Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(12), 1176-1182
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1012140

含Euler函数的非线性不定方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 的解的个数及范围

鲁 燕[1]，高子义[2]，姚海元[1*]

[1]西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
[2]西北师范大学物理与电子工程学院，甘肃 兰州
Email: *hyyao@nwnu.edu.cn

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月18日；发布日期：2020年12月25日

摘 要

Euler函数 $\varphi(n)$ 是数论中一个非常重要的函数，本文主要讨论了非线性不定方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 解数(即正整数解的个数)有限的充要条件和此时解的范围。从而对给定的系数a，b，c，当不定方程解数有限时，我们在给定的范围内通过计算机穷举给出方程的所有正整数解。

关键词

Euler函数，不定方程，解数，解的范围

The Number and Range of the Solutions of the Nonlinear Diophantine Equation $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ with Euler Function

Yan Lu[1], Ziyi Gao[2], Haiyuan Yao[1*]

[1]College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
[2]College of Physics and Electronic Engineer, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: *hyyao@nwnu.edu.cn

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 18th, 2020; published: Dec. 25th, 2020

*通讯作者。

文章引用: 鲁燕, 高子义, 姚海元. 含 Euler 函数的非线性不定方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 的解的个数及范围[J]. 理论数学, 2020, 10(12): 1176-1182. DOI: 10.12677/pm.2020.1012140

Abstract

Euler function $\varphi(n)$ is a very important function in number theory. In this paper, we mainly discuss the necessary and sufficient conditions for the nonlinear Diophantine equation $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ which has the finite number of positive integer solutions and the range of solutions whenever the number of solutions is limited. Therefore, for a given coefficient a, b, c, searching a given range by a computer, we can give all the positive integer solutions of the equation when the number of solutions is limited.

Keywords

Euler Function, Diophantine Equation, The Number of Positive Integer Solutions, The Range of Solutions

1. 引言

对任意正整数 n，令 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数，即在正整数 1 到 n 中与 n 互素的整数的个数。Euler 函数是数论中一个非常重要的函数，有关 $\varphi(n)$ 方程解的研究有很多，得到了不少有趣的结论。如文献[1]-[7]讨论了方程 $\varphi(mn)=k(\varphi(m)+\varphi(n))$ 当 $k=3,4,6,7,8,10,11,15$ 时所有的正整数解；文献[8] [9]讨论了方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)$ 当 $(a,b)=(7,9),(15,17)$ 时的所有正整数解；文献[10] [11] [12]讨论了方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$，当 $(a,b,c)=(5,6,16),(7,8,16),(9,16,24)$ 时的所有整数解；文献[13]中研究了当 b 为奇数时，方程 $\varphi(mn)=k_1\varphi(m)+k_2\varphi(n)+b$ 在有解的情况下 k_1,k_2,b 需要满足的条件，并举例给出了方程 $\varphi(mn)=4\varphi(m)+7\varphi(n)+8$ 的所有正整数解。然而目前的研究主要集中在对于具体给定的一组系数或满足一些特殊条件的一类系数组，求出方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 的所有整数解方面，很少考虑到该方程一般情形下的解数及解的范围问题。

本文主要讨论了方程 $\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c$ 解数(即正整数解的个数)有限的充要条件和此时解的范围。从而对给定的系数 a,b,c，我们可用计算机在给定的范围内穷举相应方程的所有正整数解。第一节给出了一些相关引理，第二节给出我们的主要定理，第三节给出了一些算例。

2. 相关引理

在本节中我们给出一些 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的基本性质。文中提到但未定义的一些概念和未引用的基本结论可以在教材[14]或手册[15]中找到。

引理 2.1 [16]对任意正整数 m 和 n，若 $m\mid n$，则 $\varphi(m)\mid\varphi(n)$。

引理 2.2 [16]对任意正整数 m 和 n，则 $\varphi(mn)=\dfrac{\gcd(m,n)\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(\gcd(m,n))}$。特别当 $\gcd(m,n)=1$ 时，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。其中 $\gcd(m,n)$ 表示 m 和 n 的最大公约数。

