Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(6), 480-485
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66066

Hans汉斯

Nonexistence of Positive Nonconstant Stationary Solutions for Generalized Gray-Scott Model

Ling Yang, Ying Li

School of Science, Dalian Minzu University, Dalian Liaoning
Email: zhwsdragon@163.com

Received: Nov. 3rd, 2016; accepted: Nov. 18th, 2016; published: Nov. 25th, 2016

Abstract

In his paper, some sufficient conditions for nonexistence of positive nonconstant stationary solutions for generalized Gray-Scott model are given.

Keywords

Generalized Gray-Scott Model, Stationary Solution, Nonexistence

广义Gray-Scott模型非常值正稳态解的不存在性

杨　玲，李　莹

大连民族大学理学院，辽宁　大连
Email: zhwsdragon@163.com

收稿日期：2016年11月3日；录用日期：2016年11月18日；发布日期：2016年11月25日

摘　要

本文给出了广义Gray-Scott模型不存在非常值正稳态解的若干充分条件。

文章引用：杨玲，李莹. 广义 Gray-Scott 模型非常值正稳态解的不存在性[J]. 理论数学, 2016, 6(6): 480-485.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66066

关键词

广义Gray-Scott模型，稳态解，不存在性

1. 引言

广义 Gray-Scott 模型的化学反应机制如下[1]：

$$\begin{cases} S \to U + pV \to (p+1)V, & 比率 = k_1 uv^p, \\ V \to W, & 比率 = k_2 v, \end{cases}$$

其中 k_1， k_2 和 p 是正常数。对于一维情形，反应物 U 和 V 的浓度 $u(x,t), v(x,t)$ 满足如下反应扩散方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_1 uv^p + F(u_0 - u), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k_1 uv^p - k_2 v, \end{cases}$$

其中 d_1 和 d_2 是化学反应物 U 和 V 的扩散系数。当 $p = 2$ 时，通常称上述模型为 Gray-Scott 模型[2] [3]。通过变换，其相应的高维广义 Gray-Scott 模型为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + F(1-u) - uv^p, (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v - (F+k)v + uv^p, (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{1.1}$$

此处，Δ 是 Laplace 算子；Ω 为 R^N 中的有界区域，且其边界充分光滑；ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量 $\partial_\nu = \dfrac{\partial}{\partial \nu}$；$d_1, d_2, F, k$ 是正常数。上述模型的正稳态解满足下面的椭圆型方程组：

$$\begin{cases} -d_1 \Delta u = F(1-u) - uv^p, & x \in \Omega, \\ -d_2 \Delta v = uv^p - (F+k)v, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

称 $(u,v) \in \left[C^2(\bar{\Omega})\right]^2$ 是(1.1)的一个正解，如果， $u > 0, v > 0$，且其满足(1.1)。

目前，关于广义 Gray-Scott 模型的研究主要集中在 $p = 2$ 的情形[4]-[9]，对于 $p \neq 2$ 的情形的研究很少，文献[1]也仅仅讨论了一维情形。对其它类似模型如 Sel'kov 模型、 Brusselator 模型、Schnakenberg 模型等的研究参见[10] [11] [12] [13]。

本文研究问题(1.1)非常值正解的不存在性。主要结果如下：

引理 1.1：设 $p > 1$，如果下列条件之一成立：

(i) $\mu_1 d_2 + F + K > \dfrac{\left(pa^{p-1} + a^p\right)^2}{4F} + pa^{p-1}$ ，

(ii) $F + k > pa^{p-1}$ 且 $\mu_1 d_1 + F > \dfrac{\left(pa^{p-1} + a^p\right)^2}{4\left(F + k - pa^{p-1}\right)}$，则问题(1.1)不存在非常值正解。

定理 1.2：设 $p > 1$，如果下列条件之一成立：

(i) $\frac{F}{F+k} > \frac{d_1}{d_2}$ 且 $d_2 > \frac{p^2}{4F}\left(\frac{F}{F+k}\right)^{2p-2} \cdot \frac{d_1+\mu_1^{-1}F}{\mu_1 d_2+F+k}$，

