Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 542-545
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85071

Hans汉斯

The Synchronization of a Coupled Neuronal Network with Time Delay

Yanhong Zheng

College of Mathematics and Informatics & FJKLMAA, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian
Email: yaya-zyh@163.com

Received: Aug. 22nd, 2018; accepted: Sep. 6th, 2018; published: Sep. 13th, 2018

Abstract

The condition of synchronization in a coupled neuronal network with electrical synapse and time delay is studied in this paper. Based on the stability theory and matrix theory, a stability criterion for synchronization of coupled neuronal network with electrical synapse and time delay is proposed by using the Lyapunov-Krasovskii functional.

Keywords

Neuronal Network, Time Delay, Synchronization

一类具有时滞的耦合神经元系统的同步

郑艳红

福建师范大学数学与信息学院，福建省分析数学及应用重点实验室，福建 福州
Email: yaya-zyh@163.com

收稿日期：2018年8月22日；录用日期：2018年9月6日；发布日期：2018年9月13日

摘 要

本文研究具有时滞的电耦合神经元网络的同步条件。基于稳定性理论和矩阵理论，利用Lyapunov-Krasovskii泛函，提出了一个具有时滞的对称电突触耦合的神经元网络达到同步的稳定性准则。

关键词

神经元网络，时滞，同步

文章引用: 郑艳红. 一类具有时滞的耦合神经元系统的同步[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 542-545.
DOI: 10.12677/pm.2018.85071

1. 引言

生理实验已经表明在一些动物(如猫、猴子)的脑区里存在着神经元同步的发放模式。可见，在整个神经系统中，神经元对信息的反应是神经元集群共同完成的。另一方面，由于信号传输速度的有限性和递质释放的滞后，时滞是普遍存在的。由于时滞的出现，耦合神经元系统变成了无穷维动力系统，表现出丰富的非线性行为[1] [2] [3] [4] [5]。因此，理论上研究有时滞的耦合神经元系统的同步问题对理解现实神经元的同步是非常必要的，能进一步促进生理实验的发展。

随着非线性同步动力学理论的深入发展，人们关注耦合神经元网络的拓扑和耦合强度对神经元同步的影响，并已有一些极为重要的结果，这些结果对理解神经元生物信息的传递和加工具有重要的指导意义，但是对于有时滞的耦合神经元网络同步的条件从理论上研究仍然是一个关注的焦点[6] [7] [8] [9]。文献[8]研究时滞耦合的方程的同步稳定性，得到了一个网络同步的稳定性标准，表明这个网络的同步状态与网络的拓扑结构无关的。而对于具有时滞的一般复杂动力系统网络，文献[9]得到了耦合网络分别独立于和依赖于时滞的同步稳定性条件。由于网络的拓扑结构不同，因此不同电突触耦合神经元网络对神经元同步能力有不同的影响。本文我们对具有时滞的对称耦合的神经元网络进行研究，基于稳定性理论和矩阵理论，借鉴文献[9]的方法，利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函，提出了一个具有时滞的 N 个对称电突触耦合的神经元网络达到同步的稳定性准则。

2. 具有时滞的对称耦合神经元网络的同步

假设神经元经过时滞 τ 后接收到来自周围神经元的信号，则其动力模型可由下列微分系统给出：

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = f_1(X_i) + f(t) + g\sum\limits_{j=1, i\neq j}^{N} a_{ij}\left(x_{j1}(t-\tau) - x_{i1}(t)\right), \\ \dot{x}_{i2} = f_2(X_i), \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_{in} = f_n(X_i),\ i = 1,2,\cdots,N. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^{\mathrm{T}} \in R^{n\times 1}$ 是第 i 个耦合神经元的状态变量，x_{i1} 是膜电位，其它 $x_{j1}(j\geq 2)$ 用于描述离子通道动力学。外激励 $f(t)$ 是依赖时间的连续函数，$g>0$ 是耦合强度。耦合矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times m} = B + C \in R^{m\times m}$ 代表了 N 个耦合神经元相互的连接形式，如果第 i 个神经元连接到第 j 个神经元上，则 $a_{ij} = a_{ji} = 1$，否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$。这里 $m = N\times n$，

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_N \end{bmatrix}_{m\times m},\quad B_i = \begin{bmatrix} a_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n},\quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}_{m\times m},$$

$$C_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n},\quad C_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad (i,j = 1,\cdots,N, i\neq j).$$