引理 2.3 [16]当 $n\ge 2$ 时，$\varphi(n)<n$。当 $n\ge 3$ 时，$\varphi(n)$ 必为偶数。

引理 2.4 [15]对于任意的除了 2 和 6 的正整数 n，则 $\varphi(n)\ge\sqrt{n}$。

推论 2.5 对于任意的正整数 n，满足 $n \le \varphi^2(n)+2$。

证明：由引理 2.4 可得对于任意的除了 2 和 6 的正整数 n，则 $\varphi(n)^2 \ge n$。因为 $\varphi(2)=1, \varphi(6)=2$，所以 $\varphi(2)^2=1, \varphi(6)^2=4$，所以结论成立。■

引理 2.6 [15]对于任意的正整数 n，当 $n>42$ 时，$\varphi(n)>n^{2/3}$。

在文献[15]第九页中的第 2 个公式 $\varphi(n)>n^{2/3}$ for $n>30$，通过计算机的有限穷举后发现当 $n=42$ 时不满足这个不等式，所以不等式 $\varphi(n)>n^{2/3}$ 满足的条件是 $n>42$。

推论 2.7 对于任意的正整数 n，则 $n<\varphi^{3/2}(n)+8$。

证明：由引理 2.6 可得，对于任意的正整数 n，当 $n>42$ 时，$n<\varphi(n)^{3/2}$。我们用计算机穷举当 $n \le 42$ 时，$\varphi(n)^{3/2}$ 的所有值，并且得到对于任意的正整数 n，$n<\varphi^{3/2}(n)+8$ 都成立。■

由推论 2.5 或推论 2.7，我们易得：

定理 2.8 对于给定的正整数 d，方程 $\varphi(n)=d$ 的解数有限。

根据引理 2.3，对所有大于 1 的奇数 d，方程 $\varphi(n)=d$ 无解。而 d 为正偶数时，方程 $\varphi(n)=d$ 也未必有解。根据推论 2.7，我们通过用数学软件 Mathematica 穷举得知，在 10,000 (含)以内使方程 $\varphi(n)=d$ **有解**的(/**无解**的)正偶数 d 有 2373 (/2627)个。此处我们仅列举 500 (含)以内使方程 $\varphi(n)=d$ **无解**的 93 个正偶数 d：14，26，34，38，50，62，68，74，76，86，90，94，98，114，118，122，124，134，142，146，152，154，158，170，174，182，186，188，194，202，206，214，218，230，234，236，242，244，246，248，254，258，266，274，278，284，286，290，298，302，304，308，314，318，322，326，334，338，340，350，354，362，364，370，374，376，386，390，394，398，402，404，406，410，412，414，422，426，428，434，436，446，450，454，458，470，472，474，482，484，488，494，496。

3. 定理及其证明

本节我们考察下述方程

$$\varphi(mn)=a\varphi(m)+b\varphi(n)+c \tag{1}$$

的解数及解数有限时解的范围。

引理 3.1 若不存在正整数 d，满足 $\varphi(d) \mid c$，且 $\frac{cd}{\varphi(d)}+ab=0$，则方程(1)的解数有限。

证明：设正整数对 (m,n) 是方程(1)的任一组解(若方程无解，则结论显然成立)。此时记 $d=\gcd(m,n)$，则由引理 2.1 知，必存在 $m_1,n_1 \in Z^+$，使 $\varphi(m)=m_1\varphi(d)$，$\varphi(n)=n_1\varphi(d)$。再由引理 2.2，方程(1)可化为

$$\varphi(d)(dm_1n_1-am_1-bn_1)=c,$$

从而有 $\varphi(d) \mid c$ 且 $(dm_1n_1-am_1-bn_1) \mid c$。设 $c_1=\frac{c}{\varphi(d)}$，则上述方程可继续化简为