(ii) $F+k > pa^{p-1}$ 且 $\mu_1 d_1^2 + Fd_1 > \left(d_2+\frac{F+k}{\mu_1}\right)\frac{a^{2p}}{4\left(F+k-pa^{p-1}\right)}$，

则问题(1.1)不存在非常值正解。

在第二节给出定理 1.1 的证明；在第三节，给出定理 1.2 的证明。

2. 定理 1.1 的证明

引理 2.1：设 (u,v) 为问题(1.1)的一个正解，则

$$\max_{\Omega} u(x) < 1,\ \max_{\Omega} v(x) < a,$$

其中，$a = \max\left\{\frac{d_1}{d_2}, \frac{F}{F+k}\right\}$。

证明：设 $u(\bar{x}) = \max_{\Omega} u$，$\bar{x} \in \bar{\Omega}$。依文献[14]中命题 2.2，得

$$F - Fu(\bar{x}) - u(\bar{x})v^p(\bar{x}) \geq 0,$$

由此得到第一个结论。

令

$$w(x) = d_1 u(x) + d_2 v(x),$$

得

$$-\Delta w = F(1-u) - (F+k)v,\ x\in\Omega;\ \partial_\nu w = 0,\ x\in\partial\Omega.$$

令 $w(\bar{y}) = \max_{\Omega} w$，依文献[14]中命题 2.2，得

$$F\left(1-u(\bar{y})\right) - (F+k)v(\bar{y}) \geq 0,$$

即

$$v(\bar{y}) \leq \frac{F}{F+k}\left(1-u(\bar{y})\right),$$

进而

$$\begin{aligned}\max_{\Omega} v \leq d_2^{-1} w(\bar{y}) &\leq \frac{d_1}{d_2}u(\bar{y}) + \frac{F}{F+k}\left(1-u(\bar{y})\right) \\ &= \frac{F}{F+k} + \left(\frac{d_1}{d_2} - \frac{F}{F+k}\right)u(\bar{y})\end{aligned}.$$

这表明，第二个结论成立，这样，引理 2.1 得证。

定理 1.1 的证明：对任意 $g \in C^1(\bar{\Omega})$，记 $\bar{g} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g\mathrm{d}x$。假设 (u,v) 是(1.1)的正解。用 $(u-\bar{u})$ 乘以(1.1)中的第一个方程两边，然后在 Ω 上积分，得

$$\begin{aligned} d_1\int_\Omega \left|\nabla(u-\bar{u})\right|^2 \mathrm{d}x &= F\int_\Omega (1-u)(u-\bar{u})\mathrm{d}x - \int_\Omega uv^p(u-\bar{u})\mathrm{d}x \\ &= -\left(F+\bar{v}^p\right)\int_\Omega (u-\bar{u})^2\mathrm{d}x - \int_\Omega u(u-\bar{u})\left(v^p - \bar{v}^p\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.1}$$

由中值定理知：对任意 $x\in\Omega$，存在介于 $v,\bar{v}$ 之间的 $\xi(x)$，使得 $v^p-\bar{v}^p=p\xi^{p-1}(v-\bar{v})$，由于 $v<a$，所以 $\left|v^p-\bar{v}^p\right|\le pa^{p-1}|v-\bar{v}|$。注意到：$u<1$，得

$$d_1\int_\Omega\left|\nabla(u-\bar{u})\right|^2\mathrm{d}x\le -F\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+pa^{p-1}\int_\Omega|u-\bar{u}||v-\bar{v}|\mathrm{d}x\ 。$$

