Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 482-493
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76064

Properties of the System Operator for the Supply Chain System with State of Optimal Adjustment

Zhirui Feng, Wenzhi Yuan

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: 332400830@qq.com, ywzywz123@163.com

Received: Nov. 6th, 2017; accepted: Nov. 17th, 2017; published: Nov. 24th, 2017

Abstract

The paper presents a supply chain system with state of optimal adjustment. By choosing space and defining operator of this system, we transfer this model into an abstract Cauchy problem. Using C_0 semigroup theory, we first prove the system operator is a densely defined resolvent positive operator. We obtain the adjoint operator of the system operator and its domain. Furthermore, we prove that 0 is the growth bound of the system operator. Finally, we show that 0 is also the upper spectral bound of the system operator using the concept of cofinal and relative theory.

Keywords

Resolvent Positive, Adjoint Operator, Growth Bound, Cofinal, Upper Spectral Bound

具有优化调整状态的供应链系统算子的性质

冯志瑞，原文志

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: 332400830@qq.com, ywzywz123@163.com

收稿日期：2017年11月6日；录用日期：2017年11月17日；发布日期：2017年11月24日

摘 要

研究了一类具有优化调整状态的供应链系统。通过选取空间和定义算子将模型方程转化成抽象柯西问题，运用C_0半群理论，证明了系统算子是稠密的预解正算子，得出了系统算子的共轭算子及其定义域，并证明了系统算子的增长界为0。最后运用预解正算子中共尾的概念及相关理论证明了系统算子的谱上界也是0。

文章引用: 冯志瑞, 原文志. 具有优化调整状态的供应链系统算子的性质[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 482-493.
DOI: 10.12677/pm.2017.76064

关键词

预解正算子，共轭算子，增长界，共尾，谱上界

1. 引言

在经济全球化迅速发展的今天，供应链得到了越来越多企业的重视，供应链战略成为企业战略的一个主要方面。“真正的合作不是企业与企业之间的合作，而是供应链与供应链之间的合作”，这句话高度概括了供应链的主要性。成功的供应链管理能够协调并整合供应链中所有的活动，最终成为无缝衔接的一体化过程，不仅能满足客户的需要，还能降低成本，实现利润。所以此系统的管理和优化受到越来越多人的关注。辛玉红等人在文献[1]中把整个供应链系统作为研究对象，运用增补变量法建立了供应链系统的可靠性模型。因为企业所处的状态不是一成不变的，所以在某个时间段，它会从其中一种状态转移到另一种状态，在此期间造成的错误会随着时间的积累导致整个系统瘫痪。为了减少这类错误的发生，辛玉红等人在文献[2]中又对先前的供应链系统进行了评估，优化。文献[3]研究了一类具有优化调整状态的供应链系统的稳定性分析。

本文研究了一类边界带积分的供应链系统，在前人的方法及结论的基础上，首先运用预解正算子理论，证明了系统算子是稠密的预解正算子，并讨论了系统算子的共轭算子及其定义域，然后运用相关理论证明了系统算子的增长界为 0，最后根据共尾定理证明系统算子的谱上界也是零。

2. 模型介绍

模型假设

1) 供应链系统的故障是状态型的，系统故障后得到及时的修理；

2) 企业可能失效的发生时间服从参数为 μ_0 的指数分布，其分布函数 $F_0(x)=1-\mathrm{e}^{-\mu_0 x}$；

3) 若系统进入可能失效状态后，在 T 时间内发生失效，则在失效的瞬间立即进行维修，假设系统的维修时间服从一般分布，其分布函数为 $G_i(x)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^x \mu_i(t)\mathrm{d}t}$；

4) 若系统进入可能失效状态后，在 T 时间内未发生失效，此时对系统进行优化调整操作，假设优化调整操作的完成时间服从一般分布，其分布函数记为 $G_N(x)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^x \mu_N(t)\mathrm{d}t}$。