$$dm_1n_1-am_1-bn_1=c_1, \tag{2}$$

方程两边同时乘以 d 后再加上 ab，方程进一步可化为

$$(dm_1-b)(dn_1-a)=c_1d+ab. \tag{3}$$

此时必有 $dm_1-b \mid c_1d+ad, dn_1-a \mid c_1d+ad$。再由题设知 $c_1d+ab=\frac{c}{\varphi(d)}d+ab \ne 0$，则其因子对必有限，故满足条件的正整数对 (m_1,n_1)——方程(3)的解数——必有限(因对于给定的因子对得到的 m_1,n_1 可能不是正整数，故数量可能会更少)。又当 $c \ne 0$ 时，$\varphi(d) \mid c$，而当 $c=0$ 时方程(2)化简得 $d=\frac{a}{n_1}+\frac{b}{m_1} \le |a|+|b|$，

因而可能的$\varphi(d)$的取值只有有限个。因此正整数对$(\varphi(m),\varphi(n))=(m_1,n_1)\varphi(d)$必是有限的。最后由定理2.8知，方程(1)的解组$(m,n)$ (满足$(\varphi(m),\varphi(n))=(m_1,n_1)\varphi(d)$)必是有限的(可能无解)。■

引理 3.2 方程(1)的解数无限当且仅当存在正整数 d，使得$\varphi(d)\mid c,\dfrac{cd}{\varphi(d)}+ab=0$，且方程$\varphi(m)=\dfrac{b\varphi(d)}{d}(d\mid m)$或$\varphi(n)=\dfrac{a\varphi(d)}{d}(d\mid n)$有正整数解。

证明：必要性。设方程(1)有无穷多解，并任取其一解(m,n)。在与引理 3.1 的证明完全相同的记号和讨论下知，此时必有$c_1d+ab=\dfrac{c}{\varphi(d)}d+ab=0$。从而方程(3)化为

$$(dm_1-b)(dn_1-a)=0. \tag{4}$$

因而$dm_1-b=0$或$dn_1-a=0$。故$m_1=\dfrac{b}{d}$为正整数或$n_1=\dfrac{a}{d}$为正整数。因此有$\varphi(m)=m_1\varphi(d)=\dfrac{b\varphi(d)}{d}$或$\varphi(n)=n_1\varphi(d)=\dfrac{a\varphi(d)}{d}$。结论成立。

充分性。设存在正整数 d，使得$\varphi(d)\mid c,\dfrac{cd}{\varphi(d)}+ab=0$，且不妨设正整数 m 满足条件$\varphi(m)=\dfrac{b\varphi(d)}{d},d\mid m$。则易知对任意满足条件$\gcd(m,n)=d$的正整数 n (显然有无穷多个)，正整数对$(m_1,n_1)=\left(\dfrac{\varphi(m)}{\varphi(d)},\dfrac{\varphi(n)}{\varphi(d)}\right)$是方程(4)的解，从而正整数对$(m,n)$都是方程(1)的解(无穷多个)。

由引理 3.1 和引理 3.2，我们可得到本节第一个主要结论。

定理 3.3 方程(1)的解数有限当且仅当不存在正整数 d，使得$\varphi(d)\mid c,\dfrac{cd}{\varphi(d)}+ab=0$，且方程$\varphi(m)=\dfrac{b\varphi(d)}{d}(d\mid m)$或$\varphi(n)=\dfrac{a\varphi(d)}{d}(d\mid n)$有正整数解。■

下面我们进一步讨论当方程(1)的解数有限时，其解的范围。

定理 3.4 当方程(1)解数有限时，其解的范围为：

$$m\in\left[1,\left(|c|+|ab|+|b|\right)^{3/2}+8\right],\ n\in\left[1,\left(|c|+|ab|+|a|\right)^{3/2}+8\right].$$

