数值可允许小波变换及Weyl变换

刘　茵，赵纪满*

北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，北京
Email: lylight@mail.bnu.edu.cn, *jzhao@bnu.edu.cn

收稿日期：2015年8月30日；录用日期：2015年9月22日；发布日期：2015年9月25日

摘　要

本文研究了一种与特殊的Fourier变换相关的四元数值可允许小波变换，给出了此类可允许小波变换的一

*通讯作者。

文章引用: 刘茵, 赵纪满. 四元数值可允许小波变换及 Weyl 变换[J]. 理论数学, 2015, 5(5): 219-226.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.55031

些性质，然后定义了与其相关的Weyl变换，证明当$1\le p\le 2$时，Weyl算子W_σ是有界的。

关键词

四元数，可允许小波，Weyl变换

1. 引言及预备知识

四元数[1]是 Clifford 代数的一种，在所有的 Clifford 代数中，四元数最先被发现，最接近我们所熟悉的实数复数体系。

小波分析是近 30 年来发展起来的新兴学科，作为一种快速高效，高精度的近似方法，它是 Fourier 分析的一个突破性发展，给许多相关学科的研究领域带来了新的思想，为工程应用提供了一种新的分析工具。关于小波理论，有两个分支：可允许(或连续)小波变换和由多分辨率分析生成的离散小波。关于 Clifford 值小波，Mitrea [2]提出了离散 Clifford 值小波变换，将经典小波推广到了 Clifford 代数，Brackx 和 Sommen [3]-[6]建立了 $\mathbb{R}^n$ 上此类小波的理论。Peng 和 Zhao [7]刻画了与超过二维的可伸缩的欧氏群相关的 Clifford 代数值可允许小波，[8]研究了与 $IG(2)$(二维可伸缩的欧氏群)相关的四元数值可允许小波，用 Fourier 变换语言给出了可允许条件的准确刻画，并给出了一些可允许小波。Mawardi，Adji 和 Zhao [9]用可允许相似群来构造 Clifford 代数值可允许小波变换，Swanhild Bernstein [10]以 Clifford 分析为工具来构造小波。本文研究一种与特殊的 Fourier 变换相关的四元数值可允许小波变换，Fourier 变换中采用的是 $\mu=\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ (其中 μ 是任意给定的单位向量，它定义了变换轴。在处理 RGB (红绿蓝)图象时，常选 $\mu=\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$，对应于单位 RGB 颜色块的照明，灰度，轴。在本文中，为简便起见，也用 $\mu=\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$)，而不是经典意义下的 $\mu=i$ [11] [12]，所以用此 Fourier 变换语言所刻画的可允许条件是本文给出的第一个新的结果，也是本文的基础，接着举例给出一个可允许小波，然后给出此类可允许小波变换的一些性质，诸如 Plancherel 公式，Parseval 公式，重构公式，再生核等。

Weyl算子理论是数学分析和物理学都非常感兴趣的一大课题，在偏微分方程理论中，Weyl算子是被作为一类特殊的拟微分算子来研究的，并且证明它在一系列问题中都有很好的应用，诸如：椭圆理论，谱渐近性，正则问题等[13]-[17]。本文定义了与四元数值可允许小波变换相关的Weyl变换 W_σ，证明了当 $\sigma\in L^p\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$，$1\le p\le 2$ 时，W_σ 是有界的。

现在，简单的回顾一下四元数[18]。作为一类特殊的 Clifford 代数，$\mathbb{R}$ 上的四元数代数 H 是可结合但不可交换的代数。它的基是：1，i，j，k，满足

$$ij=-ji=k，\quad jk=-kj=i，\quad ki=-ik=j，\quad i^2=j^2=k^2=-1。$$

给两个四元数 p，q，令

$$p=p_0+p_1i+p_2j+p_3k，\quad q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k。$$

记 $S(q)=q_0$，$V(q)=q_1i+q_2j+q_3k$，其中 $S(q)$ 是 q 的标量部分，$V(q)$ 是 q 的向量部分，则：

$$q=S(q)+V(q)$$

q 的共轭四元数记为 $\overline{q}=q_0-q_1i-q_2j-q_3k$，

q 的范数(也叫模)记为 $|q|=\left(q\overline{q}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$。

