Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(10), 1195-1200
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.910146

Hans汉斯

Exponential Stability of a Repairable System with Cold Storage Units in Series

Zhiguang Li, Wenzhi Yuan

Taiyuan Normal University, Yuci Shanxi
Email: 825955837@qq.com, ywzywz123@163.com

Received: Dec. 5th, 2019; accepted: Dec. 18th, 2019; published: Dec. 25th, 2019

Abstract

In this paper, the exponential stability of a cold storage series system is discussed. A mathematical model of repairable system is established by using stochastic process theory and supplementary variable method. The exponential stability of system operators is studied by using C_0 semigroup theory.

Keywords

Repairable System, Abstract Cauchy Problem, Exponential Stability

具有一个冷储备两单元串联可修复系统的指数性

李治光，原文志

太原师范学院数学系，山西 榆次
Email: 825955837@qq.com, ywzywz123@163.com

收稿日期：2019年12月5日；录用日期：2019年12月18日；发布日期：2019年12月25日

摘　要

本文论述具有一个冷储备串联系统的指数稳定性，运用随机过程理论和增补变量法建立了一个可修复系统的数学模型，利用C_0半群理论研究了系统算子的指数稳定性。

关键词

可修复系统，抽象Cauchy问题，指数稳定性

文章引用: 李治光, 原文志. 具有一个冷储备两单元串联可修复系统的指数性[J]. 理论数学, 2019, 9(10): 1195-1200.
DOI: 10.12677/pm.2019.910146

1. 引言

随着科学技术的发展，系统的可靠性、稳定性分析变得越来越重要。从数学的角度，对系统的稳定性进行定量和定性的分析，从而给出系统性能的判断，无论在实际上还是在理论上都具有很重要的意义。近代以来，可靠性理论得到了系统、规范的发展，显现得日益成熟，特别是一系列太空计划的实施，使得可靠性理论得到了更大推广，目前已经发展为一门独立的工程基础研究。

2. 系统模型的建立[1] [2] [3] [4] [5]

本文研究的是两个单元串联，且第二个单元具有冷储备单元的系统适定性。系统实际上有三个单元组成，分别记为①，②，③，其中③为冷储备单元，为了对系统建立模型，做出如下几组描述：

1) 初始状态处于良好状态；2） 系统遵循先故障先修理原则；3) 储备系统只有系统②故障才工作，储备期间不发生故障；4) 系统修复后完好如初；5) 系统①的故障率为常数 λ_1，修复率为非常数 $u_1(x)$，且 $\lambda_1>0$，$u_1(x)>0$；6) 系统②，③的故障率均为常数 λ_2，修复率均为 $u_2(x)$，且有 $\lambda_2>0$，$u_2(x)>0$；7) 修复率 $u_i(x)(i=1,2)$ 为非负可测函数，且 $\int_0^\infty u_i(x)=\infty\,(i=1,2)$；8) 三个单元寿命均服从一般分布 $F(t)=1-\mathrm{e}^{\lambda t}, t\ge 0, \lambda>0$；9) 三个单元修复时间服从一般分布 $G(t)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^\infty u(x)}, u(x)>0, t\ge 0$。

以 $S(t)$ 表示系统在 t 时刻所处的状态，则系统在 t 时刻所处的状态可划分以下几种情况：1) $S(t)=0$，单元①，②，③均完好，系统正常工作；2) $S(t)=1$，①故障在修，②，③完好，系统停止工作；3) $S(t)=2$，②故障在修，③开始工作，系统工作；4) $S(t)=3$，③故障在修，②正常工作，系统正常工作；5) $S(t)=4$，②故障在修，③故障待修，系统停止工作；6) $S(t)=5$，②故障在修，①故障待修，③停止工作，系统停止工作；7) ③故障在修，①故障待修，②停止工作，系统停止工作。

