Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(5), 647-652
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.95086

Hans汉斯

Finite Groups Structure with *n*-Minimal Subgroups *SS*-Quasinormal

Ning Xu

School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: 1070277124@qq.com

Received: Jul. 3rd, 2019; accepted: Jul. 22nd, 2019; published: Jul. 29th, 2019

Abstract

Let G be a finite group. A subgroup H of G is said to be an SS-quasinormal subgroup of G if there is a supplement B of H to G such that H permutes with every Sylow subgroup of B. In this paper, the structures of finite groups are discussed by making the exactly n-minimal groups in G and the exactly n-minimal groups in G to be SS-quasinormal subgroups.

Keywords

Exactly n-Minimal Subgroups, S-Permutable Subgroups, SS-Quasinormal Subgroups, Solvable Group, Supersolvable Group

n-极小子群是SS-拟正规的有限群的结构

徐　宁

广西师范大学数学与统计学院，广西　桂林
Email: 1070277124@qq.com

收稿日期：2019年7月3日；录用日期：2019年7月22日；发布日期：2019年7月29日

摘　要

设G是有限群，H是G的子群。称H在G中SS-拟正规，如果H存在补子群B，满足H和B的每个Sylow子群可以交换。本文基于所有恰n-极小子群是SS-拟正规子群的有限群，讨论有限群的结构。

关键词

恰n-极小子群，S-置换子群，SS-拟正规子群，可解群，超可解群

文章引用：徐宁. n-极小子群是 SS-拟正规的有限群的结构[J]. 理论数学, 2019, 9(5): 647-652.
DOI: 10.12677/pm.2019.95086

1. 引言

在本文中 G 表示有限群，p,q 表示素数。文中讨论的恰 n-极小子群是潘红飞在[1]中提出的，即对于一个子群链 $1<D_0<D_1<\cdots<D_n$ 如果对于任意的 $i=0,\cdots,n-1$ 有 D_i 是 D_{i+1} 的极大子群，则称这个群链是 D 的极大子群链且链长为 n。如果子群 D 有一个极大子群链且链长是 n，则称 D 为 n-极小子群。如果 D 是 n-极小子群，但是 D 的真子群都不是 n-极小子群，则称 D 是恰 n-极小子群。钱国华在[2]中提出了 n-极大子群，并定义 $l(\Omega)$ 表示群 Ω 子群链的链长。设 D 是 G 的一个子群，$CM(G:D)$ 表示 G 到子群 D 的不可加细链的集合，则 $l_{\max}(G:D)=\max\{l(\Omega)\mid\Omega\in CM(G:D)\}$，因此 $CM(G)=CM(G:1)$ 且 $l_{\max}(G)=l_{\max}(G:1)$。

设 G 是有限群，$H\le G$，$P\in Syl_p(G)$，如果 $HP=PH$ 则称 H 是 G 的 S-置换子群，或者 H 是 G 的 S-拟正规子群。若对于 $B\le G$ 使得 $G=HB$ 且 $P\in Syl_p(B)$ 有 $HP=PH$ 称 H 是 G 的 SS-拟正规子群，B 为 H 在 G 中的 SS-补，H 在 G 中 SS-补的集合记为 $SS_G(H)$。显然 S-置换子群是 SS-拟正规子群。

本文主要考虑恰 n-极小子群是 SS-拟正规子群的有限群的结构。

条件 1.1：假设 G 所有恰 n-极小子群是 SS-拟正规子群，其中 n 是正整数。

令 $Min_n(G)$ 表示 G 中所有恰 n-极小子群组成的集合，$l_{\max}(G)$ 表示 G 的所有子群链中最长的链长。对正整数 n 做素数幂分解，$n=p_1^{e_1}\cdots p_s^{e_s}$，定义 $\omega(n)=\sum_{1\le i\le s}e_i$。令 $\omega(G)=\omega(|G|)$ 表示 G 的权重。

