Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(1), 38-42
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.101007

Hans汉斯

A Result of Meromorphic Functions Involving Sharing Value Sets

Ming Lai, Ronghui Li

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 982590598@qq.com

Received: Dec. 20th, 2019; accepted: Jan. 10th, 2020; published: Jan. 19th, 2020

Abstract

This paper proves that if two nonconstant meromorphic functions f and g satisfy $\Theta(\infty, f) > \frac{1}{2}$, $\Theta(\infty, g) > \frac{1}{2}$, there must exist a set $S \subset C$ with 6 elements, and if $E(S, f) = E(S, g)$, there is $T(r, f) \sim T(r, g)$.

Keywords

Meromorphic Function, Shared Value Set, Characteristic Function

亚纯函数涉及分担值集的一个结果

赖　铭，李荣慧

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 982590598@qq.com

收稿日期：2019年12月20日；录用日期：2020年1月10日；发布日期：2020年1月19日

摘　要

本文证明了若两个非常数亚纯函数f和g满足$\Theta(\infty, f) > \frac{1}{2}$，$\Theta(\infty, g) > \frac{1}{2}$，则一定存在含6个元素的集合$S \subset C$，只要$E(S, f) = E(S, g)$，就有$T(r, f) \sim T(r, g)$。

文章引用: 赖铭, 李荣慧. 亚纯函数涉及分担值集的一个结果[J]. 理论数学, 2020, 10(1): 38-42.
DOI: 10.12677/pm.2020.101007

关键词

亚纯函数，分担值集，特征函数

1. 引言及主要结果

本文中的亚纯函数都是定义在复平面 C 上的，且文中的符号采用的是 Nevanlinna 值分布论中的基本符号及结果，如：$m(r,f)$，$N(r,f)$，$T(r,f)$，$S(r,f)$，…。

若 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，S 为一个非空集合。令 $E(S,f)=\bigcup_{a\in S}\{z|f(z)-a=0\}$，这里 m 重零点在 $E(S,f)$ 中重复 m 次，则称 $E(S,f)$ 为 f 下 S 的原象集合。

若两个非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 满足 $E(S,f)=E(S,g)$，其中 S 为一个非空集合，则称 S 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 CM 分担值集。

1968 年，F. Gross [1]研究了将公共值推广到公共值集的一个一般性的情况，如下所示：

定理 A：设 $S_j\,(j=1,2,3)$ 是三个元素不全相同的有限点集，且每一个点集都不包含另外两个点集的并集。设 $T_j\,(j=1,2,3)$ 为与相对应的点集 $S_j\,(j=1,2,3)$ 具有相同元素个数的任一点集。令 $T_4=S_4=\{\infty\}$，若非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 满足 $E(S_j,f)=E(T_j,g)\quad(j=1,2,3,4)$，则 $f(z)$ 和 $g(z)$ 代数相关。

1976 年，F. Gross [2]提出了这样一个问题：

问题 1：是否存在两个最好是一个有限集合 $S_j\,(j=1,2)$，对任意的两个非常数亚纯函数 f 和 g，只要 $E(S_j,f)=E(T_j,g)\quad(j=1,2)$，就有 $f\equiv g$？

1993 年，仪洪勋[3]对上述问题的结论进行了弱化并得到了如下结论：

定理 B：设 $S=\{a+b,a+bw,\cdots,a+bw^{n-1}\}$，其中 $b\neq 0$，$w=\exp(2\pi i/n)$，$n>8$。若复平面 C 中的两个非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 满足 $E(S,f)=E(S,g)$，则 $(g-a)=t(f-a)$，其中 $t^n=1$ 或 $(f-a)(g-a)\equiv s$，其中 $s^n=b^{2n}$。

此定理详细证明过程可参见文献[4]。

定理 B 中我们可以得知存在一个元素个数大于 8 的集合，当两个非常数亚纯函数 CM 分担这个集合的时候，这两个亚纯函数互为分式线性变换。那么，是否存在一个元素个数小于 8 的集合，我们能得到同样的结论。本文在加入一些限定条件后，给予了肯定的回答。定理如下：

定理 1：设 n 为不小于 6 的整数，若非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 $S=\{w|w^n=1\}$ 为 CM 分担值集，且 $\Theta(\infty,f)>1/2$，$\Theta(\infty,g)>1/2$，则 $T(r,f)\sim T(r,g)$。$(r\notin E,r\to\infty,mesE<+\infty)$。

2. 引理

引理 1：若两个非常数亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 以 1 为 CM 分担值，则必有以下结论之一发生：

(i) $g(z)$ 为 $f(z)$ 的分式线性变换；

(ii) $$(1-o(1))T(r)\le N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}(r,f)+2\bar{N}(r,g)+S(r,f)+S(r,g),\tag{1}$$

其中 $T(r)=\max\{T(r,f),T(r,g)\}$。$(r\notin E,r\to\infty,mesE<+\infty)$。

证明：

令

$$H=\left\{\frac{f''}{f'}-2\frac{f'}{f-1}\right\}-\left\{\frac{g''}{g'}-2\frac{g'}{g-1}\right\}, \tag{2}$$

