Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 1002-1006
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010118

Gorenstein (*m*, *n*)-投射模

杨 强

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: Y114211143@163.com

收稿日期：2020年10月8日；录用日期：2020年10月23日；发布日期：2020年10月30日

摘 要

本文引入了Gorenstein (*m*, *n*)-投射模的概念。在强左(*m*, *n*)-凝聚环上研究了这类模的一些性质，并给出了Gorenstein (*m*, *n*)-投射模的一些等价刻画。

关键词

(*m*, *n*)-内射模，Gorenstein (*m*, *n*)-投射模，强(*m*, *n*)-凝聚环

Gorenstein (*m*, *n*)-Projective Modules

Qiang Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: Y114211143@163.com

Received: Oct. 8th, 2020; accepted: Oct. 23rd, 2020; published: Oct. 30th, 2020

Abstract

In this article, the notion of Gorenstein (*m*, *n*)-projective modules is introduced. Some properties of such modules are investigated over strongly left (*m*, *n*)-coherent rings, and some equivalent characterizations of Gorenstein (*m*, *n*)-projective modules are given.

Keywords

(*m*, *n*)-Injective Module, Gorenstein (*m*, *n*)-Projective Module, Strongly (*m*, *n*)-Coherent Ring

文章引用：杨强. Gorenstein (*m*, *n*)-投射模[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 1002-1006.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010118

1. 引言

作为有限生成投射模的一种推广，Auslander和Bridger在文献[1]中研究了双边Noether环上Gorenstein维数为 0 的有限生成模。1995 年，在文献[2]中 Enochs 和 Jenda 在一般环上引入 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念。自此，以 Gorenstein 投射(内射)模为研究对象的 Gorenstein 同调代数受到了学者们的广泛关注[1]-[6]。

2001 年，作为 n-内射模，P-内射模，FP-内射模的统一推广，Chen，Ding，Li 和 Zhou 在文献[7]中引入了(m, n)-内射模的概念。2005 年，Zhang 等人在文献[8]中证明了在(m, n)-凝聚环上，(m, n)-内射左 R-模的示性模是(m, n)-平坦的。同年，在文献[9]中，Mao 和 Ding 在凝聚环上研究了模的 FP-投射维数以及环的 FP-投射整体维数。2006 年，Mao 和 Ding 在文献[10]中证明了 $\left(P_{m,n}, I_{m,n}\right)$ 是完备的余挠理论，其中 $P_{m,n}$ 是(m, n)-投射模类，$I_{m,n}$ 是(m, n)-内射模类。2014 年，曾月迪在文献[11]中引入强(m, n)-凝聚环的概念，并证明了在强(m, n)-凝聚环上，$\left(P_{m,n}, I_{m,n}\right)$ 是完备遗传余挠对。2020 年，杨强和赵仁育在文献[12]中研究了 Gorenstein (m, n)-内射模，并在强(m, n)-凝聚环上利用 Gorenstein (m, n)-内射模给出了左(m, n)-内射环的一些等价刻画。

受上述研究的启发，本文引入 Gorenstein (m, n)-投射模的概念。证明了 Gorenstein (m, n)-投射模关于直和封闭；在强左(m, n)-凝聚环和任意环上，给出了 Gorenstein (m, n)-投射模的等价刻画。

2. 预备知识

设 m 和 n 是任取的两个正整数，R 是具有单位元的结合环，所涉及的模均为左 R-模。用 $\mathrm{id}_R(M)$ 表示模 M 的内射维数，用 $\tilde{I}$ 表示所有内射维数有限的左 R-模类，对于左 R-模 M，用 $M^{+}=\mathrm{Hom}_Z(M, Q/Z)$ 表示 M 的示性模。

定义 2.1 称左 R-模 M 是(m, n)-表示的，如果存在左 R-模的短正合序列 $0 \to K \to R^m \to M \to 0$，其中 K 是 n-生成的。

定义 2.2 称左 R-模 M 是(m, n)-内射的，如果对任意的(m, n)-表示左 R-模 P，$\mathrm{Ext}_R^1(P, M)=0$。

定义 2.3 称左 R-模 N 是(m, n)-投射的，如果对任意的(m, n)-内射左 R-模 M，$\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0$。