在此先给出一些注解：

根据 n-极小子群的定义，显然恰 n-极小子群一定是 n-极小子群，但反过来不成立。

假设 D 是 G 的子群，则很容易得到以下结论：

1) $D\in Min_n(G)\Leftrightarrow l_{\max}(G)=n$。

2) 当 D 是可解群时，$l_{\max}(D)=\omega(D)$。

2. 预备知识

引理 2.1：令 H,K 是 G 的子群，则有下列结论成立。

1) 若 H 是 G 中 S-置换子群，则 H 是 G 的次正规子群。若 $H\le K$，则 H 是 K 中 S-置换子群。

2) 若 K 是 H 中的 G-不变子群，则 H/K 是 G/K 中 S-置换子群当且仅当 H 是 G 中 S-置换子群。

3) 若 H,K 是 G 中 S-置换子群并且 $HK=KH$，则 HK 也是 G 中 S-置换子群。

4) 若 P 是 G 中的 p-子群，则 P 是 G 中 S-置换子群当且仅当 $P\le O_p(G)$ 且 $O^p(G)\le N_G(P)$。

5) 若 H,K 是 G 中 S-置换子群，则 $H\cap K$ 也是 G 中 S-置换子群。

6) 若 H 是 G 中 S-置换子群，则 $H/Core_G(H)$ 是幂零子群，这里 $Core_G(H)=\bigcap_{x\in G}H^x$。

7) 若 H 是 G 中 S-置换子群，若 $Core_G(H)=1$ 时，则 $H\le F(G)$；若 H 是可解群时，则 $H\cap F(G)\succ 1$。

证明：这些陈述是已知的，参见[3] [4]和([5]，第一章，第二节)。

引理 2.2 [6]：假设 H 是 G 中 SS-拟正规子群，$K\le G$，且 N 是 G 的一个正规子群。则

1) 若 $H\le K$，则 H 是 K 中的 SS-拟正规子群。

2) HN/N 是 G/N 中 SS-拟正规子群。

3) 若 $N\le K$ 且 K/N 是 G/N 中 SS-拟正规子群，则 K 是 G 中 SS-拟正规子群。

4) 若 K 是 G 中拟正规子群，则 HK 是 G 中 SS-拟正规子群。

引理 2.3 [6]：令 H 是 G 的一个幂零子群。则有如下结论等价。

1) H 是 G 中 S-置换子群。

2) $H \le F(G)$ 且 H 是 G 中 SS-拟正规子群。

定义 2.1 [7]：假设 N 存在一个 G-不变子群链 $1 < N_0 < N_1 < \cdots < N_t = N$，且任意的 N_{i+1}/N_i 都是素数阶，则称 N 是 G-超可解群。根据 Jordan-Holder 定理，一个 G-不变子群 N 是 G-超可解群当且仅当 N 以下的 G-主因子都是素数阶的。

引理 2.4 [8]：假设 N 是 G 的正规子群，若 N 是 G-超可解群，则 $G/C_G(N)$ 是超可解群。

引理 2.5：令 F 是 G 中正规幂零子群且 n 是正整数。如果 F 的任意权重为 n 的子群 H 是 G 中 SS-拟正规子群。则有下列结论成立。

1) 假设 $\Phi(F)=1$ 且 $\omega(F) \ge n+1$。则 F 的所有子群是 G 中 S-置换子群。

2) 假设 E 是 F 中的一个极小 G-不变子群。则 $\omega(E) \le n$。如果 $\omega(F) \ge n+1$，则 $\omega(E)=1$ 或 $\omega(E) \le n-1$。

证明：

1) 因为 F 幂零群且 $\Phi(F)=1$，则 F 可以表示成一些素数阶子群的直积形式。令 M 是 F 的子群。若 $\omega(M) < n$，则 M 可由 F 的一些权重为 n 的子群 D_i 的交生成；若 $\omega(M) \ge n$ 则 M 可由 F 的一些权重为 n 子群 K_j 的直积生成。根据条件知 D_i 和 K_j 在 G 中 SS-拟正规，因为 $D_i < F \le F(G)$ 且 $K_j < F \le F(G)$，所以 $D_i \le F(G)$ 且 $K_j \le F(G)$，则根据引理 2.3 知 D_i 和 K_j 是 G 中 S-置换子群。所以根据引理 2.1 3) 5)知 M 是 G 中 S-置换子群，所以 F 的所有子群是 G 中 S-置换子群。

