Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 426-430
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84056

Hans汉斯

On the Krasnoselskii-Type Fixed Point of Set-Valued Mapping

Guangjun Qu

School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, Hanzhong Shaanxi
Email: quguangjun1229@163.com

Received: Jun. 27th, 2018; accepted: Jul. 12th, 2018; published: Jul. 19th, 2018

Abstract

Using E. Zeidler fixed point theorem, the fixed point of the operator $A + B$ has been obtained, where A is from a single value mapping to a set-valued mapping.

Keywords

Set-Valued Mapping, Fixed Point

集值映射的Krasnoselskii型不动点

曲广军

陕西理工大学数学与计算机科学学院，陕西 汉中
Email: quguangjun1229@163.com

收稿日期：2018年6月27日；录用日期：2018年7月12日；发布日期：2018年7月19日

摘 要

利用E. Zeidler不动点定理，证明了将Krasnoselskii不动点定理中的单值映射A推广到集值映射的情况下算子$A + B$的不动点的存在性。

关键词

集值映射，不动点

文章引用：曲广军. 集值映射的 Krasnoselskii 型不动点[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 426-430.
DOI: 10.12677/pm.2018.84056

1. 引言

Krasnoselskii 不动点定理：

若 M 是 Banach 空间 X 的一个非空闭凸子集， $A:M\to X,B:M\to X$ ，且满足：

1) A 连续且是紧的；

2) B 是压缩映射；

3) $\forall x,y\in M, Ax+By\in M$ 。

则存在 $x\in M$ ，使得 $Ax+Bx=x$ 。

此定理主要用于研究带扰动的方程的不动点的存在性，还用于求解非线性积分方程，其结果在非线性领域有很广泛的应用。

对此定理的改进主要是在确保前提的条件下，改进条件(1)，(2)和(3)，具体的改进可见文献[1] [2] [3] [4]。在文献[4]中印度学者 Dhage 用以下条件取代了条件(1)：在 E 上，A 是一个有界非线性算子，且 A^p 是一个非线性压缩算子， $p\in N$ 。在文献[5]中，作者用 A 是半压缩和非扩张算子替代条件(1)，并将 B 的紧性进一步放宽，得到了一系列新的结果，很大程度上推广了 Krasnoselskii 不动点定理。

本文在上述定理的基础上将 A 改进为集值映射，给出了算子 $A+B$ 的不动点。

2. 预备知识

定义 1 [6]：设 X,Y 是两个集合，T 是一种对应法则，如果每一个 $x\in X$ ，通过 T 有 Y 的一个子集与之对应，则称 T 是 X 到 Y 的一个集值映射。

定义 2 [1]：如果 $\bigcup_{x\in X} Tx$ 是相对紧的(关于 Y 而言)，则称 T 是紧的。如果对任意 $x\in X$ ，有 $Tx\subset Y$ 是闭的，则称 T 是闭值的。

定义 3 [1]：设 X 是 Banach 空间，对任意的 $M\subset X$ ，$P(M)=\{N,N\subset M,N\neq\varnothing\}$ ， $F:M\to P(X)$ 。若对任意的闭集 $B\subset X$ ， $F^{-1}(B)=\{x\in X:F(x)\cap B\neq\varnothing\}$ 是 M 中的闭集，则称 $F(x)$ 上半连续；。若对任意的闭集 $B\subset X$ ， $F^{-1}(B)=\{x\in X:F(x)\subseteq B\}$ 是 M 中的闭集，则称 $F(x)$ 下半连续。

定义 4 [6]：对任意的拓扑空间 X，集合 $C(X)$ 表示 X 的所有紧子集。

定义 5 [6]：设 $X\to P_0(Y)$ 是一个集值映射，那么称集合

$$graph(F)=\{(x,y)\in X\times Y:y\in F(x)\}$$

为集值映射 F 的图。如果 $graph(F)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，则称集值映射 F 是闭的。由此定义，对 $\forall(x_\alpha,y_\alpha)\in graph(F)$，$(x_\alpha,y_\alpha)\to(x,y)$，必有 $(x,y)\in graph(F)$，即 $\forall x_\alpha\to x,\forall y_\alpha\in F(x_\alpha),y_\alpha\to y$，必有 $y\in F(x)$ 。

3. 主要结果及其证明

定理 1 [6]：如果集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 是闭的，则 $\forall x\in X,F(x)$ 是闭的。