证明：根据常数 c 是否为 0，我们分两种情形讨论。

情形 1：$c=0$。由定理 3.3 知，必有$ab\neq 0$。

此时记$d=\gcd(m,n)$，则方程(1)化为

$$dm_1n_1-am_1-bn_1=0. \tag{5}$$

两边同时乘以 d 化简为：

$$(dm_1-b)(dn_1-a)=ab. \tag{6}$$

当$a<0,b<0$时，由欧拉函数的定义可知方程(1)无解。

当$a>0,b<0$或$a<0,b>0$时。由方程(6)可知，当$dn_1-a=-1$时，$m_1=\dfrac{-ab+b}{d}$，由$\varphi(m)=m_1\varphi(d)$，得$\varphi(m)=\dfrac{\varphi(d)(-ab+b)}{d}\le|ab|+|b|$，由推论 2.7 得$m\in\left[1,\left(|ab|+|b|\right)^{3/2}+8\right]$。同理可得$n\in\left[1,\left(|ab|+|b|\right)^{3/2}+8\right]$

当 $a>0,b>0$ 时。在方程(6)中，当 $dn_1-a=1$ 时，$m_1=\frac{ab+b}{d}$，由 $\varphi(m)=\frac{ab+b}{d}\varphi(d)\le|ab|+|b|$，得 $\varphi(m)\in[1,|ab|+|b|]$，由推论 2.7 得 $m\in\left[1,(|ab|+|b|)^{3/2}+8\right]$。同理可得 $n\in\left[1,(|ab|+|a|)^{3/2}+8\right]$。

情形 2　$c\ne0$。此时方程(1)化为方程(3)，且由定理 2.3 知，$c_1d+ab\ne0$。

当 $c_1d+ab>0$ 时。由方程(3)得 $dm_1-b=\frac{c_1d+ab}{dn_1-a}$。可知当 $dn_1-a=1$ 时，m_1 取得最大值 $\frac{c_1d+ab+b}{d}$，故 $\varphi(m)=m_1\varphi(d)$ 取得最大值 $c+\frac{\varphi(d)(ab+b)}{d}\le|c|+|ab|+|b|$，所以 $\varphi(m)\in[1,(|c|+|ab|+|b|)]$，由推论 2.7 得 $m\in\left[1,(|c|+|ab|+|b|)^{3/2}+8\right]$。同理可得 $n\in\left[1,(|c|+|ab|+|a|)^{3/2}+8\right]$。

$c_1d+ab<0$ ($c\le0,c+ab<0$ 时，方程(1)有有限个解)，当 $dn_1-a=-1$ 时，$m_1=\frac{-c_1d-ab+b}{d}$，故 $\varphi(m)=m_1\varphi(d)=-c-\frac{\varphi(d)(ab-b)}{d}\le|c|+|ab|+|b|$，所以 $\varphi(m)\in[1,|c|+|ab|+|b|]$，由推论 2.7 得 $m\in\left[1,(|c|+|ab|+|b|)^{3/2}+8\right]$。同理可得 $n\in\left[1,(|c|+|ab|+|a|)^{3/2}+8\right]$。证毕。

注释：由定理 3.4 的证明过程我们可得以下特殊情形(表 1)：

1.为了简化证明过程和统一结果，定理 3.4 中给出的解的范围有些偏大，对于具体给定的系数 (a,b,c)，该范围可适当缩小。如 $(a,b,c)=(-2,-6,20)$ 时，具体讨论后解的范围为 $m\in[1,140],n\in[1,172]$ (实际上，其全部解 $(3,4),(4,3)$)，而定理中给出的解的范围是 $m\in[1,242],n\in[1,206]$。