可得系统方程组如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_0(t)=-(\lambda_1+\lambda_2)P_0(t)+\int_0^\infty u_1(x)P_1(t,x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty u_2(x)\big(P_2(t,x)+P_3(t,x)\big)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_1(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_1(t,x)=-u_1(x)P_1(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_2(t,x)=-\big(\lambda_1+\lambda_2+u_2(x)\big)P_2(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_3(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_3(t,x)=-\big(\lambda_1+u_2(x)\big)P_3(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_4(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_4(t,x)=-u_2(x)P_4(t,x)+\lambda_2P_2(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_5(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_5(t,x)=-u_2(x)P_5(t,x)+\lambda_1P_2(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_6(t,x)+\frac{\partial}{\partial x}P_6(t,x)=-u_2(x)P_6(t,x)+\lambda_1P_3(t,x)$$

$$P_1(t,0)=\lambda_1 P_0(t)+\int_0^{\infty}\left(P_5(t,x)+P_6(t,x)\right)u_2(x)\mathrm{d}x$$

$$P_2(t,0)=\lambda_2 P_0(t);\ P_3(t,0)=P_4(t,0)=P_5(t,0)=P_6(t,0)=0;\ P_0(0)=1, P_i(0,x)=0,(i=1,2,3,4,5,6)$$

将以上问题转化为抽象柯西问题：

取空间 $X=R\times\left(L^1[0,\infty)\right)^2$，对任意 $P=\left(P_0,P_1(x),\cdots,P_6(x)\right)\in X$，

定义范数 $\|P\|=\|P_0\|+\|P_1(x)\|_{L^1[0,\infty)}+\cdots+\|P_6(x)\|_{L^1[0,\infty)}$，则 $(X,\|.\|)$ 是一个 Banach 空间。

引入算子 A，B，C 及其定义域如下：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_7 \end{pmatrix} \text{其中，} A_1=-\lambda_1-\lambda_2，\ A_2=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-u_1(x)，\ A_3=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\left(\lambda_1+\lambda_2+u_2(x)\right)$$

$$A_4=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\left(\lambda_1+u_2(x)\right)，\ A_5=A_6=A_7=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-u_2(x)。$$

$$D(A)=\left\{P\in X \middle| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_i(x)\in L^1[0,\infty), p_i(x)\text{是绝对连续函数}(i=1,2,3,4,5,6)\right.$$

$$P_1(t,0)=\lambda_1 P_0(t)+\int_0^{\infty}\left(P_5(t,x)+P_6(t,x)\right)u_2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\left.P_2(t,0)=\lambda_2 P_0(t), P_3(t,0)=P_4(t,0)=P_5(t,0)=P_6(t,0)=0\right\}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \int_0^{\infty}u_1(x)P_1(t,x)\mathrm{d}x & \int_0^{\infty}u_2(x)P_2(t,x)\mathrm{d}x & \int_0^{\infty}u_3(x)P_3(t,x)\mathrm{d}x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(B)=D(C)=X$$

则上述问题可表示为 Banach 空间上的抽象柯西问题：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t)=(A+B+C)P(t), t\geq 0 \\ P(0)=(1,0,0,0,0,0,0) \\ P(t)=\left(P_0(t),P_1(t,x),P_2(t,x),\cdots,P_6(t,x)\right)^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{2}$$

3. 可修复系统动态解的存在唯一性[1] [6] [7]

命题 1：当 $\alpha > 0$ 时，$\alpha \in \rho(A)$，并且 $\left\|(\alpha I - A)^{-1}\right\| < \frac{1}{\alpha}$。

命题 2：算子 A 是闭稠定算子。

命题 3：A 为耗散算子。

命题 4：算子 $A+B+C$ 生成正压缩 C_0 半群。

命题 5：抽象柯西问题(2)存在唯一的非负解 $P(t,x)$ 且满足 $\|P(t,.)\| = 1$；$t \ge 0$。

4. 系统的指数稳定性[1] [6] [8]