根据神经元对称耗散连接的特性，矩阵 A 的一些性质可总结如下：

1) 矩阵 A 是一个对称的不可约的矩阵；

2) 矩阵 A 的非对角线元素，$a_{ij}(i \neq j)$ 取值是 1 或 0；

3) 矩阵 A 的元素满足

$$a_{ii} = -\sum_{j=1,i\neq j}^{N} a_{ij},\ i = 1,2,\cdots,N .$$

记

$$X = \left(X_1, X_2, \cdots, X_N\right)^{\mathrm{T}} \in R^{m\times 1},\quad F_i\left(X,t\right) = \left(f_1\left(X_i\right) + f\left(t\right), f_2\left(X_i\right), \cdots, f_n\left(X_i\right)\right) \in R^{1\times n},$$

$$F\left(X,t\right) = \left(F_1\left(X_1\right), F_2\left(X_2\right), \cdots, F_n\left(X_N\right)\right)^{\mathrm{T}} \in R^{m\times 1},\ i = 1,2,\cdots,N ,$$

则系统(1)可写为

$$\dot{X}\left(t\right) = F\left(X\left(t\right)\right) + gBX\left(t\right) + gCX\left(t-\tau\right) \tag{2}$$

下面我们将给出具有时滞的对称电耦合神经元网络同步稳定性的一个判别准则。首先我们给出耦合系统(2)同步的定义。

定义：如果耦合系统(2)的状态变量满足关系

$$X_1\left(t\right) = X_2\left(t\right) = \cdots = X_N\left(t\right) = s\left(t\right),\ t \to \infty , \tag{3}$$

则称耦合系统(**2**)达到同步状态，这里 $s(t)$ 是耦合强度 $g = 0$ 时系统(**2**) 中单个神经元的解。

定理 1：给定耦合系统(**2**)，如果存在 $g > 0$ 使得对所有的 $s(t)$，$\left(DF\left(s\left(t\right)\right)\right)^{\mathrm{T}} + DF\left(s\left(t\right)\right) + g\left(B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}\right)$ 是负定的，那么耦合系统(2)的同步状态(3)能达到，这里 $DF\left(s\left(t\right)\right)$ 是向量函数 $F\left(X\left(t\right)\right)$ 在同步流形 $s(t)$ 处的 Jacobi 矩阵。

证明：为了证明系统(2)的同步状态(3)的稳定性，我们引入微小的摄动 η_i，

令 $X_i = s\left(t\right) + \eta_i, i = 1,2,\cdots,N$，

在同步流形 $s(t)$ 处，线性化系统(2)，我们得出下面方程

$$\dot{\eta}\left(t\right) = \left[DF\left(s\left(t\right)\right)\right]\eta\left(t\right) + gB\eta\left(t\right) + gC\eta\left(t-\tau\right), \tag{4}$$

这里 $\eta = \left(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N\right)^{\mathrm{T}} \in R^{m\times 1}$，$DF\left(s\left(t\right)\right)$ 是向量函数 $F\left(X\left(t\right)\right)$ 在同步流形 $s(t)$ 处的 Jacobian 矩阵。引入 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $V\left(t\right) = \eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\eta\left(t\right) + g\int_{t-\tau}^{t}\eta^{\mathrm{T}}\left(\xi\right)\eta\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi$，则

$$\begin{aligned}
\dot{V}\left(t\right) &= \dot{\eta}^{\mathrm{T}}\left(t\right)\eta\left(t\right) + \eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\dot{\eta}\left(t\right) + g\left[\eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\eta\left(t\right) - \eta^{\mathrm{T}}\left(t-\tau\right)\eta\left(t-\tau\right)\right] \\
&= \left[\eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\left(DF\left(s\left(t\right)\right)\right)^{\mathrm{T}} + g\eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)B^{\mathrm{T}} + g\eta^{\mathrm{T}}\left(t-\tau\right)C^{\mathrm{T}}\right]\eta\left(t\right) \\
&\quad + \eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\left[DF\left(s\left(t\right)\right)\eta\left(t\right) + gB\eta\left(t\right) + gC\eta\left(t-\tau\right)\right] \\
&\quad + g\left[\eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\eta\left(t\right) - \eta^{\mathrm{T}}\left(t-\tau\right)\eta\left(t-\tau\right)\right] \\
&= \eta^{\mathrm{T}}\left(t\right)\left[\left(DF\left(s\left(t\right)\right)\right)^{\mathrm{T}} + DF\left(s\left(t\right)\right) + g(B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}\right]\eta\left(t\right) \\
&\quad - g\left[C^{\mathrm{T}}\eta\left(t\right) - \eta\left(t-\tau\right)\right]^{\mathrm{T}}\left[C^{\mathrm{T}}\eta - \eta\left(t-\tau\right)\right] \\
&< 0
\end{aligned}$$