同理，用 $(v-\bar{v})$ 乘以(1.1)中的第二个方程两边，然后在 Ω 上积分，得

$$\begin{aligned}&d_2\int_\Omega\left|\nabla(v-\bar{v})\right|^2\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega u(v-\bar{v})\left(v^p-\bar{v}^p\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega\bar{v}^p(u-\bar{u})(v-\bar{v})\mathrm{d}x-(F+k)\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x\,.\\&\le\left[pa^{p-1}-(F+k)\right]\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x+a^p\int_\Omega|u-\bar{u}||v-\bar{v}|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由 Poincaré 不等式

$$\mu_1\int_\Omega(g-\bar{g})^2\mathrm{d}x\le\int_\Omega\left|\nabla(g-\bar{g})\right|^2\mathrm{d}x,\ \forall g\in C^1\left(\bar{\Omega}\right),$$

得

$$\begin{aligned}&\mu_1\left[d_1\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+d_2\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x\right]\\&\le d_1\int_\Omega\left|\nabla(u-\bar{u})\right|^2\mathrm{d}x+d_2\int_\Omega\left|\nabla(v-\bar{v})\right|^2\mathrm{d}x\\&\le -F\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+\left[pa^{p-1}+a^p\right]\int_\Omega|u-\bar{u}||v-\bar{v}|\mathrm{d}x\\&\quad+\left[pa^{p-1}-(F+k)\right]\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x\end{aligned}.$$

利用 Young 不等式，得

$$\int_\Omega|u-\bar{u}||v-\bar{v}|\mathrm{d}x\le\varepsilon\int_\Omega|u-\bar{u}|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega|v-\bar{v}|^2\mathrm{d}x$$

进而

$$\begin{aligned}&\mu_1\left[d_1\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+d_2\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x\right]\\&\le\left[-F+\left(pa^{p-1}+a^p\right)\varepsilon\right]\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x\\&\quad+\left[\left(pa^{p-1}+a^p\right)\frac{1}{4\varepsilon}+pa^{p-1}-(F+k)\right]\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x\end{aligned}.$$

取 $\varepsilon=\dfrac{F}{pa^{p-1}+a^p}$ 得

$$\mu_1d_2\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x\le\left[\frac{\left(pa^{p-1}+a^p\right)^2}{4}+pa^{p-1}-(F+k)\right]\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x,$$

所以当 $\mu_1d_2+F+K>\dfrac{\left(pa^{p-1}+a^p\right)^2}{4F}+pa^{p-1}$ 时，有 $u\equiv\bar{u},v\equiv\bar{v}$，这证明了第一个结论。类似地，可得到第二个结论。这样，定理 1.1 得证。

3. 定理 1.2 的证明

引理 3.1：设 (u,v) 是(1.1)的一个正解，则 (u,v) 满足如下积分恒等式

$$d_1^2\int_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x+Fd_1\int_\Omega\phi^2\mathrm{d}x+\left[(F+k)d_1-Fd_2\right]\int_\Omega\phi\varphi\,\mathrm{d}x=d_2^2\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+(F+k)d_2\int_\Omega\varphi^2\mathrm{d}x\qquad(3.1)$$

其中 $\phi = u - \bar{u}$，$\varphi = v - \bar{v}$，$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} u\mathrm{d}x$，$\bar{v} = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} v\mathrm{d}x$。

证明：将模型(1.1)的两个方程在 Ω 上积分，得

$$F\int_{\Omega} u\mathrm{d}x + (F+k)\int_{\Omega} v\mathrm{d}x = F|\Omega| \tag{3.2}$$

令

$$w(x) = d_1 u(x) + d_2 v(x),$$

得

$$-\Delta w = -F\phi - (F+k)\varphi, w \in \Omega; \partial_{\nu} w = 0, w \in \partial\Omega$$

在上式两边乘以 $w(x)$，在 Ω 上积分，并注意到：$\int_{\Omega}\phi\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\varphi\mathrm{d}x = 0$，得

$$\int_{\Omega}|\nabla w|^2\mathrm{d}x = -\int_{\Omega}\left[F\phi + (F+k)\varphi\right](d_1 u + d_2 v)\mathrm{d}x = -Fd_1\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x - \left[(F+k)d_1 + Fd_2\right]\int_{\Omega}\phi\varphi\mathrm{d}x - (F+k)d_2\int_{\Omega}\varphi^2\mathrm{d}x$$