命题 1:0 是算子 $A+B+C$ 的简单本征值。

证：取 $P = (P_0, P_1(X), \cdots, P_6(X))$，考虑 $(A+B+C)P = 0$，其解析形式为

$$-(\lambda_1+\lambda_2) + \int_0^\infty u_1(x)P_1(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty \left(u_2(x)P_2(x) + u_2(x)P_3(x)\right)\mathrm{d}x = 0。$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_1(x) - u_1(x)P_1(x) = 0，\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_2(x) - \left(\lambda_1+\lambda_2+u_2(x)\right)P_2(x) = 0，$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_3(x) - \left(\lambda_1+u_2(x)\right)P_3(x) = 0，\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_4(x) - u_2(x)P_4(x) + \lambda_2 P_2(x) = 0，$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_5(x) - u_2(x)P_5(x) + \lambda_1 P_2(x) = 0，\quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_6(x) - u_2(x)P_6(x) + \lambda_1 P_3(x) = 0$$

$$P_1(0) = \lambda_1 P_0，\quad P_2(0) = \lambda_2 P_0，\quad P_3(0) = P_4(0) = P_5(0) = P_6(0) = 0，\text{解得}$$

$$P_1(x) = \lambda_1 P_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}，\quad P_2(x) = \lambda_2 P_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x (\lambda_1+\lambda_2+u_2(\xi))\mathrm{d}\xi}，\quad P_3(x) = 0，$$

$$P_4(x) = \lambda_2^2 P_0 \int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^t (\lambda_1+\lambda_2+u_2(\xi))\mathrm{d}\xi} \mathrm{e}^{-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}t，\quad P_5(x) = \lambda_1\lambda_2 P_0 \int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^t (\lambda_1+\lambda_2+u_2(\xi))\mathrm{d}\xi} \mathrm{e}^{-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}t，\quad P_6(x) = 0，$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u_1(x)P_1(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty u_1(x)\lambda_1 P_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 P_0 \int_0^\infty u_1(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 P_0\left[-\int_0^\infty \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\int_0^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}\right)\right] = \lambda_1 P_0\end{aligned}$$

同理得，$\int_0^\infty \left(u_2(x)P_2(x) + u_2(x)P_3(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty u_2(x)\lambda_2 P_0 \mathrm{e}^{-\int_0^x (\lambda_1+\lambda_2+u_2(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x = \frac{\lambda_2 P_0}{\lambda_1+\lambda_2}$

代入 $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} + \lambda_1 - (\lambda_1+\lambda_2)\right)P_0 = 0 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} - \lambda_2\right)P_0 = \left(\frac{\lambda_2\left(1-(\lambda_1+\lambda_2)\right)}{\lambda_1+\lambda_2}\right)P_0 \ge -\frac{\lambda_2}{2}P_0$，得 $P_0 \ge 0$

易知，$P_i(x) \in L^1[0,\infty), i = 1,2,\cdots,6$，$P = (P_0, P_1, \cdots, P_6)^{\mathrm{T}}$，0 对应于算子 $A+B+C$ 的本征向量，取 $Q = (1, 1(x), \cdots, 1(x))$，则 $\langle P, Q\rangle = P_0 + \int_0^\infty P_1(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty P_2(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^\infty P_6(x)\mathrm{d}x > 0$，且对任意 $P \in D(A+B+C)$，有 $\langle (A+B+C)P, Q\rangle = 0$，即 $(A+B+C)*Q = 0$，即 0 是算子 $A+B+C$ 的简单本征值。

命题 2：若存在正数 a 使得 $a = \min\{C_i, \lambda_1, \lambda_2\}$，则当 $\mathrm{Re}\,\gamma > -C$ 时，$\gamma \in \rho(A)$，且 $\left\|(\gamma I - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,\gamma + C}$

证：当 $\mathrm{Re}\,\gamma > -C$ 时，对任意 $\eta = (\eta_0, \eta_1(x), \cdots, \eta_6(x)) \in X$，考虑 $(\gamma I - A)P = \eta$，

而 $P = (P_0, P_1(x), \cdots, P_6(x))$，则有 $(\gamma + \lambda_1 + \lambda_2)P_0 = \eta_0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_1(x)+(\gamma+u_1(x))P_1(x)=\eta_1(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_2(x)+(\gamma+\lambda_1+\lambda_2+u_2(x))P_2(x)=\eta_2(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_3(x)+(\gamma+\lambda_1+u_2(x))P_3(x)=\eta_3(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_4(x)+(\gamma+u_2(x))P_4(x)=\eta_4(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_5(x)+(\gamma+u_2(x))P_5(x)=\eta_5(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_6(x)+(\gamma+u_2(x))P_6(x)=\eta_6(x)；\quad P_1(0)=\lambda_1P_0，\quad P_2(0)=\lambda_2P_0，\quad P_3(0)=P_4(0)=P_5(0)=P_6(0)=0。$$