根据模型假设，我们可以得到系统的状态转移图，如图 1。

其中，图中的各个状态的含义如下：

状态 0：企业正常生产状态；

状态 1：企业处于故障状态；

状态 2：企业处于产品积压状态；

状态 3：企业处于原材料供应不足状态；

状态 4：企业处于产品积压且原材料不足状态；

状态 M：企业处于可能失效状态；

状态 N：企业进入优化调整状态。

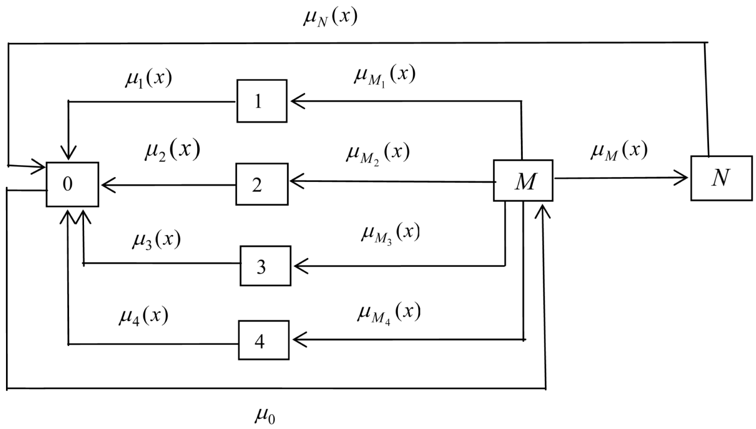

Figure 1. System state transition diagram
图 1. 系统的状态转移图

利用增补变量法，此模型可以由下面的微积分方程组描述：

$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu_0 P_0(t)+\sum_{i=1}^{4}\int_0^\infty \mu_i(x)P_i(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^\infty \mu_N(x)P_N(x,t)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial x}=-\mu_i(x)P_i(x,t),\ i=1,2,3,4 \tag{2}$$

$$\frac{\partial P_M(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial P_M(x,t)}{\partial x}=-\left(\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right)P_M(x,t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial P_N(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial P_N(x,t)}{\partial x}=-\mu_N(x)P_N(x,t) \tag{4}$$

边值条件为：

$$P_i(0,t)=\int_0^\infty \mu_{M_i}(x)P_M(x,t)\mathrm{d}x,\ i=1,2,3,4 \tag{5}$$

$$P_M(0,t)=\mu_0 P_0(t) \tag{6}$$

$$P_N(0,t)=\int_0^\infty \mu_M(x)P_M(x,t)\mathrm{d}x \tag{7}$$

初值条件：

$$P_0(0)=1,\ P_i(x,0)=P_M(x,0)=P_N(x,0)=0,\ i=1,2,3,4 \tag{8}$$

其中，$(x,t)\in \mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+$，$P_0(t)$表示 t 时刻系统处在状态 0 的概率；$P_j(x,t)$表示 t 时刻企业处在状态 j，在该状态已经驻留了 x 时间，且在时间段$(x,x+\mathrm{d}x)$离开状态 j 的概率，$(j=1,2,3,4,M,N)$；μ_0 表示状态 0 到状态 M 的可能失效率；系统进入状态 M 的瞬间开始计时，以时间段 T 为临界值，$\mu_{M_i}(x)$表示系统在 T 时间内发生失效且没有立即进行维修，此时系统进入 i 状态的失效率；$\mu_M(x)$表示系统在 T 时间内未发生失效，在 M 状态驻留时间 T 后立即进入 N 状态的优化率；$\mu_i(x)$表示系统从状态 i 到状态 0 的修复率；$\mu_N(x)$表示系统从状态 N 到状态 0 的调整率。且满足

1) $\mu_i(x)<\infty$，$\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)<\infty$，$\mu_N(x)<\infty$

2) $\int_0^\infty \mu_i(x)\mathrm{d}x=\infty$，$\int_0^\infty\left[\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right]\mathrm{d}x=\infty$，$\int_0^\infty \mu_N(x)\mathrm{d}x=\infty$

取状态空间 $X=\left\{\boldsymbol{P}=\left(P_0,P_1,P_2,P_3,P_4,P_M,P_N\right)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,P_0\in\mathrm{R};P_j\in L^1\left(\mathrm{R}_+\right),j=1,2,3,4,M,N\right\}$。范数定义为 $\|\boldsymbol{P}\|=|P_0|+\sum_{i=1}^{4}\|P_i(x)\|_{L^1(\mathrm{R}_+)}+\|P_M(x)\|_{L^1(\mathrm{R}_+)}+\|P_N(x)\|_{L^1(\mathrm{R}_+)}$。显然，$(X,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间。

在 X 上定义算子 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 及它们的定义域。设

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\left(-\mu_0,-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_1(x),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_2(x),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_3(x),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_4(x),\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_M(x)-\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_N(x)\right)$$

$$D(\boldsymbol{A})=\left\{\boldsymbol{P}\in X\,\middle|\,P_j(x)\text{绝对连续},\frac{\mathrm{d}P_j(x)}{\mathrm{d}x}\in L^1(\mathrm{R}_+),j=1,2,3,4,M,N,\text{且}P_i(0,t)=\int_0^\infty\mu_{M_i}(x)P_M(x)\mathrm{d}x,\right.$$
$$\left.P_M(0)=\mu_0P_0,P_N(0)=\int_0^\infty\mu_M(x)P_M(x)\mathrm{d}x,i=1,2,3,4\right\}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{B}_1\\0&0\end{pmatrix},D(\boldsymbol{B})=X$$