2) 由条件知 E 是一个初等交换 p-群。假设结论是错误的，则 $\omega(E) \ge n$ 根据结论 1)知 E 的所有子群在 G 中 S-置换。令 $1 \ne x \in E$ 使得 x 中心化 G 的一个 Sylow p-子群。因为 $\langle x \rangle$ 在 G 中 S-置换，则根据引理 2.1 4)知 $N_G(\langle x \rangle)=G$，因此 $\langle x \rangle \lhd G$，矛盾。所以 $\omega(E) \le n$。

如果 $\omega(F) \ge n+1$，假设结论错误，则 $\omega(E)=n \ge 2$。令 A/E 是 F/E 的极小子群，则 A 不是循环群且 A 的所有极大子群在 G 中 S-置换。根据引理 2.1 3)知 A 在 G 中 S-置换，则 F/E 的任意极小子群在 G/E 中 S-置换。根据 2)第一部分条件知 F/E 中有一个 G/E-不变子群 B/E 且 $\omega(B)=n+1$。因为 B 是非循环群，所以 $\Phi(B) < E$。再根据 E 的极小正规性知 $\Phi(B)=1$。因为 $\omega(B)=n+1$，根据 1)知 B 的所有极小子群在 G 中 S-置换，又 $\omega(E) \le n$ 知 $\omega(E)=1$，矛盾。 □

引理 2.6 [2]：假设 F 是 G 的正规幂零子群，且 $\omega(F) \ge n+1$ 其中 n 是正整数。设 F 的任意权重为 n 的子群 H 是 G 中 S-置换子群，则

1) $n \ge 2$，则 F 是 G-超可解群。

2) $n=1$，若 F 的任意 4 阶循环子群(如果存在)在 G 中 S-置换，则 F 是 G-超可解群。

引理 2.7：假设 F 是 G 的正规幂零子群，且 $\omega(F) \ge n+1$ 其中 n 是正整数。设 F 的任意权重为 n 的子群 H 是 G 中 SS-拟正规子群，则

1) $n \ge 2$，则 F 是 G-超可解群。

2) $n=1$，若 F 的任意 4 阶循环子群(如果存在)在 G 中 S-置换，则 F 是 G-超可解群。

证明：因为 F 是 G 中正规幂零子群，所以 $F \le F(G)$，又 $H \le F$，所以 $H \le F(G)$，因为 H 是 G 中 SS-拟正规子群，则根据引理 2.3 知 H 是 G 中 S-置换子群。这时根据引理 2.6 立得上述结论。 □

引理 2.8 [8]：如果交换群 A 忠实且不可约作用在 p^m 阶初等交换群 V 上，则 A 是循环群且 m 是最小正整数 k 使得 $|A| \mid p^k - 1$ 成立。

引理 2.9：假设 G 满足条件 1.1，令 V 是 G 的极小正规子群。若 $|V| = p^n$ 且 $n \ge 2$，则 $G = V \rtimes A$ 是可解的 Frobenius 群，A 是 G 的奇数阶超可解补群，V 是 G 的核，而且 V 是 G 中唯一权重为 n 的子群。

证明：假设 $|V| = p^n$ 且 $n \ge 2$，所以 $V \le F(G)$。若 $\omega(F(G)) > n$，则根据引理 2.7 可知 $F(G)$ 是 G-超

可解群且$\omega(V)=1$，矛盾，所以$V=F(G)$。假设G中存在p-子群P，使得$V<P$且$\omega(P)=n+1$，这里P不是循环群，假设 P 中可找到两个不同的极大子群P_1和P_2。因为P_1和P_2是 P 的极大子群，所以$\omega(P_1)=\omega(P_2)=n$，所以$P_1$和$P_2$是$G$中$SS$-拟正规子群。根据引理 2.2 4)可知$P=P_1P_2$是$G$中$SS$-拟正规子群，所以$P\le F(G)$，矛盾。所以$V\in Syl_p(G)$，因此存在$G$的极大子群$A$使得$G=V\rtimes A$。