当 $\mathrm{Re}\,\gamma>-C$ 时，有 $\gamma\neq-(\lambda_1+\lambda_2)$，解上述方程组得 $P_0=\dfrac{\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}$

$$P_1(x)=\frac{\lambda_1\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\mathrm{e}^{-\gamma x-\int_0^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma(x-t)-\int_t^x u_1(\xi)\mathrm{d}\xi}\eta_1(t)\mathrm{d}t$$

$$P_2(x)=\frac{\lambda_2\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda_1+\lambda_2)x-\int_0^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda_1+\lambda_2)(x-t)-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\eta_2(t)\mathrm{d}t$$

$$P_3(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-(\gamma+\lambda_1)(x-t)-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\eta_3(t)\mathrm{d}t；\quad P_4(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma(x-t)-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\eta_4(t)\mathrm{d}t$$

$$P_5(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma(x-t)-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\eta_5(t)\mathrm{d}t；\quad P_6(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-\gamma(x-t)-\int_t^x u_2(\xi)\mathrm{d}\xi}\eta_6(t)\mathrm{d}t$$

由于

$$\begin{aligned}
\|P\|&=|P_0|+\sum_{i=1}^6\|P_i\|\\
&\le\left|\frac{\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\right|+\left|\frac{\lambda_1\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\right|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)x}\mathrm{d}x+\int_0^\infty|\eta_1(t)|\mathrm{d}t\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x\\
&\quad+\left|\frac{\lambda_2\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\right|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)x}\mathrm{d}x+\int_0^\infty|\eta_2(t)|\mathrm{d}t\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^\infty|\eta_3(t)|\mathrm{d}t\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x+\int_0^\infty|\eta_4(t)|\mathrm{d}t\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^\infty|\eta_5(t)|\mathrm{d}t\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x+\int_0^\infty|\eta_6(t)|\mathrm{d}t\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x\\
&=\left|\frac{\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\right|+\left|\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\eta_0}{\gamma+\lambda_1+\lambda_2}\right|\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)x}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^6\|\eta_i\|\int_t^\infty\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\gamma+C)(x-t)}\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{\mathrm{Re}\,\gamma+C}\left(\|\eta_0\|+\sum_{i=1}^6\|\eta_i\|\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\gamma+C}\|\eta\|
\end{aligned}$$

得 $P\le\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,\gamma+C}\|\eta\|$。这表明当 $\mathrm{Re}\,\gamma+C>0$ 时，$(\gamma I-A)^{-1}:X\to x$ 是有界的，所以 $\gamma\in\rho(A)$，并且 $\left\|(\gamma I-A)^{-1}\right\|\le\dfrac{1}{\mathrm{Re}\,\gamma+C}$。由 Lumer-Phillips 半群生成定理得以下推论：

推论：算子 A 生成的压缩半群 $S(t)$ 是指数衰减的，即对任意 $0<\omega<C$ 有 $\|S(t)\|\le\mathrm{e}^{-\omega t}$；$t\ge0$

注意到 B 和 C 是有限秩算子，所以 B 和 C 是紧算子，由算子半群的扰动定理以及算子半群的紧扰动得以下结果：

命题 3：算子 $A+B+C$ 生成的压缩 C_0 半群 $T(t)$ 有以下性质：

1) 对任意 $\gamma\in C$， $\mathrm{Re}\,\gamma+C>0$， $\gamma\in\sigma(A)$ 的充要条件是 $D(r)=0$；

2) 设 $\gamma_0=0$，对任意 $\gamma_k\in\sigma(A)\cap\{\gamma\in C\mid \mathrm{Re}\,\gamma\ge -C, D(r)=0\}$， $\gamma_k\ne\gamma_0$， $k=0,1,2,\cdots,6$，其中 γ_k 按严格实部递减排序， $\mathrm{Re}\,\gamma_{(k+1)}\le \mathrm{Re}\,\gamma_k$， $k=1,2,\cdots,6$，即 $\gamma_0=0$ 是严格占优本征值。