其中

$$\boldsymbol{B}_1=\left(\int_0^\infty\mu_1(x)\mathrm{d}x,\int_0^\infty\mu_2(x)\mathrm{d}x,\int_0^\infty\mu_3(x)\mathrm{d}x,\int_0^\infty\mu_4(x)\mathrm{d}x,0,\int_0^\infty\mu_N(x)\mathrm{d}x\right)$$

所以 $D(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=D(\boldsymbol{A})\cap D(\boldsymbol{B})=D(\boldsymbol{A})$。

则系统方程可转化为 Banach 空间 X 中的抽象 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}(t),t\in[0,\infty)\\ \boldsymbol{P}(0)=(1,0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

3. 算子的性质

在研究系统算子 $A+B$ 的性质前首先给出几个相关定义。

定义 1. 算子 $A+B$ 的谱上界 $s(A+B)$ 定义为 $s(A+B)=\inf\left\{\omega\in\mathrm{R}\,\middle|\,(\omega,\infty)\subseteq\rho(A+B)\right\}$。

定义 2. 若算子 $A+B$ 是半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，则增长界 $\omega(A+B)$ 定义为，

$$\omega(A+B)=\inf\left\{\omega\in\mathrm{R}\,\middle|\,\exists S\geq 1,\text{对}\forall t\geq 0,\text{有}\|T(t)\|\leq S\mathrm{e}^{\omega t}\right\}$$

定义 3. 设集合 C 为集合 E 的子集，若对任意的 $f\in E$，存在 $g\in C$，使得 $f\leq g$，则称 C 在 E 中共尾。

定理 1. $D(A+B)$ 在 X 中稠密。

证明：$L=\left\{\left(P_0,P_1(x),P_2(x),P_3(x),P_4(x),P_M(x),P_N(x)\right)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,P_j(x)\in C_0^\infty(\mathrm{R}_+),\text{且存在常数}c_j\right.$
$\left.\text{使得}P_j(x)=0,x\in\left[0,c_j\right],j=1,2,3,4,M,N\right\}$。

根据文献[4]知 L 在 X 中稠密。故只需证明 $D(A)$ 在 X 中稠密即可。

取 $P\in L$，则存在 c_j 使得 $P_j(x)=0,\ x\in\left[0,c_j\right],\ j=1,2,3,4,M,N$。令 $0<2s<\min\left\{c_i,c_M,c_N,i=1,2,3,4\right\}$，那么当 $x\in[0,2s]$ 时，有 $P_j(x)=0,\ j=1,2,3,4,M,N$。

根据文献[5]，令

$$f^s(0)=\left(P_0, f_1^s(0), f_2^s(0), f_3^s(0), f_4^s(0), f_M^s(0), f_N^s(0)\right)^{\mathrm{T}}$$

$$f^s(x)=\left(P_0, f_1^s(x), f_2^s(x), f_3^s(x), f_4^s(x), f_M^s(x), f_N^s(x)\right)^{\mathrm{T}}$$

其中：

$$f_j^s(x)=\begin{cases} f_j^s(0)\left(1-\dfrac{x}{s}\right)^2, & x\in[0,s] \\ \mu_j(x-s)^2(x-2s)^2, & x\in[s,2s] \\ P_j(x), & x\in[2s,\infty) \end{cases}$$

此处，

$$\mu_j=\frac{f_j^s(0)\int_0^s \mu_j(x)\left(1-\dfrac{x}{s}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_s^{2s}\mu_j(x)(x-s)^2(x-2s)^2\mathrm{d}x}$$