注记 2.4 (1) (m, n)-表示模是(m, n)-投射模；

(2) (m, n)-投射模关于直和，直和项和扩张封闭。

定义 2.5 称环 R 是左(m, n)-凝聚环，如果左 R-模 R^m 的每一个 n-生成子模是有限表示的。

定义 2.6 称环 R 是强左(m, n)-凝聚环，如果 ${}_R R^m$ 的每一个 n-生成子模是(m, n)-表示的。

3. Gorenstein (m, n)-投射模及其性质

定义 3.1 称左 R-模 M 是 Gorenstein (m, n)-投射模，如果存在(m, n)-投射左 R-模的正合序列

$$\mathfrak{I} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots,$$

使得 $M=\mathrm{Im}\left(P_0 \to P_{-1}\right)$，并对任意的 $E \in \tilde{I} \cap I_{m,n}$，$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{I}, E)$ 正合。

Gorenstein (m, n)-投射左 R-模的类记为 $GP_{m,n}$。

注记 3.2 (1) (m, n)-投射左 R-模是 Gorenstein (m, n)-投射左 R-模；

(2) 若 M 是 Gorenstein (m, n)-投射左 R-模，则对任意 $E \in \tilde{I} \cap I_{m,n}$，$\mathrm{Ext}_R^1(M, E)=0$；

(3) 若 $\Im=\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots$是(*m*, *n*)-投射左 *R*-模的正合序列，并对任意的 $E\in\tilde{I}\bigcap I_{m,n}$，$\mathrm{Hom}_R(\Im,E)$ 正合，则每个箭头的像，核，余核都是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模；

(4) Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模关于直积封闭。

命题 3.3 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模关于直和封闭。

证明 设$(M_i)_{i\in\mathrm{I}}$是一簇 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模，令 $M=\oplus_{i\in\mathrm{I}}M_i$。对任意的 $i\in\mathrm{I}$，因为 M_i 是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模，所以存在(*m*, *n*)-投射左 *R*-模的正合序列

$$\Im^i=\cdots\to P_1^i\to P_0^i\to P_{-1}^i\to P_{-2}^i\to\cdots,$$

使得 $M_i\cong\mathrm{Im}\left(P_0^i\to P_{-1}^i\right)$，并对任意的 $E\in\tilde{I}\bigcap I_{m,n}$，$\mathrm{Hom}_R\left(\Im^i,E\right)$ 正合。于是有正合序列

$$\oplus_{i\in\mathrm{I}}\Im^i=\cdots\to\oplus_{i\in\mathrm{I}}P_1^i\to\oplus_{i\in\mathrm{I}}P_0^i\to\oplus_{i\in\mathrm{I}}P_{-1}^i\to\oplus_{i\in\mathrm{I}}P_{-2}^i\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}\left(\oplus_{i\in\mathrm{I}}P_0^i\to\oplus_{i\in\mathrm{I}}P_{-1}^i\right)$，并对任意的 $E\in\tilde{I}\bigcap I_{m,n}$，$\mathrm{Hom}_R\left(\oplus_{i\in\mathrm{I}}\Im^i,E\right)\cong\Pi_{i\in\mathrm{I}}\left(\Im^i,E\right)$ 正合。因此 M 是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模。

命题 3.4 设 *R* 是强左(*m*, *n*)-凝聚环，*M* 是左 *R*-模，则以下成立：

(1) 若 *M* 是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模，则对任意的 $E\in\tilde{I}\bigcap I_{m,n}$，任意的 $i\geq1$，$\mathrm{Ext}_R^1(M,E)=0$；

(2) 对任意左 *R*-模的正合序列 $0\to N\to G_{k-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to0$，$G_i\left(0\leq i\leq k-1\right)$ 是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射模，则对任意的 $E\in\tilde{I}\bigcap I_{m,n}$，以及任意的 $i>0$，$\mathrm{Ext}_R^i(N,E)\cong\mathrm{Ext}_R^{k+i}(M,E)$。