3) 设 $\hat{P}=\left(\hat{P}_0,\hat{P}_1(x),\cdots,\hat{P}_6(x)\right)$ 是系统的稳态解，满足 $\langle\hat{P},Q\rangle=1$，设 $\mathrm{Re}\,\gamma_1<\omega<\gamma_0$，那么对任意的 $P\in X$， $Q=(1,1,1,1,1,1,1)$ 有 $\left\|T(t)P-\langle P,Q\rangle\hat{P}\right\|\le \mathrm{e}^{-\omega t}\|P\|$， $t\ge 0$。

证：1) 当 $\mathrm{Re}\,\gamma>-C$ 时，由前一命题，$\gamma\in\rho(A)$，则 $(\gamma I-(A+B+C))=(\gamma-A)(I-R(\gamma,A)(B+C))$，注意到 B 和 C 是有限秩算子，那么 $R(\gamma,A)(B+C)$ 是紧算子，从而 $\gamma\in\rho(A+B+C)$ 充要条件是：1 是 $R(\gamma,A)(B+C)$ 的本征值，因此对 $\mathrm{Re}\,\gamma+C>0$， $\gamma\in\rho(A)$ 的充要条件是 $D(r)=0$。

2) 当 $\mathrm{Re}\,\gamma>-C$ 时， $D(r)$ 是解析函数，至多有可数个零点，设 $\gamma_0=0$，对其他本征值按实部递减排序 $\mathrm{Re}\,\gamma_{(k+1)}\le \mathrm{Re}\,\gamma_k$， $k=0,1,2,\cdots,6$，则 $\gamma_k\in\sigma(A)\cap\{\gamma\in C\mid \mathrm{Re}\,\gamma\ge -C, D(r)=0\}$， $\gamma_k\ne\gamma_0$，由本征值离散及本节命题 1 得 $\mathrm{Re}\,\gamma_k\le \mathrm{Re}\,\gamma_0$， $k=1,2,\cdots,6$，因 γ_0 对应的本征函数是正的，所以 $\gamma_0=0$ 是严格占优本征值。

3) 由半群扰动定理，紧扰动不改变半群的本质谱界，算子 $A+B+C$ 生成的半群 $T(t)$ 与算子 A 生成的半群 $S(t)$ 有同样本质谱界，即 $T(t)$ 本质谱界 $\omega(A+B+C)\le\omega_0(A)$。设 $\hat{P}=\left(\hat{P}_0,\hat{P}_1(x),\cdots,\hat{P}_6(x)\right)$ 是系统稳态解，$\mathrm{Re}\,\gamma_1<\omega<\gamma_0$，则由算子半群展开定理可得对任意 $P\in X$，$Q=(1,1,1,1,1,1,1)$ 有 $\left\|T(t)P-\langle P,Q\rangle\hat{P}\right\|\le \mathrm{e}^{-\omega t}\|P\|$，$t\ge 0$。

综上，在一定条件下，系统的动态解以指数形式收敛于系统的稳态解。

参考文献

[1] 许跟起. 系统可靠性分析中的泛函分析方法[M]. 2009: 1-90.

[2] Gao, S. and Liu, Z.M. (2013) An M/G/1 Queue with Single Working Vacation and Vacation Interruption under Bernoulli Schedule. *Applied Mathematical Modeling*, **37**, 1564-1579. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.045

[3] 周鸿兴, 王连文. 线性算子半群理论及应用[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1994.

[4] 郭卫华, 许跟起. 两不同部件并联可修系统解的稳定性[J]. 应用泛函分析学报, 2003, 5(3): 281-288.

[5] Gao, S., Wang, J.T. and Zhang, D.R. (2013) Discrete-Time G/G/1/N Queue with Negative Customers and Multipe Working Vacations. *Journal of the Korean Statistical Society*, **42**, 515-528. https://doi.org/10.1016/j.jkss.2013.03.002

[6] Pazy, A. (1983) Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[7] 郭卫华. 一类两个相同部件并联可修系统解的存在性和唯一性[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(4): 632-634.

[8] Nagel, R. (1986) One Parameter Semigroups of Positive Operators. Vol.1184, Springer-Verlag, Berlin.