易证 $f^s(x)\in D(A)$ 且

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{P}-f^s(x)\right\| \\
&=\sum_{i=1}^{4}\int_0^\infty\left|P_i(x)-f_i^s(x)\right|\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left|P_M(x)-f_M^s(x)\right|\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left|P_N(x)-f_N^s(x)\right|\mathrm{d}x \\
&=\sum_{i=1}^{4}\left(\int_0^s\left|f_i^s(0)\right|\left(1-\frac{x}{s}\right)^2\mathrm{d}x+\int_s^{2s}|\mu_i|(x-s)^2(x-2s)^2\mathrm{d}x\right)+\left(\int_0^s\left|f_M^S(0)\right|\left(1-\frac{x}{s}\right)^2\mathrm{d}x\right. \\
&\quad\left.+\int_s^{2s}|\mu_M|(x-s)^2(x-2s)^2\mathrm{d}x\right)+\left(\int_0^s\left|f_N^s(0)\right|\left(1-\frac{x}{s}\right)^2\mathrm{d}x+\int_s^{2s}|\mu_N|(x-s)^2(x-2s)^2\mathrm{d}x\right) \\
&=\sum_{i=1}^{4}\left(\left|f_i^s(0)\right|\frac{s}{3}+|\mu_i|\frac{s^5}{30}\right)+\left(\left|f_M^s(0)\right|\frac{s}{3}+|\mu_M|\frac{s^5}{30}\right)+\left(\left|f_N^s(0)\right|\frac{s}{3}+|\mu_N|\frac{s^5}{30}\right)\to 0\quad(s\to 0)
\end{aligned}$$

故 $D(A)$ 在 L 中稠密，故 $D(A)$ 在 X 中稠密。又由于 $D(B)=X$，故 $D(A+B)$ 在 X 中稠密。

定理 2. 系统算子 $A+B$ 为预解正算子。

证明：首先证明 A 为预解正算子。对任意的 $\boldsymbol{Y}\in X$，考虑算子方程 $(rI-A)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Y}$，即

$$(r+\mu_0)P_0=y_0 \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}+\left(r+\mu_i(x)\right)P_i(x)=y_i(x),\ i=1,2,3,4 \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_M(x)}{\mathrm{d}x}+\left(r+\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right)P_M(x)=y_M(x) \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}+\left(r+\mu_N(x)\right)P_N(x)=y_N(x) \tag{12}$$

解之得：

$$P_0=\frac{y_0}{r+\mu_0} \tag{13}$$

$$P_i(x)=P_i(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x[r+\mu_i(\xi)]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x y_i(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x[r+\mu_i(\xi)]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s \tag{14}$$

$$P_M(x)=P_M(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x y_M(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s \tag{15}$$

$$P_N(x)=P_N(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x[r+\mu_N(\xi)]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x y_N(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x[r+\mu_N(\xi)]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s \tag{16}$$

故有，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{P}\|&=|P_0|+\sum_{i=1}^4\|P_i(x)\|+\|P_M(x)\|+\|P_N(x)\|\\&=\left|\frac{y_0}{r+\mu_0}\right|+\sum_{i=1}^4\int_0^\infty\left|P_i(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x[r+\mu_i(\xi)]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_s^x[r+\mu_i(\xi)]\mathrm{d}\xi}y_i(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^\infty\left|P_M(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_s^x\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}y_M(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^\infty\left|P_N(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x[r+\mu_N(\xi)]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_s^x[r+\mu_N(\xi)]\mathrm{d}\xi}y_N(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当 $r>0$ 时，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{P}|\le\frac{1}{r}|y_0|&+\sum_{i=1}^4\left(\int_0^\infty|P_i(0)|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-r(x-s)}|y_i(s)|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\right)\\&+\int_0^\infty|P_M(0)|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-r(x-s)}|y_M(s)|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\\&+\int_0^\infty|P_N(0)|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x+\int_0^\infty\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-r(x-s)}|y_N(s)|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中，

$$\int_0^\infty|P_1(0)|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left|\int_0^\infty P_M(s)\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x$$

考虑 $\int_0^\infty\left|\int_0^\infty P_M(s)\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x$，将(15)带入得：

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\left|\int_0^\infty P_M(s)\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\left(P_M(0)\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}+\int_0^s\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}y_M(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\&\le\int_0^\infty\left(\int_0^\infty|P_M(0)|\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(\int_0^s\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}|y_M(\tau)|\mathrm{d}\tau\right)\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\right)=-\left(r+\mu_M(s)\right)\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}-\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(s)\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}$$