证明 (1) 设 *M* 是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模，*E* 是(*m*, *n*)-内射左 *R*-模，且 $\mathrm{id}_R(E)=k<\infty$，考虑下列正合序列

$$0\to M\to P_0\to P_1\to\cdots\to P_{k-1}\to P_0\to N\to0,$$

其中 $P_j\left(0\leq i\leq k-1\right)$ 是(*m*, *n*)-投射左 *R*-模，因为 *R* 是强左(*m*, *n*)-凝聚环，由[11]定理 2.2 知$\left(P_{m,n},I_{m,n}\right)$是完备遗传余挠对，所以 $\mathrm{Ext}_R^{i\geq1}\left(P_j,E\right)=0, 0\leq j\leq k-1$。故对任意的 $i\geq1$，$\mathrm{Ext}_R^i(N,E)\cong\mathrm{Ext}_R^{k+i}(M,E)$。又因为 $\mathrm{id}_R(E)=k<\infty$，所以对任意的 $i\geq1$，$\mathrm{Ext}_R^i(N,E)\cong\mathrm{Ext}_R^{k+i}(M,E)=0$。

(2) 的证明由(1)可得。

定理 3.5 设 *R* 是强左(*m*, *n*)-凝聚环，*M* 是左 *R*-模，则 *M* 是 Gorenstein (*m*, *n*)-投射左 *R*-模当且仅当存在(*m*, *n*)-投射左 *R*-模的正合序列

$$\Im=\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots,$$

使得 $M=\mathrm{Im}\left(P_0\to P_{-1}\right)$。

证明 $\Rightarrow$)显然。

$\Leftarrow$)设 *N* 是(*m*, *n*)-内射左 *R*-模，且 $\mathrm{id}_R(N)=k<\infty$。下证 $\mathrm{Hom}_R(\Im,N)$ 正合，对 *k* 进行归纳总结。当 $k=0$ 时，结论显然成立。设 $k\geq1$，考虑短正合序列

$$0\to N\to E\to L\to0,$$

其中 *E* 是内射模，$\mathrm{id}_R(L)=k-1$。则有短正合序列

$$0\to L^+\to E^+\to N^+\to0,$$

因为 *R* 是强左(*m*, *n*)-凝聚环，由[8]定理 5.7 知，E^+ 和 N^+ 是(*m*, *n*)-平坦模，故 L^+ 是(*m*, *n*)-平坦模，再由[8]定理 5.7 知，*L* 是(*m*, *n*)-内射模。由归纳假设知 $\mathrm{Hom}_R(\Im,L)$ 正合。于是存在复形的短正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(\Im,N)\to\mathrm{Hom}_R(\Im,E)\to\mathrm{Hom}_R(\Im,L)\to0,$$

其中 $\mathrm{Hom}_R(\Im,E)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(\Im,L)$ 正合，从而由[13]定理 6.3 知，$\mathrm{Hom}_R(\Im,N)$ 正合。因此 *M* 是 Gorenstein

(m, n)-投射的。

推论 3.6 设 R 是强左(m, n)-凝聚环，M 是左 R-模，则以下等价：

(1) M 是 Gorenstein (m, n)-投射模；

(2) 存在左 R-模的正合序列 $0 \to M \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$，其中每个 P_i 是(m, n)-投射模；

(3) 存在左 R-模的短正合序列 $0 \to M \to P \to L \to 0$，其中 P 是(m, n)-投射模，L 是 Gorenstein (m, n)-投射模。

证明 $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2)$显然。

$(2) \Rightarrow (1)$设 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ 是(m, n)-投射分解。由(2)知，存在左 R-模的正合序列

$$0 \to M \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots,$$

其中 $P_{-1}, P_{-2}, \cdots$ 是(m, n)-投射左 R-模，于是有左 R-模的正合序列

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots,$$

使得 $M = \operatorname{Im}(P_0 \to P_{-1})$。故由定理 3.5 知 M 是 Gorenstein (m, n)-投射模。

命题 3.7 设 R 是强左(m, n)-凝聚环，$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ 是左 R-模的短正合序列。则以下成立：