实部 $S(q)=0$ 的四元数为纯四元数，有非零实部的四元数为全四元数，单位四元数模为 1。

设 u,v 为两个纯四元数，u 可以进行如下分解：

$$u_{\|}=\frac{1}{2}(u-vuv),\quad u_{\|}\parallel v,\quad u_{\perp}=\frac{1}{2}(u+vuv),\quad u_{\perp}\perp v; \tag{1.1}$$

有 $u=u_{\|}+u_{\perp}$ [19]。

同理得到一个全四元数 a 关于一个向量 v 可以分解为：$a_{\|}=S(a)+V_{\|}(a)$，$a_{\perp}=V_{\perp}(a)$。

一般来说，四元数乘法不可交换，但对于平行四元数来说，乘法可以交换。

令 μ 是一个单位纯四元数，欧拉公式仍然成立：$e^{\mu\varphi}=\cos\varphi+\mu\sin\varphi$。任意一个四元数都可以表示成极形式：$q=|q|e^{\mu\varphi}$，其中 μ 指的是坐标轴，φ 是角度，

$$\mu=\frac{V(q)}{|V(q)|},\quad 0\le\varphi=\tan^{-1}\frac{|V(q)|}{S(q)}\le\pi$$

如果 $q=0$，角度无定义[18]。

关于四元数的更多内容，参看[19] [20]以及其中的参考文献。

定义 1.1 [8]：四元数模 $L^p(\mathbb{R}^2,H)$ 定义为

$$L^p(\mathbb{R}^2,H)=\left\{f:\mathbb{R}^2\to H,f(x)=f_0(x)+f_1(x)i+f_2(x)j+f_3(x)k\,\middle|\,f_k\in L^p(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),k=0,1,2,3\right\}$$

$L^p(\mathbb{R}^2,H)$ 上的内积和范数定义为：

$$\forall f(x),\quad g(x)\in L^p(\mathbb{R}^2,H),\quad (f,g)=\int_{\mathbb{R}^2}f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x$$

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_{\mathbb{R}^2}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,\quad 1\le p<\infty$$

$$\|f\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^2}|f(x)|<+\infty,\quad p=+\infty$$

类似的，可以定义 $L^p(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)$，$1\le p\le+\infty$ 上的内积和范数。

$L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)$ 上的内积定义为：

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}f(a,b)\overline{g}(a,b)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3},\quad \forall f(a,b),g(a,b)\in L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H) \tag{1.2}$$

本文所采用 Fourier 变换定义如下：

定义 1.2 [18]：$\forall f(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$，四元数 Fourier 变换对定义为：

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^2}f(x)e^{-\mu(x\cdot\xi)}\mathrm{d}x,\quad f(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\xi)e^{\mu(x\cdot\xi)}\mathrm{d}\xi$$

对于 $f(x),g(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$，由计算可得：

$$(f,g)=(\hat{f},\hat{g}) \tag{1.3}$$

本文中出现的速降函数均采用四元数值的，类似经典情况，速降函数定义如下：

对于 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^2,H)$：

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}^2,H)=\left\{\varphi:\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^2,H),\forall\alpha,\beta,\rho_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right|<\infty\right\}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{Z}_+^2$，$|\beta|=\beta_1+\beta_2$，

$$D^\beta=\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}}$$

$C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2,H\right)$：表示无穷次可微的函数全体。这样的$\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^2,H\right)$称为速降函数空间。

2. 主要结果

本节首先推导得出可允许条件，接着举例给出一个可允许小波，然后给出此类可允许小波变换的一些性质。

下面先刻画可允许条件。

令 $\varphi\in L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，定义

$$\varphi_{a,b}(x)=\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \tag{2.1}$$

则 $\varphi_{a,b}(x)$ 的 Fourier 变换是 $\widehat{\varphi_{a,b}}(\xi)=a\hat{\varphi}(a\xi)\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\xi)}$。