定理 2 [6]：设 X,Y,Z 是 Housdorff 拓扑空间， $F:X\to P_0(Y)$ 和 $G:Y\to P_0(Z)$ 是两个集值映射，如果 F 在 X 上是上半连续的，G 在 Y 上是上半连续的，则复合映射 $GF:X\to P_0(Z)$ 在 X 上是上半连续的。

定理 3 [1]：设 M 是一 Banach 空间，M 是 X 的一个非空闭凸子集。$F:M\to P(M)$ 是一个集值映射。假设 F 满足以下条件：

(f1) $F(M)$ 是一相对紧集；

(f2) F 在 M 是上半连续的；

(f3) 集合 $F(x)$ 是非空闭凸集。

那么，存在 $x\in M$，使得 $x\in F(x)$。

定理 4 若 M 是 Banach 空间，X 是非空有界闭凸集，$A:M\to P(M)$ 是一个集值映射，$B:M\to X$ 是单值映射。若满足以下条件：

(i) $A(M)$ 是一个相对紧集；

(ii) A 在 M 上是上半连续的；

(iii) B 是一个压缩映射，且 $Ax+Bx\in M$，$\forall x\in M$；

(iv) 集合 $A(x)$ 是非空闭集，且 $\forall y\in M$，$\{x\in M:(I-B)x\in Ay\}$ 是一个凸集。

则存在 $x\in M$，使得 $x\in Ax+Bx$。

证明：任取 $y\in M$，考虑 $Tx=Bx+y$。由于 B 是压缩映射，则 $T:M\to X$ 是压缩映射。由 Banach 压缩映像原理，T 在 M 中存在唯一的不动点 x_0，使得 $x_0=Bx_0+y$，$x_0\in M$。

即 $(I-B)x_0=y$，所以 $I-B$ 是可逆的。

下证 $(I-B)^{-1}$ 是连续的。

令 $(I-B)^{-1}x_n=y_n$，$(I-B)^{-1}x=y$，即证明 $y_n\to y$。

由

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=\|(I-B)y_n-(I-B)y\|\geq\|y_n-y\|-\|By_n-By\|\\&\geq\|y_n-y\|-k\|y_n-y\|=(1-k)\|y_n-y\|\end{aligned},$$

因为 $x_n\to x$，$y_n\to y$，可得 $(I-B)^{-1}$ 是连续的。

构造复合映射：$F=(I-B)^{-1}A$：

由(i)可得，$F(M)$ 是一个相对紧集。

由(ii)可知，A 是上半连续的，上证 $(I-B)^{-1}$ 是连续的，所以由定理 2 可知 F 是上半连续的。

由(iv)，对任意的 $x\in M$，$F(x)$ 是非空闭凸的。

所以由定理 3，存在 $x\in M$，使得 $x\in F(x)$，即 $x\in Ax+Bx$。

定理 5 若 M 是 Banacha 空间，X 是非空有界闭凸集，$A:M\to P(M)$ 是一个集值映射且是闭值的，$B:M\to X$ 是连续单值映射。若满足以下条件：

(a) $A(M)\subset(I-B)(M)$；

(b) $A(M)$ 包含在 M 的一个紧子集里面；

(c) 如果 $(I-B)x_n\to y$，那么存在 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$；

(d) $\forall y\in M,\{x\in M:(I-B)x\in Ay\}$ 是一个凸集。

那么，存在 $y\in M$，使得 $y\in Ay+By$。

证明：若 $I-B$ 是可逆的：

由(c)可得，$(I-B)^{-1}$ 是连续的，下面给出证明。

要证明 $(I-B)^{-1}$ 是连续的，只要证明当 $y_n\to y_0$ 时，$(I-B)^{-1}y_n\to(I-B)^{-1}y_0$。

令 $x_n=(I-B)^{-1}y_n$，$x_0=(I-B)^{-1}y_0$，则有 $(I-B)x_n\to(I-B)x_0$。

任取 $\{x_{n'}\}$，只要证明存在 $\{x_{n'_n}\}\to x_0$ 就可以了。

因为 $x_n'=(I-B)^{-1}y_n'$，即 $(I-B)x_n'=y_n'$，$(I-B)x_n'\to y_0$，由(c)，存在 $\{x_{n_k'}\}\to x_1$。