由此得

$$\int_{\Omega}\phi\varphi\mathrm{d}x \le 0$$

另一方面

$$\int_{\Omega}|\nabla w|^2\mathrm{d}x = \int_{\Omega}|\nabla(d_1 u + d_2 v)|^2\mathrm{d}x = d_1^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x + 2d_1 d_2\int_{\Omega}\nabla\phi\nabla\varphi\mathrm{d}x + d_2^2\int_{\Omega}|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

在(3.2)的两边乘以 ϕ，然后在 Ω 上积分，得

$$-F\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x - (F+k)\int_{\Omega}\phi\varphi\mathrm{d}x = d_1\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x + d_2\int_{\Omega}\nabla\phi\nabla\varphi\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

联合(3.3)和(3.4)，引理 3.1 得证。

定理 1.2 证明 由引理 3.1 的证明可知 $\int_{\Omega}\phi\varphi\mathrm{d}x \le 0$，再根据引理 3.1 知：如果 $\frac{F}{F+k} > \frac{d_1}{d_2}$，则有

$$d_1^2\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x + Fd_1\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x \ge d_2^2\int_{\Omega}|\nabla\varphi|^2 + (F+k)d_2\int_{\Omega}\varphi^2\mathrm{d}x$$

由 Poincaré 不等式

$$\int_{\Omega}\varphi^2\mathrm{d}x \le \frac{d_1 + \mu_1^{-1}F}{\mu_1 d_2 + F + k}\cdot\frac{d_1}{d_2}\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

接下来在(1.1)中的第一个方程两边同乘以 $u - \bar{u}$，在 Ω 上积分，得

$$d_1\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x = -F\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x - \int_{\Omega}u\left(v^p - \bar{v}^p\right)\phi\mathrm{d}x - \int_{\Omega}\bar{v}^p\phi^2\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

由中值定理知，$\exists\xi(x)$ 介于 $v, \bar{v}$ 之间，使得 $v^p - \bar{v}^p = p\xi^{p-1}(v - \bar{v})$，因为 $v < a$，所以 $\left|v^p - \bar{v}^p\right| \le pa^{p-1}|v - \bar{v}|$。又因为 $u < 1$，$\phi = u - \bar{u}$，$\varphi = v - \bar{v}$，所以由(3.6)得

$$\begin{aligned} d_1\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x &= -F\int_{\Omega}\phi^2 dx - \int_{\Omega}u\left(v^p - \bar{v}^p\right)\phi\mathrm{d}x - \int_{\Omega}\bar{v}^p\phi^2 dx \\ &\le -F\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x + pa^{p-1}\int_{\Omega}\phi\psi\mathrm{d}x \\ &\le -F\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x + pa^{p-1}\left(\varepsilon\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\Omega}\varphi^2\mathrm{d}x\right) \\ &\le \left(-F + pa^{p-1}\varepsilon\right)\int_{\Omega}\phi^2\mathrm{d}x + pa^{p-1}\frac{1}{4\varepsilon}\int_{\Omega}\varphi^2\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.7}$$

取 $\varepsilon = \dfrac{F}{pa^{p-1}}$，于是由(3.7)可化为

$$d_1 \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \mathrm{d}x \le \frac{\left(pa^{p-1}\right)^2}{4F} \int_\Omega \varphi^2 \mathrm{d}x$$

由于 $\dfrac{F}{F+k} > \dfrac{d_1}{d_2}$ 再结合(3.7)和(3.5)，则 $a = \dfrac{F}{F+k}$。

于是，得

$$d_1 \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \mathrm{d}x \le \frac{\left(pa^{p-1}\right)^2}{4F} \cdot \frac{\left(d_1 + \mu_1^{-1}F\right)d_1}{\left(\mu_1 d_2 + F + k\right)d_2} \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \mathrm{d}x \le \frac{p^2}{4F}\left(\frac{F}{F+k}\right)^{2p-2} \cdot \frac{\left(d_1 + \mu_1^{-1}F\right)d_1}{\left(\mu_1 d_2 + F + k\right)d_2} \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \mathrm{d}x$$