故

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left|P_M(0)\right|\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&\le\left|y_0\right|\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&=\left|y_0\right|\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&\quad-\left|y_0\right|\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(r+\mu_M(s)+\sum_{i=2}^4\mu_{M_i}(s)\right)\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&\le\left|y_0\right|\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\mathrm{e}^{-\int_0^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&=\left|y_0\right|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x=\frac{1}{r}\left|y_0\right|
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\right)\\
&=-\left(r+\mu_M(s)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}-\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(s)\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(\int_0^s\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\left|y_M(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\right)\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left|y_M(\tau)\right|\left(\int_\tau^\infty\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mu_{M_1}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left|y_M(\tau)\right|\left(\int_\tau^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left|y_M(\tau)\right|\left(\int_\tau^\infty\left(r+\mu_M(s)+\sum_{i=2}^4\mu_{M_i}(s)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&\le\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left|y_M(\tau)\right|\left(\int_\tau^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\mathrm{e}^{-\int_\tau^s\left[r+\mu_M(\xi)+\sum_{i=1}^4\mu_{M_i}(\xi)\right]\mathrm{d}\xi}\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^\infty\left|y_M(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\int_0^\infty\mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x=\frac{1}{r}\left\|y_M(s)\right\|
\end{aligned}
$$

考虑

$$
\int_0^\infty\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-r(x-s)}\left|y_1(s)\right|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left|y_1(s)\right|\left(\int_s^\infty\mathrm{e}^{-r(x-s)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{r}\left\|y_1(s)\right\|
$$

所以

$$\left\|P_1(x)\right\| \le \frac{1}{r}\left[\left|y_0\right| + \left\|y_1(s)\right\| + \left\|y_M(s)\right\|\right]$$

同理

$$\left\|P_i(x)\right\| \le \frac{1}{r}\left[\left|y_0\right| + \left\|y_i(s)\right\| + \left\|y_M(s)\right\|\right]$$

$$\left\|P_M(x)\right\| \le \frac{1}{r}\left[\left|y_0\right| + \left\|y_M(s)\right\|\right]$$

$$\left\|P_N(x)\right\| \le \frac{1}{r}\left[\left|y_0\right| + \left\|y_M(s)\right\| + \left\|y_N(s)\right\|\right]$$

故整理得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{P}\| &= \left|P_0\right| + \sum_{i=1}^{4}\left\|P_i(x)\right\| + \left\|P_M(x)\right\| + \left\|P_N(x)\right\| \\ &\le \frac{7}{r}\left|y_0\right| + \frac{1}{r}\left\|y_1(x)\right\| + \frac{1}{r}\left\|y_2(x)\right\| + \frac{1}{r}\left\|y_3(x)\right\| + \frac{1}{r}\left\|y_4(x)\right\| + \frac{6}{r}\left\|y_M(x)\right\| + \frac{1}{r}\left\|y_N(x)\right\| \\ &\le \frac{7}{r}\|\boldsymbol{Y}\|\end{aligned}$$

故当 $r>0$ 时，$(rI-A)^{-1}$ 存在，且 $\left\|(rI-A)^{-1}\right\| \le \frac{7}{r}$。由 $\boldsymbol{Y}$ 的任意性可知，$rI-A$ 为满射。所以 $(0,\infty)\subset\rho(A)$，A 为预解正算子。再由 B 的表达式知，B 为正算子，且

$$B \le \sup\left\{\int_0^\infty \mu_{F_i}(x)\mathrm{d}x, \int_0^\infty \mu_N(x)\mathrm{d}x, i=1,2,3,4\right\} = G$$

故当 $r>7G$ 时，

$$\left\|(rI-A)^{-1}B\right\| \le \left\|(rI-A)^{-1}\right\|\|B\| \le \frac{7M}{r} < 1$$

由文献[6]定理“设 $A\in C^{n\times n}$，若 $\|A\|\le 1$，则 $I-A$ 为非奇异矩阵，且 $\left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \left(1-\|A\|\right)^{-1}$”，知 $I-(rI-A)^{-1}B$ 可逆，且 $\left\|\left[I-(rI-A)^{-1}B\right]^{-1}\right\| \le \left[1-\left\|(rI-A)^{-1}B\right\|\right]^{-1}$，即 $\left[I-(rI-A)^{-1}B\right]^{-1}$ 有界，其中 $r>7G$。

因

$$\left[I-(rI-A)^{-1}B\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(rI-A)^{-1}B\right]^k$$

且 A 为预解正算子，B 为正算子，故 $\left[I-(rI-A)^{-1}B\right]^{-1}$ 也为正算子。而

$$\begin{aligned}\left[rI-(A+B)\right]^{-1} &= \left[(rI-A)-(rI-A)(rI-A)^{-1}B\right]^{-1} \\ &= \left\{(rI-A)\left[I-(rI-A)^{-1}B\right]\right\}^{-1} \\ &= \left[I-(rI-A)^{-1}B\right]^{-1}(rI-A)^{-1}\end{aligned}$$