下证 $x_1=x_0$，由于 $(I-B)\{x_{n_k'}\}=(I-B)x_1$，又 $(I-B)\{x_{n_k'}\}\to y_0=(I-B)x_0$，所以 $x_1=x_0$，即证 $(I-B)^{-1}$ 是连续的。

对任意 $y\in M$，构造复合映射：$F:(I-B)^{-1}A$：

由(a)可知，$F:M\to M$。由定理 1 可知，存在 $y\in M$，使得 $y\in Ay+By$。

若 $I-B$ 不是可逆的。

下面验证满足定理 3 的条件。

① $F(x)$ 是凸集(由(d)可得)。

② 验证 F 是图闭的。

即证明当 $x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ 时，$y_0\in F(x_0)$。

因为 $y_n\in F(x_n)$，即 $y_n\in(I-B)^{-1}Ax_n$，那么一定存在 $x_n'\in Ax_n$，使得 $(I-B)y_n=x_n'$。

由(b)可得，$\{x_n'\}$ 存在收敛子列 $x_{n_k}'\to x_0'$，所以存在 y_{n_k}，使得 $(I-B)y_{n_k}=x_{n_k}'$。

两边同时取极限可得

$(I-B)y_0=x_0'$ 且 $(I-B)y_0=x_0'\in A(x_0)$，

即 $y_0\in(I-B)^{-1}Ax_0$ (因为 A 是闭值的)，所以 F 在 M 上是图闭的。

③ 验证 $F(x)$ 是闭值的。

由(b)知 F 是图闭的，由定理 1 可知，$\forall x\in M$，$F(x)$ 是闭值的。

④ 验证 $F(M)$ 是相对紧集。

要验证 $F(M)$ 是相对紧集，即验证 $\forall y_n\in F(M)$，都有收敛子列。

对 $\{y_n\}$，存在 $\{x_n\}$，使得 $y_n\in(I-B)^{-1}Ax_n$，那么一定存在 $x_n'\in Ax_n$，使得 $(I-B)y_n=x_n'$。因为 $A(M)$ 包含在 M 的一个紧子集里面，所以存在收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$，$x_{n_k}'\to u$，即存在 y_{n_k}，使得 $(I-B)y_{n_k}=x_{n_k}'\to u$

由(c)可知，$\{y_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}'\}$。

⑤ 验证 F 是上半连续的。

即对任意的闭集 $B\subset M$，$F^{-1}(B)=\{x\in M:F(x)\cap B\neq\varnothing\}$ 是 M 中的闭集。

任选 $\{y_n\}\in F^{-1}(B)$，$y_n\to y_0$，验证 $y_0\in F^{-1}(B)$ 就可以了。

对 $\{y_n\}\in F^{-1}(B)$，存在：

$x_n\in F(y_n)\cap B\subset F(y_n)\subset F(M)$ ($F(M)$ 是相对紧集)。

此时 x_n 有收敛子列 $x_{n_k}\to x_0$ ($x_0\in M, M$ 是闭集)。

所以必存在 $y_n'\in Ay_n$，使得 $(I-B)x_n=y_n'$，即 $(I-B)x_{n_k}=y_{n_k}'$。

两边同时取极限，即 $(I-B)x_0=y_0'\in A(y_0)$。

所以 $x_0\in F(y_0)\cap B$，即 $y_0\in F^{-1}(B)$，所以 F 是上半连续的。

由定理 3 可知，存在 $y\in M$，使得 $y\in Ay+By$。

基金项目

陕西省教育厅科研基金项目(17JK0145)；校级科研项目(SLGKY16-02)。

参考文献

[1] Liu, Y.C. and Li, Z.X. (2008) Kraasnolelskii Fixed Point Theorems and Applications. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**, 1213-1220. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-07-09190-3

[2] Burton, T. (1998) A Fixed-Point Theorem of Kraasnolelskii. *Applied Mathematics Letters*, **11**, 85-88. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(97)00138-9

[3] Ok, E.A. (2009) Fixed Set Theorems of Kraasnolelskii Type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137**, 511-518. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-08-09332-5

[4] Dhage, B.C. (2003) Remarks on Two Fixed-Point Theorems Involving the Sum and the Product of Two Operators. *Computers & Mathematics with Applications*, **46**, 1779-1785. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)90236-7

[5] Henry, D. (1981) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer-Verlag, Berlin-New York. https://doi.org/10.1007/BFb0089647

[6] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2007.