若 $H\equiv 0$，则

$$\frac{f''}{f'}-2\frac{f'}{f-1}\equiv\frac{g''}{g'}-2\frac{g'}{g-1}, \tag{3}$$

对上式左右两边分别积分两次得 $g(z)$ 为 $f(z)$ 的分式线性变换，结论(i)成立。

若 $H\not\equiv 0$，则由对数导数引理知：

$$m(r,H)=S(r,f)+S(r,g), \tag{4}$$

而 H 的极点为单极点，且仅来自于 f，g 的极点处或 f'，g' 的零点但非 $(f-1)(g-1)$ 的零点处。兹用 $\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ 表示 f' 的零点但非 $f(f-1)$ 的零点者所成精简密指量，$\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)$ 作类似表示。则有

$$N(r,H)\le\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g), \tag{5}$$

于是

$$T(r,H)\le\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g), \tag{6}$$

因 f 与 g 公共 1 值点处 H 取零值，于是

$$\begin{aligned}\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)&=\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le N\left(r,\frac{1}{H}\right)\le T(r,H)+O(1)\\&\le\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&\quad+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g),\end{aligned} \tag{7}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理知：

$$\begin{aligned}T(r,f)+T(r,g)\le{}&\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\\&+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)-\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)-\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g),\end{aligned} \tag{8}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-1}\right)=2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\\&\le N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}(r,f)+\bar{N}(r,g)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{g}\right)\\&+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\bar{N}_0\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,f)+S(r,g),\end{aligned} \tag{9}$$

由(8)，(9)式有

$$T(r,f)+T(r,g)\le N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}(r,f)+2\bar{N}(r,g)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+S(r,f)+S(r,g), \tag{10}$$

因为

$$N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)\le T(r,f)+O(1), \tag{11}$$

$$N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)=N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)\le T(r,g)+O(1), \tag{12}$$

再由(10)式得

$$(1-o(1))T(r)\le N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\bar{N}(r,f)+2\bar{N}(r,g)+S(r,f)+S(r,g), \tag{13}$$

$$(r\notin E, r\to\infty, mesE<+\infty)$$

结论(ii)成立。

3. 定理 1 的证明

证明：

令

$$P(w)=w^n-1, \tag{14}$$

则

$$P'(w)=nw^{n-1}, P(0)=-1, \tag{15}$$

因此，$P(w)$无重零点。

令

$$F=f^n, G=g^n, \tag{16}$$

由于 f 和 g 以 S 为 CM 分担值集，故 F 和 G 以 1 为 CM 分担值。故

$$T(r,f)=\frac{1}{n}T(r,F)+S(r,F), \tag{17}$$

$$T(r,g)=\frac{1}{n}T(r,G)+S(r,G), \tag{18}$$

兹对 F 和 G 应用引理知：(i)或(ii)成立。

若(i)成立，则 G 为 F 的分式线性变换，因此

$$T(r,F)\sim T(r,G), (r\notin E, r\to\infty, mesE<+\infty) \tag{19}$$

再由(17)，(18)式有

$$T(r,f)\sim T(r,g), (r\notin E, r\to\infty, mesE<+\infty) \tag{20}$$

若(ii)成立，则由(16)，(17)式，已知条件及 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\bar{N}(r,F)=\bar{N}(r,f)\le\frac{1}{2n}T(r,F)+S(r,F), \tag{21}$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)=2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le\frac{2}{n}T(r,F)+S(r,F), \tag{22}$$

类似地，有

$$\bar{N}(r,G)=\bar{N}(r,g)\le\frac{1}{2n}T(r,G)+S(r,G), \tag{23}$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)=2\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\le\frac{2}{n}T(r,G)+S(r,G), \tag{24}$$

令

$$T(r)=\max\{T(r,F),T(r,G)\}, \tag{25}$$

再由(21)，(22)，(23)，(24)式有

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+2\bar{N}(r,F)+2\bar{N}(r,G)\le\left(\frac{6}{n}+o(1)\right)T(r), \tag{26}$$

由已知条件知 $\frac{6}{n}\le 1$，故

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+2\bar{N}(r,F)+2\bar{N}(r,G)\le(1+o(1))T(r), \tag{27}$$

又由(1)式知

$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+2\bar{N}(r,F)+2\bar{N}(r,G)\ge(1-o(1))T(r), \tag{28}$$

由(27)，(28)式得

$$(1-o(1))T(r)\le(1+o(1))T(r), \tag{29}$$

因此

$$T(r,F)\sim T(r,G),(r\notin E,r\to\infty,mesE<+\infty) \tag{30}$$

再由(17)，(18)式有

$$T(r,f)\sim T(r,g),(r\notin E,r\to\infty,mesE<+\infty) \tag{31}$$

定理 1 得证。

参考文献

[1] Gross, F. (1968) On the Distribution of Values of Meromorphic Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **131**, 199-214. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1968-0220938-4

[2] Gross, F. (1977) Factorization of Meromorphic Functions and Some Open Problems. In: *Complex Analysis*, *Lecture Notes in Mathematics*, *Vol.* 599, Springer, 51-69. https://doi.org/10.1007/bfb0096825

[3] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[4] 仪洪勋. 亚纯函数的唯一性和 Gross 的一个问题[J]. 中国科学(A), 1994, 24(5): 241-246.