由 Lyapunov-Krasovskii 定理[10]可知，系统(2)是渐近稳定的。证毕！

令 $M\left(s\left(t\right)\right) = DF\left(s\left(t\right)\right) = \left(m_{ij}\right)_{m\times m} \in R^{m\times m}$，则 $M\left(s\left(t\right)\right) = \left(M_{ii}\right)_{m\times m}$ 是对角块矩阵，且

$$M_{11} = M_{22} = \cdots = M_{NN} = DF_1\left(s(t)\right) \in R^{n\times n},$$

我们有下面推论：

推论 1：如果 $m_{1i} + m_{i1} = 0$，且 $\mu_i + g\lambda_i < 0, (i = 1, 2, \cdots, m)$，则系统(2)是渐近稳定的。这里 $\mu_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是矩阵 $M(s(t))$的特征值，$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是矩阵 $B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}$ 的特征值。

证明：因为矩阵 $B, I, C, M^{\mathrm{T}} + M$ 都是对称矩阵，故当 $m_{1i} + m_{i1} = 0$ 时，

$$\left(M^{\mathrm{T}} + M\right)\left(B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}\right) = \left(B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}\right)\left(M^{\mathrm{T}} + M\right)$$

这表明矩阵 $M^{\mathrm{T}} + M$ 与 $B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}$ 可交换，从而两矩阵可同步对角化，因此存在正交矩阵 Q，使得

$$Q\left[\left(M^{\mathrm{T}} + M\right) + g\left(B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}\right)\right]Q^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}\left(\mu_1 + g\lambda_1, \mu_2 + g\lambda_2, \cdots, \mu_m + g\lambda_m\right),$$

这里 $\mu_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是矩阵 $M(s(t))$的特征值，$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是矩阵 $B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}$ 的特征值。

由条件 $\mu_i + g\lambda_i < 0, (i = 1, 2, \cdots, m)$ 可知，$\left(M^{\mathrm{T}} + M\right) + g\left(B^{\mathrm{T}} + B + I + CC^{\mathrm{T}}\right)$ 是负定的，故根据定理 1 可知，系统(2)是渐近稳定的。证毕！

3. 结论

本文给出了判别有时滞对称电耦合神经元网络完全同步的一个充分条件，该条件独立于时滞。同时给出了利用矩阵特征值来判别有时滞对称耦合神经元系统同步的一个充分条件，该条件同样不依赖于时滞，但条件要求严格。

基金项目

国家自然科学基金(11672074)，福建省教育厅 JK 项目(JK2015007)和福建省自然科学基金 (2016J01003, 2018J01655)。

参考文献

[1] Dhamala, M., Jirsa, V. and Ding, M. (2004) Enhancement of Neural Synchrony by Time Delay. *Physical Review Letters*, **92**, 074104. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.074104

[2] Wang, Q.Y. and Lu, Q.S. (2005) Time Delay-Enhanced Synchronization and Regularization in Two Coupled Chaotic Neurons. *Chinese Physics Letters*, **22**, 543-546. https://doi.org/10.1088/0256-307X/22/3/007

[3] Kye, W., Choi, M., Kurdoglyan, M., *et al*. (2004) Synchronization of Chaotic Oscillators Due to Common Delay Time Modulation. *Physical Review E*, **70**, 046211. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.046211

[4] Rossoni, E., Chen, Y., Ding, M., *et al*. (2005) Stability of Synchronous Oscillations in a System of Hodgkin-Huxley Neurons with Delayed Diffusive and Pulsed Coupling. *Physical Review E*, **71**, 061904. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.061904

[5] Chen, J., Wong, K. and Shuai, J. (2002) Phase Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators with Time Delay. *Physical Review E*, **66**, 056203. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056203

[6] Cao, J. (1999) On Stability of Delayed Cellular Neural Networks. *Physics Letters A*, **261**, 303-308. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(99)00552-6

[7] Cao, J. (1999) Periodic Solutions and Exponential Stability in Delayed Cellular Neural Networks. *Physical Review E*, **60**, 3244. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.3244

[8] Li, C., Xu, H., Liao, X., *et al*. (2004) Synchronization in Small-World Oscillator Networks with Coupling Delays. *Physica A*, **335**, 359-364. https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.037

[9] Li, C. and Chen, G. (2004) Synchronization in General Complex Dynamical Networks with Coupling Delays. *Physica A*, **343**, 263-278. https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.05.058

[10] Hale, J. and Lunel, S. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org