现在定义 $L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$ 上的算子 T_φ：

$$T_\varphi: L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)\to L^2\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H,a^{-3}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\right)$$

$$f(x)\mapsto T_\varphi f(a,b)=\left(f,\varphi_{a,b}\right) \tag{2.2}$$

由直接计算可得：

$$T_\varphi f(a,b)=\int_{\mathbb{R}^2}a\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mu(b\cdot\xi)}\overline{\hat{\varphi}}(a\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.3}$$

令 $\varphi\in L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，$f$，$g\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，为了像经典情况一样得到重构公式，计算$\left\langle T_\varphi f,T_\varphi g\right\rangle_{L^2\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)}$。由(2.2)，(2.3)，(1.2)，可得：

$$\left\langle T_\varphi f,T_\varphi g\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}a\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mu(b\cdot\xi)}\overline{\hat{\varphi}}(a\xi)\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}a\hat{\varphi}(a\eta)\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}\overline{\hat{g}}(\eta)\mathrm{d}\eta\right)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}$$

假设：

$$\hat{\varphi}(a\eta)\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}=\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}\hat{\varphi}(a\eta) \tag{2.4}$$

且对几乎处处 $\xi\in\mathbb{R}^2$，$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\left|\hat{\varphi}(a\xi)\right|^2}{a}\mathrm{d}a$ 是常数，

则可得：

$$\left\langle T_\varphi f,T_\varphi g\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\delta(\xi-\eta)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}}(a\xi)\hat{\varphi}(a\eta)\overline{\hat{g}}(\eta)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{a}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}}(a\xi)\hat{\varphi}(a\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}\xi}{a}=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\left|\hat{\varphi}(a\xi)\right|^2}{a}\mathrm{d}a(f,g)$$

因为$\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^2,H\right)$在$L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$中稠密，故$\left\langle T_\varphi f,T_\varphi g\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\left|\hat{\varphi}(a\xi)\right|^2}{a}\mathrm{d}a(f,g)$在$L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$中成立。

记：

$$C_\varphi=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\left|\hat{\varphi}(a\xi)\right|^2}{a}\mathrm{d}a,\ \ a.e.\ \ \xi\in\mathbb{R}^2$$

则有：

$$\left\langle T_\varphi f,T_\varphi g\right\rangle=C_\varphi(f,g)$$

如果 $0<C_\varphi<+\infty$ $\ a.e.\ \ \xi\in\mathbb{R}^2$，则重构公式在弱意义下成立：

$$f(x)=C_{\varphi}^{-1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}(T_{\varphi}f)(a,b)\varphi_{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}$$

下面给出满足(2.4)的函数 $\varphi(x)$。

假设 $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)i+\varphi_2(x)j+\varphi_3(x)k$，则由(2.4)可得：

$$\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mu(x\cdot a\eta)}\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mu(x\cdot a\eta)}\mathrm{d}x$$

从而得到 $\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}=\mathrm{e}^{-\mu(b\cdot\eta)}\varphi(x)$，

所以应有 $\varphi(x)\mu\sin(b\cdot\eta)=\mu\sin(b\cdot\eta)\varphi(x)$，故得到 $\varphi(x)\mu=\mu\varphi(x)$，

由于 $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)i+\varphi_2(x)j+\varphi_3(x)k=S(\varphi)+V(\varphi)=\varphi_{\parallel}(x)+\varphi_{\perp}(x)$，

且由四元数的性质可知 $\varphi_{\parallel}(x)\mu=\mu\varphi_{\parallel}(x)$，故可得 $\varphi_{\perp}(x)\mu=\mu\varphi_{\perp}(x)$，

从而由(1.1)可得 $[V(\varphi)+\mu V(\varphi)\mu]\mu=\mu[V(\varphi)+\mu V(\varphi)\mu]$，因此有 $V(\varphi)\mu=\mu V(\varphi)$，

因此，可得 φ 应为如下形式

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)(i+j+k)$$

总结如下：

定义 2.1： 令 $\varphi(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$，当 $\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)(i+j+k)$，并且：