假设群A存在p-元x，使x中心化V的非单位元，则$V=[V,\langle x\rangle]\times C_V(x)$。于是令$D$是$C_V(x)$的极大子群，因为$\langle x\rangle[V,\langle x\rangle]D\in Min_n(G)$，所以$\langle X\rangle[V,\langle x\rangle]D$在$G$中$SS$-拟正规，又因为$\langle X\rangle[V,\langle x\rangle]D\le F(G)$，所以$\langle X\rangle[V,\langle x\rangle]D$在$G$中$S$-置换，则根据引理 2.1 5)可知$D[V,\langle x\rangle]$是$G$中$S$-置换子群，又根据引理 2.1 4)知$D[V,\langle x\rangle]$是$G$中正规子群，矛盾。因此$G$是有核$V$和补群$A$的 Frobenius 群。

假设A是偶数阶群，令D是A的 2 阶子群。因为V是完全可约$F_p[D]$-模，且根据引理 2.8 知所有不可约$F_p[D]$-模的次数为 1，这就意味着V有极大的D-不变子群A_0，而$A_0=DA_0\cap V$是G的正规子群，矛盾，因此A是奇数阶。所以A是奇数阶 Frobenius 补群，当A所有的 Sylow 子群是循环群时，A是超可解群，同时G是可解群。

假设D是G中权重为n的子群。则D在G中SS-拟正规。因为$1<F(D)<F(G)$，所以$F(D)=D\cap F(G)=D\cap V$根据引理 2.3 知$D\cap V$在 G 中 S-置换且$V\in Syl_p(G)$，根据引理 2.1 4)知$F(D)=D\cap F(G)$在G中正规，所以$V=F(G)=D$。 □

引理 2.10：令p是奇素数，假设G的任意p阶子群在G中SS-拟正规。则$G/O_{p'}(G)$是超可解群。如果G满足条件 1.1 且$n=1$则$G/O_2(G)$是超可解群。

证明：假设$p\,||G|$且$O_{p'}(G)=1$。因为G的任意p阶子群在G中SS-拟正规，又G的p阶子群包含在$O_p(G)$中，所以$1<\langle x\in G\mid o(x)=p\rangle\le O_p(G)$。显然根据引理 2.7 2)知$O_p(G)$是$G$-超可解群。所以根据引理 2.4 知$G/C_G(O_p(G))$超可解。因为$C_G(O_p(G))$中任意 p 阶子群在$C_G(O_p(G))$的中心里，根据 Huppert 在([8]，第四章，定理 5.5)知$C_G(O_p(G))$是p-幂零群，所以G是p-可解群。因为$O_{p'}(G)=1$，所以$C_G(O_p(G))\le O_p(G)$。因此$C_G(O_p(G))$是超可解群，所以G是超可解群。

若G满足条件 1.1 且$n=1$，因为$O_2(G)=\bigcap_{p是奇数}(O_{p'}(G))=1$，所以$G/O_2(G)$是超可解群。 □

引理 2.11：假设G是满足条件 1.1 的可解群，且$n\ge 2$。若G有权重为$n-1$的极小正规子群D，则G/D是超可解群。

证明：假设G有不同于D的极小正规子群E，则$DE=D\times E$，根据引理 2.7，可知$\omega(E)=1$。根据引理 2.2 的 2)知G/E中所有恰$(n-1)$-极小子群是G/E中SS-拟正规子群，若G/E中有权重为$n-1\ge 1$的极小正规子群DE/E，根据引理 2.9 知$(G/E)/(DE/E)\cong G/DE\cong(G/D)/(DE/D)$是超可解群，又因为$\omega(DE/E)=1$，所以$G/D$是超可解群。假设$D$是$G$唯一的极小正规子群，且$|D|=p^{n-1}(\ge p^2)$因此$F(G)$是$p$-群，若$\Phi(G)>1$，取$p$-元$x\in G$，因为$D\le\Phi(G)$，所以$\langle x\rangle D$是$G$中$SS$-拟正规子群，因此$\langle x\rangle D/D\le F(G/D)=F(G)/D$，所以$x\in F(G)$，矛盾。若$\Phi(G)=1$，则根据引理 2.9 知$G=D\rtimes A$，这里$D=F(G)$且$A$是$G$的极大子群。根据引理 2.9 知$D\in Syl_p(G)$，根据引理 2.10 知若$A$中所有的极小子群是$SS$-拟正规的，则$A/O_2(A)$是超可解群。