所以当 $r>7G$ 时，$\left[rI-(A+B)\right]^{-1}$ 为正算子，即 $A+B$ 为预解正算子。

定理 3. 算子 $A+B$ 的对偶算子 $(A+B)^*$， $\boldsymbol{Q}=(Q_0,Q_1(x),Q_2(x),Q_3(x),Q_4(x),Q_M(x),Q_N(x))$

$$(A+B)^*\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \mu_0 Q_M(0)-\mu_0 Q_0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_1(x)\right)Q_1(x)+\mu_1(x)Q_0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_2(x)\right)Q_2(x)+\mu_2(x)Q_0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_3(x)\right)Q_3(x)+\mu_3(x)Q_0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_4(x)\right)Q_4(x)+\mu_4(x)Q_0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_M(x)-\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right)Q_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)Q_i(0)+\mu_M(x)Q_N(0) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu_N(x)\right)Q_N(x)+\mu_N(x)Q_0 \end{bmatrix}$$

$$D(A+B)^*=\left\{\boldsymbol{Q}\in X^*\,\middle|\,Q_j(x)\text{绝对连续且}Q_j(x),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_j(x)\in L^\infty(\mathrm{R}_+),\ j=1,2,3,4,M,N\right\}$$

证明：任给 $\boldsymbol{P}\in D(A)$ 和 $\boldsymbol{Q}\in D(A+B)^*$，有

$$\begin{aligned}
\langle (A+B)\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\rangle &= \left\{-\mu_0 P_0+\sum_{i=1}^{4}\int_0^\infty \mu_i(x)P_i(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty \mu_N(x)P_N(x)\mathrm{d}x\right\}Q_0 \\
&\quad +\sum_{i=1}^{4}\int_0^\infty\left\{-\frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}-\mu_i(x)P_i(x)\right\}Q_i(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty\left\{-\frac{\mathrm{d}P_M(x)}{\mathrm{d}x}-\left(\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right)P_M(x)\right\}Q_M(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty\left\{-\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}-\mu_N(x)P_N(x)\right\}Q_N(x)\mathrm{d}x \\
&= -\mu_0 P_0 Q_0+\int_0^\infty \mu_1(x)P_1(x)\mathrm{d}xQ_0+\int_0^\infty \mu_2(x)P_2(x)\mathrm{d}xQ_0 \\
&\quad +\int_0^\infty \mu_3(x)P_3(x)\mathrm{d}xQ_0+\int_0^\infty \mu_4(x)P_4(x)\mathrm{d}xQ_0+\int_0^\infty \mu_N(x)P_N(x)\mathrm{d}xQ_0 \\
&\quad +\int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x}Q_1(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty \mu_1(x)P_1(x)Q_1(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}P_2(x)}{\mathrm{d}x}Q_2(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty \mu_2(x)P_2(x)Q_2(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}P_3(x)}{\mathrm{d}x}Q_3(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty \mu_3(x)P_3(x)Q_3(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}P_4(x)}{\mathrm{d}x}Q_4(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty \mu_4(x)P_4(x)Q_4(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}P_M(x)}{\mathrm{d}x}Q_M(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty\left[\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right]P_M(x)Q_M(x)\mathrm{d}x \\
&\quad +\int_0^\infty -\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}Q_N(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty \mu_N(x)P_N(x)Q_N(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^\infty -\frac{dP_i(x)}{dx}Q_i(x)dx = -Q_i(x)P_i(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dQ_i(x)}{dx}P_i(x)dx$$
$$= Q_i(0)P_i(0) + \int_0^\infty \frac{dQ_i(x)}{dx}P_i(x)dx$$
$$= \int_0^\infty \mu_{M_i}(x)P_M(x)dxQ_i(0) + \int_0^\infty \frac{dQ_i(x)}{dx}P_i(x)dx,\ i = 1,2,3,4$$

同理

$$\int_0^\infty -\frac{dP_M(x)}{dx}Q_M(x)dx = \mu_0 P_0 Q_M(0) + \int_0^\infty \frac{dQ_M(x)}{dx}P_M(x)dx$$
$$\int_0^\infty -\frac{dP_N(x)}{dx}Q_N(x)dx = \int_0^\infty \mu_M(x)P_M(x)dxQ_N(0) + \int_0^\infty \frac{dQ_N(x)}{dx}P_N(x)dx$$