所以，当 $d_2 > \dfrac{p^2}{4F}\left(\dfrac{F}{F+k}\right)^{2p-2} \cdot \dfrac{d_1 + \mu_1^{-1}F}{\mu_1 d_2 + F + k}$ 时，$u \equiv \bar{u}, v \equiv \bar{v}$。

类似地可得到第二个结论。这样，定理 1.2 得证。

基金项目

辽宁省大学生创新创业项目(编号：S201512026049)。

参考文献 (References)

[1] Hale, J., Peletier, L.A. and Troy, W.C. (2000) Exact Homoclinic and Heteroclinic Solutions of the Gray-Scott Model for Autocalysis. *SIAM Journalon Applied Mathematics*, **61**,102-130. https:/doi.org/10.1137/S0036139998334913

[2] Gray, P. and Scott, S.K. (1983) Autocatalytic Reactions in the Isothermal Continuous Stirred Tank Reactor: Isolas and Other Forms of Multistability. *Chemical Engineering Science*, **38**, 29-43. https:/doi.org/10.1016/0009-2509(83)80132-8

[3] Gray, P. and Scott, S.K. (1984) Autocatalytic Reaction in the CSTR: Oscillations and Instabilities in the System $A+2B \to 3B; B \to C$. *Chemical Engineering Science*, **39**, 1087-1097. https:/doi.org/10.1016/0009-2509(84)87017-7

[4] Ai, S.B. (2004) Homoclinic Solutions to the Gray-Scott Model. A*pplied Mathematics Letters*, **17**, 1357-1361. https:/doi.org/10.1016/j.am1.2004.02.004

[5] Kolokolnikova, T., Warda, M.J. and Wei, J.C. (2005) The Existence and Stability of Spike Equilibria in the One-Dimensional Gray-Scott Model on a Finite Domain. *Applied Mathematics Letters*, **18**, 951-956. https:/doi.org/10.1016/j.aml.2004.06.024

[6] Muratov, C.B. and Osipov, V.V.（2000）Static Spike Autosolutions in the Gray-Scott Model. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, **33**, 8893-8916. https:/doi.org/10.1088/0305-4470/33/48/321

[7] Mcgough, J.S. and Kiley, K. (2004) Pattern Formation in the Gray-Scott Model. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **5**, 105-121. https:/doi.org/10.1016/S1468-1218(03)00020-8

[8] Peng, R. and Wang, M.X. (2007) On Pattern Formation in the Gray-Scott Model. *Science in China Series A*: *Mathematics*, **50**, 377-386. https:/doi.org/10.1007/s11425-007-0001-z

[9] Peng, R. and Wang, M.X. (2009) Some Nonexistence Results for Nonconstant Stationary Solutions to the Gray-Scott Model in a Bounded Domain. *Applied Mathematics Letters*, **22**,569-573. https:/doi.org/10.1016/j.aml.2008.06.032

[10] Wang, M.X. (2003) Non-Constant Positive Steady States of the Sel'kov Model. *Journal of Differential Equations*, **190**, 600-620. https:/doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00100-6

[11] Peng, R. (2007) Qualitative Analysis of Steady States to the Sel'kov Model. *Journal of Differential Equations*, **241**, 386-398. https:/doi.org/10.1016/j.jde.2007.06.005

[12] Ghergu, M. (2008) Non-Constant Steady-State Solutions for Brusselator Type Systems. *Nonlinearity*, **21**, 2331-2345. https:/doi.org/10.1088/0951-7715/21/10/007

[13] Schnakenberg, J. (1979) Simple Chemical Reaction Systems with Limit Cycle Behavior. *Journal of Theoretical Biology*, **81**, 389-400. https:/doi.org/10.1016/0022-5193(79)90042-0

[14] Lou, Y. and Ni, W.M. (1996) Diffusion, Self-Diffusion and Cross-Diffusion. *Journal of Differential Equations*, **131**, 79-131. https:/doi.org/10.1006/jdeq.1996.0157