假设A不是超可解群，为方便证明，我们令$O=O_2(A)$不是G-超可解群，又因为O不是循环群，且令B是O的 4 阶子群，因为D是完全可约$F_p[B]$-模，根据引理 2.8 知，所有不可约$F_p[B]$-模的维数是 1 或 2。假设D有子群是 1 维的不可约$F_p[B]$-模，则D有极大B-不变子群D_1，显然BD_1是G中SS-拟正规子群，因为$D_1<D=F(G)$且$B\le O\le F(G)$，所以$BD_1\le F(G)$，所以BD_1在 G 中 S-置换。又因为$D_1=BD_1\cap D$，所以D_1是G中S-置换子群，根据 2.1 4)知$D_1\lhd G$，矛盾。因此D所有的不可约$F_p[B]$-模子群都是 2 维的，因为若$B\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$，则所有不可约$F_p[B]$-模是 1 维，因此$O$没有$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$类型的子群。又因为$O$不是$G$-超可解群，所以$O$是四元数群，且$O/O'\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$是$A$-主因子。因为$Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$是 6

阶的且 A 不可约作用在 O/O' 上，所以 $3||A|$。令 $\mathbb{Z}_3$ 是 A 的 3 阶子群，$\mathbb{Z}_4$ 是 O 的 4 阶子群。因为 $\mathbb{Z}_3$ 是 A 中 SS-拟正规子群，$\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$ 是 12 阶循环群，又因为 D 是 $\{2,3\}'$-群，所以 D 是完全可约 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4$-模。取 $D=D_1\times D_2$，这里 D_1，D_2 是 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4$-模且 D_1 是不可约的，所以 $12|(p^2-1)$。因为 D_1 是 2 维的不可约 $\mathbb{Z}_4$-模，所以 $|D_1|=p^2$，所以 $\omega(\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4D_2)=n$ 且 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4D_2$ 是 G 中 SS-拟正规子群。因为 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4\le F(G)$ 且 $D_2\le D\le F(G)$，所以 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4D_2$ 是 G 中 S-置换子群。若 $D_2>1$ 则 $D_2=\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4D_2\cap D$ 在 G 中 S-置换子群，所以根据引理 2.1 4)知 $D_2\lhd G$，矛盾。若 $D_2=1$，则 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4$ 是 G 中 S-置换子群，所以根据引理 2.1 7)知 $\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_4\cap D>1$，矛盾。 □

3. 主要结果及其证明

定理 3.1：令 F 是 G 的正规幂零子群，P 是 F 的 Sylow p-子群，这里 p 是奇数阶。若 F 的所有极小子群在 G 中 SS-拟正规，或若 $\omega(F)\ge 3$ 且 F 所有权重为 2 的子群 D 在 G 中 SS-拟正规。则 P 是 G-超可解群。

证明：假设 $\omega(F)\ge 3$ 且 F 所有权重为 2 的子群 D 在 G 中 SS-拟正规。令 E 是 F 的极小 G-不变子群。根据引理 2.5 2)知 E 是素数阶，所以 F/E 任意极小子群在 G/E 中 SS-拟正规。又因为 $E<F\le F(G)$，所以 F/E 任意极小子群在 G/E 中 S-置换。因为可由 PE/E 的 G-超可解性直接推出 P 的 G-超可解性。因此只要考虑当 F 所有极小子群在 G 中 SS-拟正规的情况即可。

假设 F 所有极小子群在 G 中 SS-拟正规，因为 $F\le F(G)$，所以 F 所有极小子群在 G 中 S-置换。显然 F 的所有子群继承了假设条件。因此假设 $F=P$ 且 P 的所有真 G-不变子群是 G-超可解群。若 V_1 和 V_2 是 P 中不同的极大 G-不变子群，则 V_1 和 V_2 都是 G-超可解群，所以 P 也是 G-超可解群。因此设 P 有唯一极大 G-不变子群 V。