(1) 若 M_1 是 Gorenstein (m, n)-投射模，M_3 是(m, n)-投射模，则 M_2 是 Gorenstein (m, n)-投射模；

(2) 若 M_3 是 Gorenstein (m, n)-投射模，M_2 是(m, n)-投射模，则 M_1 是 Gorenstein (m, n)-投射模。

证明 (1) 因为 M_1 是 Gorenstein (m, n)-投射模，所以存在左 R-模的短正合序列 $0 \to M_1 \to P \to N \to 0$，其中 P 是(m, n)-投射模，则 N 是 Gorenstein (m, n)-投射模。考虑下列推出图 1：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] & 0 \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Figure 1. Pushout diagram
图 1. 推出图

在短正合序列 $0 \to P \to Q \to M_3 \to 0$ 中，P 和 M_3 是(m, n)-投射模，由[9]注记 2.8 知，Q 是(m, n)-投射模。在短正合序列 $0 \to M_2 \to Q \to N \to 0$ 中，因为 N 是 Gorenstein (m, n)-投射模，所以由推论 3.6 知，M_2 是 Gorenstein (m, n)-投射模。

(2) 类似地，由推论 3.6 可得。

定理 3.8 设 R 环，则以下等价：

(1) 每个左 R-模是 Gorenstein (m, n)-投射的；

(2) 环 R 满足以下两个条件：

(i) 每个内射左 R-模是(m, n)-投射的；

(ii) 每个内射维数有限的(m, n)-内射左 R-模是内射的。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 M 是内射左 R-模。则有(1)知 M 是 Gorenstein (m, n)-投射模。于是存在短正合序列

$$0 \to M \to P \to N \to 0,$$

其中 P 是(m, n)-投射模，由于 M 是内射模，所以该正合序列可裂。因此 M 是 P 的直和项，由注记 2.4 (2)知，M 是(m, n)-投射模。故(i)成立。设 E 是内射维数有限的(m, n)-内射左 R-模，N 是一个左 R-模。由(1)知，N 是 Gorenstein (m, n)-投射模。于是由注记 3.2 (2)知，$\mathrm{Ext}_R^1(N, E) = 0$，所以 E 是内射模，故(ii)成立。

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 M 是左 R-模。$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ 是 M 的一个(m, n)-投射分解，$0 \to M \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$ 是 M 的一个内射分解，由(i)知存在(m, n)-投射左 R-模的正合序列

$$\mathfrak{I} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \to P_{-1})$。设 E 内射维数有限的(m, n)-内射左 R-模，由(ii)知，E 是内射模，所以 $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{I}, E)$ 正合。因此 M 是 Gorenstein (m, n)-投射模。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11861055)。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. In: Memoirs of the American Mathematical Society, 94. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enoch, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift* **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Christensen, L.W. (2000) Gorenstein Dimension. In: *Lecture Notes in Math*, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0103984

[4] Enoch, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algerbra. Walter de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[5] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[6] Holm, H. (2004) Gorenstein Derived Functors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 1913-1923. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07317-4

[7] Chen, J.L., Ding, N.Q., Li, Y.L. and Zhou, Y.Q. (2001) On (m, n)-Injectivity of Modules. *Communications in Algebra*, **29**, 5589-5603. https://doi.org/10.1081/AGB-100107948

[8] Zhang, X.X., Chen, J.L. and Zhang, J. (2005) On (m, n)-Injective Modules and (m, n)-Coherent Rings. *Algebra Colloquium*, **12**, 149-160. https://doi.org/10.1142/S1005386705000143

[9] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2005) Fp-Projective Dimensions. *Communications in Algebra*, **33**, 1153-1170. https://doi.org/10.1081/AGB-200053832

[10] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2006) On Relative Injective Modules and Relative Coherent Rings. *Communications in Algebra*, **34**, 2531-2545. https://doi.org/10.1080/00927870600651208

[11] 曾月迪. 强(m, n)-凝聚环[J]. 江南大学学报(自然科学版), 2014, 13(5): 611-615.

[12] 杨强, 赵仁育. Gorenstein (m, n)-内射模[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(12): 18-22.

[13] Rotman, J.J. (1979) An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, New York.