2.以下情况方程(1)的解数有限(不包括无解)：

1) $c=0,ab\ne0$；

2) $c\ge0,c+ab>0$，特别当 $c=0,a=b>0$ 时，易知此时 $(2a,2a)$ 为方程(1)的一个解；

3) 当 $c\le0,c+ab<0$。

3.以下情况方程(1)无正整数解

1) $c\le0,a\le0,b\le0$；

2) a,b 都为偶数，c 为奇数；

3) (a,b,c) 为本原勾股数，即 $\gcd(a,b)=1$，且满足 $a^2+b^2=c^2$。

Table 1. Some examples
表 1. **一些算例**

解	(a,b,c) 的取值	解的上界		解数
		m	n	
无穷解	$(0,6,0)$	∞	∞	∞[注1]
	$(5,0,0)$	∞	∞	∞[注2]
	$(5,6,-30)$	∞	∞	∞[注3]
有限解 0	$(0,-6,0)$	22	8	0
	$(-2,-2,-1)$	26	26	0
	$(0,3,0)$	13	8	0

Continued

	$(4,7,8)$	289	260	46 [注4]
	$(3,5,-13)$	197	180	4 [注5]
	$(5,6,16)$	382	372	20 [注6]
≥1	$(11,11,0)$	1524	1524	27 [注7]
	$(7,7,0)$	427	427	15 [注8]
	$(4,4,0)$	97	97	33 [注9]
	$(7,9,0)$	618	593	67 [注10]

注 1：全部解为：$\{(m,n)\mid m=7,9,14,18,\ \gcd(m,n)=1\}$，或$\{(m,n)\mid m=12,\ \gcd(m,n)=3\}$，或$\{(m,n)\mid m=6,\ \gcd(m,n)=6\}$；

注 2：全部解为：$\{(m,n)\mid n=5,10,\ \gcd(m,n)=5\}$；

注 3：全部解为：$\{(m,n)\mid m=7,9,14,18,\ \gcd(m,n)=1\}$，$\{(4,22),(6,22),(20,2),(24,2),(30,2),(38,4),(38,6),(54,4)\}$；

注 4：方程 $\varphi(mn)=4\varphi(m)+7\varphi(n)+8$ 的所有整数解为：

$$\begin{aligned}(x,y)=\;&(15,41),(16,41),(20,41),(24,41),(30,41),(16,55),(24,55),(16,75),(15,82),(15,88),\\&(11,17),(11,32),(11,34),(11,40),(11,48),(11,60),(22,17),(17,15),(17,16),(17,20),\\&(17,24),(17,30),(32,15)(34,15),(8,70),(8,78),(8,90),(10,52),(10,56),(10,72),\\&(10,78),(10,84),(12,70),(9,48),(9,60),(15,24),(24,15),(27,12),(8,52),(8,84),\\&(12,52),(12,56),(8,56),(8,72),(10,20),(10,30).\end{aligned}$$

注 5：方程 $\varphi(mn)=3\varphi(m)+5\varphi(n)-13$ 的所有整数解为：

$$(x,y)=(16,2),(20,2),(24,2),(30,2).$$

注 6：方程 $\varphi(mn)=5\varphi(m)+6\varphi(n)+16$ 的所有整数解为：

$$\begin{aligned}(x,y)=\;&(8,38),(8,54),(10,38),(10,54),(12,38),(15,29),(15,58),(16,29),(20,10),(20,29),\\&(24,29),(30,10),(30,29),(48,138),(53,7),(53,9),(53,14),(53,18),(60,138),(75,12).\end{aligned}$$

注 7：方程 $\varphi(mn)=11\varphi(m)+11\varphi(n)$ 的全部整数解是：

$$\begin{aligned}(x,y)=\;&(13,161),(13,201),(13,207),(13,268),(13,322),(13,402),(13,414),(21,268),(26,161),\\&(26,201),(26,207),(36,161),(161,13),(201,13),(207,13),(268,13),(322,13),(402,13),\\&(414,13),(268,21),(161,26),(201,26),(207,26),(161,36),(22,22),(33,44),(44,33).\end{aligned}$$

注 8：方程 $\varphi(mn)=7\varphi(m)+7\varphi(n)$ 的所有整数解为：

$$\begin{aligned}(x,y)=\;&(87,16),(87,20),(116,15),(16,87),(20,87),(15,116),(8,58),(10,58),\\&(12,58),(58,8),(58,10),(58,12),(21,28),(28,21),(14,14).\end{aligned}$$