为了证明 P 的 G-超可解性，我们只要证明 P/V 是 p 阶群。若 $V=1$，则 P 是 G 的极小正规子群，又根据引理 2.5 知 P 是 G-超可解群。若 $V>1$，则根据引理 2.4 知 $G/C_G(V)$ 是超可解群。

假设 $C_P(V)<P$。因为 $C_P(V)$ 是 P 中 G-不变子群，且 V 是 P 中唯一极大 G-不变子群，所以 $C_P(V)\le V$，则 P/V 同构于 $G/C_G(V)$ 的 G-主因子，因此 $P/V\cong\mathbb{Z}_p$。因此假设 $C_P(V)=P$，则 $V\le Z(P)$，且 P 最多有 2 个类。令 Ω_1 是 P 中所有 p 阶元生成的子群，所以 $\exp(\Omega_1)=p$。

假设 $\Omega_1=P$，令 $\langle y\rangle V/V$ 是 P/V 的任意极小子群。因为 $\exp(P)=p$，$\langle y\rangle$ 是 p 阶群且在 G 中 S-置换，因此 P/V 的所有极小子群在 G/V 中 S-置换。因此根据引理 2.5 2)知 P/V 是 p 阶群。

假设 $\Omega_1<P$，则 $\Omega_1\le V\le Z(P)$，因此 Ω_1 是初等交换群。又因为 Ω_1 是 G-超可解群，所以根据引理 2.4 知 $G/C_G(\Omega_1)$ 是超可解群。若 p'-群平凡的作用在 Ω_1 上，则 p'-群平凡的作用在 P 上。则 $C_G(\Omega_1)/C_G(P)$ 是 p-群。显然 $C_G(P/V)\ge C_G(P)$。又因为 P/V 是 G 的 p-主因子，且 $O_p(G/C_G(P/V))=1$，所以 $C_G(P/V)\ge C_G(\Omega_1)$，又因为 $G/C_G(\Omega_1)$ 是超可解群，所以 $G/C_G(P/V)$ 是超可解群。根据引理 2.1 4)知 Ω_1 是由一些 p 阶 $O^p(G)$-不变子群的直积生成，因此 $O^p(G)/C_{O^p(G)}(\Omega_1)$ 是交换群且 $\exp\left(O^p(G)/C_{O^p(G)}(\Omega_1)\right)|p-1$。令 $T\lhd G$ 使得 $T/C_G(P/V)=O^p(G/C_G(P/V))$，显然 $T=O^p(G)C_G(P/V)$，

$C_{O^p(G)}(P/V)=O^p(G)\cap C_G(P/V)\ge O^p(G)\cap C_G(\Omega_1)=C_{O^p(G)}(\Omega_1)$，则

$T/C_G(P/V)\cong O^p(G)/(C_G(P/V)\cap O^p(G))=O^p(G)/C_{O^p(G)}(P/V)$ 是 $O^p(G)/C_{O^p(G)}(\Omega_1)$ 的商群，因此 $T/C_G(P/V)$ 是交换群且 $\exp(T/C_G(P/V))|p-1$。对于 $G/C_G(P/V)$ 的任意 p'-主因子 $\vartriangle$。因为 $\vartriangle$ 一定是 $T/C_G(P/V)$ 的 $G/C_G(P/V)$-主因子，所以 $\vartriangle$ 是素数 q 阶且 $q|p-1$。又因为 $G/C_G(P/V)$ 的 Sylow p-子群平凡的作用在 $\vartriangle$ 上，所以也平凡的作用在 $T/C_G(P/V)$ 上。因为 $O_p(G/C_G(P/V))=1$，所以 $T=G$。因此

$G/C_G(P/V)$ 是交换群且 $\exp\left(G/C_G(P/V)\right)\mid p-1$，所以 P/V 是 p 阶群。得证。 □

定理 3.2： 设 G 是满足条件 1.1 的可解群且 $n\geq 2$，若 G 所有极大子群链链长至少为 $n+1$，或者 $l_{\max}(G)\geq 2n$，则 G 是超可解群。