所以

$$\begin{aligned}
\langle (A+B)\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\rangle &= -\mu_0 Q_0 P_0 + \int_0^\infty \mu_1(x)Q_0P_1(x)dx + \int_0^\infty \mu_2(x)Q_0P_2(x)dx \\
&+ \int_0^\infty \mu_3(x)Q_0P_3(x)dx + \int_0^\infty \mu_4(x)Q_0P_4(x)dx + \int_0^\infty \mu_N(x)Q_0P_N(x)dx \\
&+ \int_0^\infty \mu_{M_1}(x)Q_1(0)P_M(x)dx + \int_0^\infty \frac{dQ_1(x)}{dx}P_1(x)dx - \int_0^\infty \mu_1(x)Q_1(x)P_1(x)dx \\
&+ \int_0^\infty \mu_{M_2}(x)Q_2(0)P_M(x)dx + \int_0^\infty \frac{dQ_2(x)}{dx}P_2(x)dx - \int_0^\infty \mu_2(x)Q_2(x)P_2(x)dx \\
&+ \int_0^\infty \mu_{M_3}(x)Q_3(0)P_M(x)dx + \int_0^\infty \frac{dQ_3(x)}{dx}P_3(x)dx - \int_0^\infty \mu_3(x)Q_3(x)P_3(x)dx \\
&+ \int_0^\infty \mu_{M_4}(x)Q_4(0)P_M(x)dx + \int_0^\infty \frac{dQ_4(x)}{dx}P_4(x)dx - \int_0^\infty \mu_4(x)Q_4(x)P_4(x)dx \\
&+ \mu_0 Q_M(0)P_0 + \int_0^\infty \frac{dQ_M(x)}{dx}P_M(x)dx - \int_0^\infty \left[\mu_M(x) + \sum_{i=1}^4 \mu_{M_i}(x)\right]Q_M(x)P_M(x)dx \\
&+ \int_0^\infty \mu_M(x)Q_N(0)P_M(x)dx + \int_0^\infty \frac{dQ_N(x)}{dx}P_N(x)dx - \int_0^\infty \mu_N(x)Q_N(x)P_N(x)dx \\
&= \left(\mu_0 Q_M(0) - \mu_0 Q_0\right)P_0 + \int_0^\infty P_1(x)\left(\frac{dQ_1(x)}{dx} - \mu_1(x)Q_1(x) + \mu_1(x)Q_0\right)dx \\
&+ \int_0^\infty P_2(x)\left(\frac{dQ_2(x)}{dx} - \mu_2(x)Q_2(x) + \mu_2(x)Q_0\right)dx \\
&+ \int_0^\infty P_3(x)\left(\frac{dQ_3(x)}{dx} - \mu_3(x)Q_3(x) + \mu_3(x)Q_0\right)dx \\
&+ \int_0^\infty P_4(x)\left(\frac{dQ_4(x)}{dx} - \mu_4(x)Q_4(x) + \mu_4(x)Q_0\right)dx \\
&+ \int_0^\infty P_M(x)\left[\frac{dQ_M(x)}{dx} - \left(\mu_M(x) + \sum_{i=1}^4 \mu_{M_i}(x)\right)Q_M(x)\right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^4 \mu_{M_i}(x)Q_i(0) + \mu_M(x)Q_N(0)\right]dx \\
&+ \int_0^\infty P_N(x)\left(\frac{dQ_N(x)}{dx} - \mu_N(x)Q_N(x) + \mu_N(x)Q_0\right)dx
\end{aligned}$$

显然

$$D(A+B)^{*}=\left\{\boldsymbol{Q}\in X^{*}\,\middle|\,Q_j(x)\text{绝对连续且}Q_j(x),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_j(x)\in L^{\infty}(\mathrm{R}_+),\ j=1,2,3,4,M,N\right\}$$

定理 4. $\omega(A+B)=0$

证明：将系统状态方程组(1)-(4)左右两边分别对 x 从 0 到 ∞ 积分并整理得：

$$\frac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu_0P_0(t)+\sum_{i=1}^{4}\int_0^{\infty}\mu_i(x)P_i(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\mu_N(x)P_N(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}P_i(x,t)}{\mathrm{d}t}=P_i(0,t)-\int_0^{\infty}\mu_i(x)P_i(x,t)\mathrm{d}x,\ i=1,2,3,4$$

$$\frac{\mathrm{d}P_M(x,t)}{\mathrm{d}t}=P_M(0,t)-\int_0^{\infty}\left(\mu_M(x)+\sum_{i=1}^{4}\mu_{M_i}(x)\right)P_M(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}P_N(x,t)}{\mathrm{d}t}=P_N(0,t)-\int_0^{\infty}\mu_N(x)P_N(x,t)\mathrm{d}x$$