注 9：方程 $\varphi(mn)=4\varphi(m)+4\varphi(n)$ 的所有整数解为：

$$\begin{aligned}(x,y)=\;&(7,13),(7,26),(7,36),(14,13),(18,13),(9,13),(9,26),(9,28),(13,7),(26,7),(36,7),\\&(13,14),(13,18)(13,9),(26,9),(28,9),(15,16),(8,10),(10,12),(10,8),(12,10),(12,15),\\&(15,12),(8,12),(12,8),(5,40),(5,60),(40,5),(60,5),(6,12),(12,6),(8,8),(16,15).\end{aligned}$$

注 10：方程 $\varphi(mn)=7\varphi(m)+9\varphi(n)$ 的所有整数解为：

$$\begin{aligned}(x,y)=&(73,15),(73,16),(73,20),(73,24),(73,30),(91,15),(91,16),(91,20),(91,24),(91,30),\\&(95,16),(95,24),(111,16),(111,20),(117,16),(117,20),(135,16),(135,20),(146,15),\\&(148,15),(152,15),(182,15),(31,11),(31,22),(31,11),(62,11),(17,32),(17,40),\\&(17,48),(17,60),(32,17),(40,17),(48,17),(60,17),(13,29),(13,58),(21,29),(21,58),\\&(26,29),(28,29),(36,29),(42,29),(11,71),(11,142),(22,71),(74,8),(74,10),(74,12),\\&(76,10),(114,8),(114,10),(126,8),(126,10),(16,30),(30,16),(76,8),(108,8),(76,12),\\&(16,20),(20,16),(20,24),(24,20),(35,15),(35,20),(35,30),(45,20),(70,15),(16,16).\end{aligned}$$

参考文献

[1] 张四保. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的正整数解[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(20): 302-305.

[2] 官春梅, 张四保. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的两个方程[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(9): 221-225.

[3] 孙树东. 一个与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的方程的正整数解[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2015, 16(2): 161-164.

[4] 张四保, 杜先存. 一个包含 Euler 函数方程的正整数解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2015, 49(4): 497-501.

[5] 郑璐, 高丽, 郭梦媛. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的非线性方程的正整数解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2018, 34(2): 172-176.

[6] 高丽, 张佳凡. Euler 函数方程 $\varphi(xy)=11(\varphi(x)+\varphi(y))$ 的正整数解[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2017, 37(5): 13-19.

[7] 袁合才, 宋倩倩, 贾媛媛. 欧拉函数方程 $\varphi(ab)=15(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2017, 26(4): 1-5.

[8] 白继文, 赵西卿. 与 Euler 函数有关的一个方程的正整数解[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2017, 36(2): 5-7.

[9] 袁合才, 李培峦. 二元变系数欧拉函数方程 $\varphi(ab)=15\varphi(a)+17\varphi(b)$ 的正整数解[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版), 2018, 38(2): 5-8+13.

[10] 夏衣旦·莫合德, 张四保, 熊满玉. 一个有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的非线性方程的解[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2018, 39(2): 4-7.

[11] 郑璐, 高丽, 郭梦媛. 关于 Euler 方程 $\varphi(mn)=5\varphi(m)+6\varphi(n)+16$ 的整数解[J]. 江西科学, 2018, 36(4): 588-590.

[12] 姜莲霞. 包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的一个非线性方程的正整数解[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2018, 19(6): 719-723.

[13] 张四保, 杨燕妮, 席小忠. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的几个非线性方程[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2019, 49(1): 122-126.

[14] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论(第 3 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[15] Sándor, J., Mitrinović, D.S. and Crstici, B. (1995) Handbook of Number Theory I. Springer, Berlin.

[16] Rosen, K.H. (2005) Elementary Number Theory and Its Applications. Pearson Education, Inc, Addison Wesley, Bostoon.