$0<C_{\varphi}=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{|\hat{\varphi}(a\xi)|^2}{a}\mathrm{d}a<+\infty\ \ a.e.\ \xi\in\mathbb{R}^2$ 时，称 $\varphi(x)$ 为可允许小波，

称 $0<C_{\varphi}=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{|\hat{\varphi}(a\xi)|^2}{a}\mathrm{d}a<+\infty\ \ a.e.\ \xi\in\mathbb{R}^2$ 为可允许条件，

称相应的变换 T_{φ} 为可允许小波变换。

记：

$$AW=\left\{\varphi=\varphi_0(x)+\sqrt{3}\varphi_1(x)\mu\in L^2(\mathbb{R}^2,H),0<C_{\varphi}=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{|\hat{\varphi}(a\xi)|^2}{a}\mathrm{d}a<+\infty\ \ a.e.\ \xi\in\mathbb{R}^2\right\}$$

AW 上的范数记作：

$$\|\varphi\|_{AW}=\left(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}^2+C_{\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

下面给出一个可允许小波的例子。

令 $\varphi(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$，则：

$$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{|\hat{\varphi}(a\xi)|^2}{a}\mathrm{d}a=\int_{\mathbb{R}^+}\frac{|a\xi|\mathrm{e}^{-2|a\xi|}}{a}\mathrm{d}a=|\xi|\int_{\mathbb{R}^+}\mathrm{e}^{-2|\xi|a}\mathrm{d}a=\frac{1}{2}<+\infty$$

另一方面，

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^2}|\xi|\mathrm{e}^{-2|\xi|}\mathrm{d}\xi=\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}r\mathrm{e}^{-2r}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-2r}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}<+\infty$$

所以 $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$，

又由于：

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_{\mathbb{R}^2}\hat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{\mu(x\cdot\xi)}\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}^2}\hat{\varphi}(\xi)[\cos(x\cdot\xi)+\mu\sin(x\cdot\xi)]\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\hat{\varphi}(\xi)\cos(x\cdot\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{\mathbb{R}^2}\hat{\varphi}(\xi)\mu\sin(x\cdot\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

所以综上可知 $\varphi(x)\in AW$ 。

由上述推理过程可得可允许小波变换的性质。

定理 2.2：(Plancherel 公式)令 $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$， $\varphi\in AW$ ，则：

$$\|T_\varphi f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}=C_\varphi\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$$

定理 2.3：(Parseval 公式)令 $f(x)$， $g(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$， $\varphi\in AW$ ，则：

$$\langle T_\varphi f,T_\varphi g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}=C_\varphi(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$$

由 Parseval 公式可得下面的重构公式：

定理 2.4：(Reconstruction 公式)令 $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$， $\varphi\in AW$ ，则：

$$f(x)=C_\varphi^{-1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}(T_\varphi f)(a,b)\varphi_{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}$$

现在定义 $A_\varphi=\left\{T_\varphi f(x): f\in L^2(\mathbb{R}^2,H)\right\}$， $\varphi\in AW$ ，则 A_φ 是带再生核的 Hilbert 空间。

定理 2.5：(再生核) A_φ 的再生核是： $K(a,b,a',b')=C_\varphi^{-1}(\varphi_{a,b},\varphi_{a',b'})$ 。

证明：由重构公式可得：

$$T_\varphi f(a',b')=\int_{\mathbb{R}^2}f(x)\overline{\varphi}_{a',b'}(x)\mathrm{d}x=C_\varphi^{-1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}(T_\varphi f)(a,b)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{a,b}(x)\overline{\varphi}_{a',b'}(x)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}$$

所以，再生核： $K(a,b,a',b')=C_\varphi^{-1}(\varphi_{a,b},\varphi_{a',b'})$ 。证毕。

定理 2.6: 令 $f(x)\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$， $\varphi\in AW$ ，则 $T_\varphi f(x)\in L^P(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)$， $2\le p\le+\infty$ ，即 T_φ 是 $(2,p)$ 型。

证明：当 $p=2$ 时，由 Plancherel 公式， $\|T_\varphi f\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}=C_\varphi^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$。