将边值条件(5)-(7)代入上面方程组，并将等式左右相加，可得 $\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{P}\|}{\mathrm{d}t}=0$。故方程组所对应的半群是非扩张半群。根据初值条件(8)式，知 $\|T(t)\|=1$。故半群的增长界 $\omega(A+B)=0$。

定理 5. $s(A+B)=0$

证明：由前文知，

$$X=\left\{\boldsymbol{P}\,\middle|\,P_0\in\mathrm{R};P_i(x),P_M(x),P_N(x)\in L^1(\mathrm{R}_+),\|\boldsymbol{P}\|=|P_0|+\sum_{i=1}^{4}\|P_i(x)\|+\|P_M(x)\|+\|P_N(x)\|\right\}$$

$$X^{*}=\left\{\boldsymbol{Q}\,\middle|\,Q_0\in\mathrm{R};Q_j(x)\in L^{\infty}(\mathrm{R}_+),\|\boldsymbol{Q}\|=\max\left\{|Q_0|,\|Q_j(x)\|,\ j=1,2,3,4,M,N\right\}\right\}$$

$$X_+^{*}=\left\{\boldsymbol{Q}\in X^{*}\,\middle|\,Q_0\ge 0;Q_j(x)\ge 0,\ j=1,2,3,4,M,N\right\}$$

任取

$$\boldsymbol{f}=\left(f_0,f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x),f_M(x),f_N(x)\right)^{\mathrm{T}}\in X_+^{*}$$

则

$$\|\boldsymbol{f}\|=\max\left\{|f_0|,\|f_i(x)\|_{L^1(\mathrm{R}_+)},\|f_M(x)\|_{L^1(\mathrm{R}_+)},\|f_N(x)\|_{L^1(\mathrm{R}_+)}\right\}$$

因此

$$\|\boldsymbol{f}\|\ge|f_0|,\|\boldsymbol{f}\|\ge f_i(x),\|\boldsymbol{f}\|\ge f_M(x),\|\boldsymbol{f}\|\ge f_N(x),x\ge 0$$

又因为 $1(x)\in L^{\infty}(\mathrm{R}_+)$，且 $1(x)$ 绝对连续，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1(x)\in L^{\infty}(\mathrm{R}_+)$，故存在

$$\boldsymbol{g}=\left(\|\boldsymbol{f}\|,\|\boldsymbol{f}\|1(x),\|\boldsymbol{f}\|1(x),\|\boldsymbol{f}\|1(x),\|\boldsymbol{f}\|1(x),\|\boldsymbol{f}\|1(x),\|\boldsymbol{f}\|1(x)\right)^{\mathrm{T}}\in D\left((A+B)^{*}\right)_+$$

故 $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\ge 0$，即 $\boldsymbol{f}\le\boldsymbol{g}$。所以对任意 $\boldsymbol{f}\in X_+^{*}$，存在 $\boldsymbol{g}\in D\left((A+B)^{*}\right)_+$，使得 $\boldsymbol{f}\le\boldsymbol{g}$。所以 $D\left((A+B)^{*}\right)_+$ 在 X_+^{*} 中共尾。又因为 $A+B$ 为稠密的预解正算子，根据[7]中定理 2.2 知，$s(A+B)=\omega(A+B)=0$。

4. 结论

具有优化调整状态的供应链系统是一个边界带有积分的复杂的数学模型。本文运用补充变量法建立了此模型的微积分方程组，通过对系统的合理假设及相关理论得到了抽象 Cauchy 问题，并对系统算子的性质进行了深入的研究，这为优化调整状态的供应链系统的后续研究奠定了基础。

参考文献 (References)

[1] 辛玉红, 郑爱华, 胡薇薇. 一个供应链系统的可靠性模型的适定性分析[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(1): 46-52.

[2] 辛玉红, 朱铁丹, 史祎馨. 基于可靠性的企业优化模型[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3): 67-72.

[3] 郭丽娜, 王鲜霞, 任杨莉. 一类具有优化调整状态的供应链系统的稳定性分析[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(12): 107-111.

[4] 匡继昌. 实分析与泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[5] Gupur, G., Li, X.Z. and Zhu, G.T. (2001) Functional Analysis Method in Queueing Theory. Research Information, Hertfordshire.

[6] 方保砚, 周继东, 李医民. 矩阵论[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013.

[7] Arendt, W. (1987) Resolvent Positive Operators. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **54**, 321-349. https://doi.org/10.1112/plms/s3-54.2.321