证明：假设 G 不是超可解群，且 G 是极小阶反例。令 D 是 G 唯一的极小正规子群，当 $\omega(D)\geq n-1$ 时，则根据引理 2.9 和引理 2.11，可知 G/D 是超可解群。当 $\omega(D)\leq n-2$ 时，则 G/D 满足定理的所有条件，根据归纳法可知 G/D 是超可解群。如果 G 有不同的极小正规子群 D_1,D_2，则根据归纳法 G/D_i 都是超可解群。如果 $D_i\leq\Phi(G)$ 时，因为 G/D 是超可解群。则 G 也是超可解群。当 $\Phi(G)=1$ 时，设 D 是 G 唯一极小正规子群，则根据引理 2.10 知 $G=D\rtimes A$ 且 $D=F(G)$，其中 A 是 G 的极大子群。

如果 G 的任意极大子群链链长至少为 $n+1$，则 $\omega(A)\geq n$；如果 $l_{\max}(G)\geq 2n$，则 $\omega(A)\geq 2n-\omega(D)\geq n$。取 P 是 A 中极大正规幂零子群。则 $P\leq F(G)$，又因为 $D=F(G)$，所以 $P\cap D>1$，又因为 $D\cap A=1$，矛盾。

从而 G 是超可解的。 □

定理 3.3： 设 G 是满足条件 1.1 的可解群且 $n\geq 2$，若 $\omega(G)\geq n(1+k)/k$，k 是正整数，$nl(G)$ 表示 G 的幂零长，则 $nl(G)\leq 1+k$。

证明若 $k=1$，则 $\omega(G)\geq 2n$，则根据定理 3.2 知 G 是超可解群，所以 $nl(G)\leq 2=1+k$。

若 $k\geq 2$，令 D 是 G 的极小正规子群。若 $\omega(D)\geq n-1$，则根据引理 2.9 和引理 2.11 知 G/D 是超可解群。所以 $nl(G)\leq 3$；若 $\omega(D)\leq n-2$，令 $n_D'=n-\omega(D)$，则 $n_D'\geq 2$，则 G/D 满足定理条件，G/D 中所有权重为 n_D' 的子群都是 *SS*-拟正规子群，并且 $\omega(G/D)\geq n_D'(1+k)/k$，则根据归纳法知 $nl(G/D)\leq 1+k$。假设 $\Phi(G)=1$ 且 $D=F(G)$ 是 G 唯一的极小正规子群，所以 $G=D\rtimes A$，其中 A 是 G 的极大子群。令 $d=\omega(D)$，且 $a=\omega(A)$。若 $a\geq n$，则 A 中有子群 M 在 G 中 *SS*-拟正规，则 $M\cap F(G)=M\cap D>1$，矛盾。所以 $a<n$，因为 $a+d=\omega(G)\geq n(k+1)/k$。则 $k(a+d-n)\geq n>a$，$k\geq 2$，因此 $a>(n-d)k/(k-1)=n_D'k/(k-1)$。根据归纳法可知 $nl(A)\leq 1+(k-1)=k$，所以 $nl(G)\leq 1+k$。 □

基金项目

广西研究生教育创新计划项目(XYCSZ2019086)。

参考文献

[1] Pan, H. (2017) On the *n*-Minimal Subgroups. *Communications in Algebra*, **45**, 5374-5379. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1307382

[2] Qian. G. (2015) Finite Groups with S-Permutable *n*-Maximal Subgroups. *Communications in Algebra*, **43**, 5183-5194. https://doi.org/10.1080/00927872.2014.974102

[3] Deskins. W.E. (1963) On Quasinormal Subgroups of Finite Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **82**, 125-132. https://doi.org/10.1007/BF01111801

[4] Kegel, O.H. (1962) Sylow-Gruppen und Subnormalteiler Endlicher Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **78**, 205-221. https://doi.org/10.1007/BF01195169

[5] 徐明曜. 有限群导引: 上册[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 246.

[6] Li, S.R., Shen, Z.C., Liu, J.J. and Liu, X.C. (2008) The Influence of SS-Quasinormality of Some Subgroups on the Structure of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **319**, 4275-4287. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.01.030

[7] Pan, H. and Qian, G. (2018) Finite Groups with S-Permutable *n*-Minimal Subgroups. *Communications in Algebra*, **46**, 3198-3204. https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1407417

[8] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag New York, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-64981-3

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org