当 $p=\infty$ 时，由 Hölder 不等式可得

$$|T_\varphi f|=\left|\int_{\mathbb{R}^2}f(x)\overline{\varphi}_{a,b}(x)\mathrm{d}x\right|\le\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$$

因此 $\|T_\varphi f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}\le\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$。

所以由 Riesz-Thorin 定理可知 T_φ 是 $(2,p)$ 型， $2\le p\le+\infty$ 。证毕。

3. 与四元数值可允许小波变换相关的 Weyl 变换

本节将在上一节的基础上研究与四元数值可允许小波变换相关的 Weyl 变换。

定义 3.1：令 $\sigma\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)$，则 Weyl 算子 W_σ 定义为：

$$(W_\sigma\varphi,f)_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}=\langle\sigma,T_\varphi f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$$

其中 $f\in L^2(\mathbb{R}^2,H)$， $\varphi\in AW$ 。

由定义可得

$$(W_\sigma\varphi,f)=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\sigma(a,b)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{a,b}(x)\overline{f}(x)\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}$$

因此：

$$W_\sigma\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\sigma(a,b)\varphi_{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}a\sigma(a,x-ab')\varphi(b')\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b'}{a^3}$$
$$=\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\sigma_{\frac{1}{a},-\frac{1}{a}x}(a,-b')\frac{\mathrm{d}a}{a^3}\varphi(b')\mathrm{d}b'=\int_{\mathbb{R}^2}K(x;b)\varphi(b')\mathrm{d}b'$$

其中$\sigma_{\frac{1}{a},-\frac{1}{a}x}(\cdot,\cdot)$是关于第二个变量的伸缩平移变换，

$$K(x;b)=\int_{\mathbb{R}^+}\sigma_{\frac{1}{a},-\frac{1}{a}x}(a,-b')\frac{\mathrm{d}a}{a^3}$$

定理 3.2：令$\sigma\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$，则 Weyl 算子定义了一个有界映射$W_\sigma$：$AW\to L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，并且：

$$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$$

所以对于符号$\sigma\in L^2\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$，算子$W_\sigma$有定义，并且也有$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$。

证明：首先证明如果$\sigma\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$，则$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$。

事实上，对于$f\in L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，$\varphi\in AW$，由定义，Hölder 不等式和 plancherel 公式可得：

$$\begin{aligned}\left|(W_\sigma\varphi,f)\right|&\le\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}|\sigma(a,b)|^2\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_\varphi f(a,b)\right|^2\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}C_\varphi^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}\le\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}\|\varphi\|_{AW}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}\end{aligned}$$

所以，$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$。

另一方面，由于$\sigma\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$在$L^2\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$中稠密，所以可以将算子$\sigma\to W_\sigma$延拓到$L^2\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$上，并且$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$也成立。证毕。

定理 3.3：假设$\sigma\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$，则算子$W_\sigma$也满足：

$$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$$

因此 Weyl 算子可以延拓到$\sigma\in L^1\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$上，并且$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$。

证明：因为$f\in L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，$\varphi\in AW$，可得：

$$\left|T_\varphi f(a,b)\right|\le\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$$

故对于$\sigma\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$

$$\left|(W_\sigma\varphi,f)\right|\le\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^2}|\sigma(a,b)|\left|\overline{T_\varphi f}(a,b)\right|\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^3}\le\|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2,H)}$$

所以$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$。

因为$\sigma\in\mathbb{S}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$在$L^1\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$中稠密，所以可以将算子$W_\sigma$延拓到$L^1\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$上。证毕。

由 Riesz-Thorin 定理及定理 3.2，定理 3.3 可得下面的定理。

定理 3.4：对于$p\in[1,2]$，存在唯一的从$L^p\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H\right)$到$B\left(AW,L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)\right)$的算子$W:\sigma\to W_\sigma$，使得对所有的$f\in L^2\left(\mathbb{R}^2,H\right)$，$\varphi\in AW$，有：

$$(W_\sigma\varphi,f)=\left\langle\sigma,T_\varphi f\right\rangle$$

并且$\|W_\sigma\|\le\|\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2,H)}$。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11471040)，中央高校基本科研业务费专项资金(No. 2014kJJCA10)资助。

参考文献 (References)

[1] Hamilton, W.R. (1866) Elements of Quaternions. Longmans, Green, London.

[2] Mitrea, M. (1994) Clifford Wavelets, Singular Integrals and Hardy Spaces. *Lectures Notes in Mathematics*, **1575**.

[3] Brackx, F. and Sommen, F. (2000) Clifford-Hermite Wavelets in Euclidean Space. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **6**, 209-310. http://dx.doi.org/10.1007/bf02511157

[4] Brackx, F. and Sommen, F. (2001) The Continuous Wavelet Transform in Clifford Analysis. *Clifford Analysis and Its Applications*, 9-26. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-0862-4_2

[5] Brackx, F. and Sommen, F. (2001) The Generalized Clifford-Hermite Continuous Wavelet Transform. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **11**, 219-231. http://dx.doi.org/10.1007/BF03042219

[6] Brackx, F. and Sommen, F. (2002) Benchmarking of Three-Dimensional Clifford Wavelet Functions. *Complex Variables*: *Theory and Application*, **47**, 577-588. http://dx.doi.org/10.1080/02781070290016269

[7] Zhao, J.M. and Peng, L.Z. (2006) Clifford Algebra-Valued Admissible Wavelets Associated with More than 2-Dimensional Euclidean Group with Dilations, Wavelets, Multiscale Systems and Hypercomplex Analysis. *Operator Theory*: *Advances and Applications*, **167**, 183-190.

[8] Zhao, J.M. and Peng, L.Z. (2007) Quaternion-Valued Admissible Wavelets and Orthogonal Decomposition of $L^2(IG(2),H)$. *Frontiers of Mathematics in China*, **2**, 491-499. http://dx.doi.org/10.1007/s11464-007-0030-5

[9] Bahri, M., Adji, S. and Zhao, J.M. (2011) Clifford Algebra-Valued Wavelet Transform on Multivector Fields. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **21**, 13-30. http://dx.doi.org/10.1007/s00006-010-0239-3

[10] Bernstein, S. (2014) Wavelets in Clifford Analysis. *Operator Theory*, 1-25. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-0692-3_17-1

[11] Bateman, H. (1954) Tables of Integral Transforms. *Staff of the Bateman Manuscript Project*, **1**, 313.

[12] Ding, Y. (2008) The Basis of Modern Analysis. Beijing Normal University Press, Beijing.

[13] Boggiatto, P. and Rodino, L. (2003) Quantization and Pseudo-Differential Operators. *Cubo Matemática Educacional*, **5**, 237-272.

[14] Dachraoui, A. (2001) Weyl-Bessel Transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **133**, 263-276. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00649-X

[15] Peng, L.Z. and Ma, R.Q. (2005) Wavelets Associated with Hankel Transform and Their Weyl Transform. *Science in China Series A-Mathematics*, **5**, 497-503.

[16] Rachdi, L.T. and Trimèche, K. (2003) Weyl Transforms Associated with the Spherical Mean Operator. *Analysis and Applications*, **2**, 141-164. http://dx.doi.org/10.1142/S0219530503000156

[17] Zhao, J.M. and Peng, L.Z. (2004) Wavelet and Weyl Transforms Associated with the Spherical Mean Operator. *Integral Equations and Operator Theory*, **50**, 279-290. http://dx.doi.org/10.1007/s00020-003-1222-3

[18] Moxey, C.E., Stephen, J.S. and Todd, A.E. (2003) Hypercomplex Correlation Techniques for Vector Images. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **51**, 1941-1953. http://dx.doi.org/10.1109/TSP.2003.812734

[19] Coxeter, H.S.M. (1946) Quaternions and Reflections. *The American Mathematical Monthly*, **53**, 136-146. http://dx.doi.org/10.2307/2304897

[20] Gürlebeck, K. and Spröbig, W. (1990) Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. Birkhäuser Verlag, Basel. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-7295-9