Pure Mathematics 理论数学, **2020, 10(9), 847-851**
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.109098

关于最大公因式的一个命题的推广

杨继明

玉溪师范学院数学系，云南 玉溪
Email: jmy1963@163.com

收稿日期：2020年8月17日；录用日期：2020年9月8日；发布日期：2020年9月15日

摘 要

最大公因式是高等代数的重要内容之一。本文推广了关于最大公因式的一个命题。

关键词

最大公因式，命题，推广

A Generalization of a Proposition of the Greatest Common Factor

Jiming Yang

Department of Mathematics, Yuxi Normal University, Yuxi Yunnan
Email: jmy1963@163.com

Received: Aug. 17th, 2020; accepted: Sep. 8th, 2020; published: Sep. 15th, 2020

Abstract

The greatest common factor is an important part of advanced algebra. This paper generalizes a proposition of the greatest common factor.

Keywords

The Greatest Common Factor, Proposition, Generalization

文章引用: 杨继明. 关于最大公因式的一个命题的推广[J]. 理论数学, 2020, 10(9): 847-851.
DOI: 10.12677/pm.2020.109098

1. 引言

文[1]中有这样一个定理：若 a,b,c 是三个整数，且 $(a,c)=1$，b,c 至少有一个不为零，则 $(ab,c)=(b,c)$。文[2]把这个定理作了推广。通过类比，本文对高等代数多项式理论中相应结果进行讨论。

2. 主要结果及应用

本文中讨论的多项式都是数域 P 上的多项式。在多项式理论中有这样的一个命题：

命题 若 $f(x),g(x),h(x)$ 是三个多项式，且 $(f(x),h(x))=1$，$g(x),h(x)$ 至少有一个不为零多项式，则 $(f(x)g(x),h(x))=(g(x),h(x))$。

该命题的证明可参阅文[3]。

引理[3] 设 $f(x),g(x)$ 不全为零多项式，多项式 $h(x)$ 的首项系数为 1，则

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x). \tag{1}$$

文[3]给出该引理的一个证明，下面再给出一个证明。

证 易知 $(f(x),g(x))h(x)\mid f(x)h(x),(f(x),g(x))h(x)\mid g(x)h(x)$，故

$$(f(x),g(x))h(x)\mid(f(x)h(x),g(x)h(x)).$$

另一方面，存在多项式 $u(x),v(x)$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

故

$$(f(x),g(x))h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x).$$

于是 $(f(x)h(x),g(x)h(x))\mid(f(x),g(x))h(x)$。因此，(1)式成立。

把以上这个命题进行推广，就可以得到如下几个定理。

定理 1 设 $f(x),g(x),h(x)$ 是三个多项式，$f(x),h(x)$ 不全为零多项式，$g(x),h(x)$ 也不全为零多项式，且 $((f(x),h(x)),(g(x),h(x)))=1$，则

$$(f(x)g(x),h(x))=(f(x),h(x))(g(x),h(x)). \tag{2}$$

证 因 $f(x),h(x)$ 不全为零多项式，$g(x),h(x)$ 也不全为零多项式，故 $f(x)g(x),h(x)$ 不全为零多项式，于是 $(f(x)g(x),h(x)),(f(x),h(x))$ 与 $(g(x),h(x))$ 都存在。下面首先证明

$$(f(x),h(x))(g(x),h(x))\mid(f(x)g(x),h(x)). \tag{3}$$

因 $(f(x),h(x))\mid f(x)g(x),(f(x),h(x))\mid h(x)$，故 $(f(x),h(x))\mid(f(x)g(x),h(x))$。同理，$(g(x),h(x))\mid(f(x)g(x),h(x))$。又因 $((f(x),h(x)),(g(x),h(x)))=1$，故(3)式成立。

再证

$$(f(x)g(x),h(x))\mid(f(x),h(x))(g(x),h(x)). \tag{4}$$

由引理得

$$(f(x),h(x))(g(x),h(x))=(f(x)(g(x),h(x)),h(x)(g(x),h(x))),$$

故要证(4)成立，只需证明

$$(f(x)g(x),h(x))\mid(f(x)(g(x),h(x)),h(x)(g(x),h(x))). \tag{5}$$

下面先证

$$\left(f(x)g(x),h(x)\right)\mid f(x)\left(g(x),h(x)\right). \tag{6}$$

当 $f(x)$ 为零多项式时，结论显然正确。下面设 $f(x)$ 不为零多项式，a 为多项式 $f(x)$ 的首项系数，$f_1(x)=\frac{1}{a}f(x)$。因为 $\left(f(x)g(x),h(x)\right)\mid f(x)g(x),\left(f(x)g(x),h(x)\right)\mid f(x)h(x)$，所以由引理得

$$\left(f(x)g(x),h(x)\right)\mid\left(f(x)g(x),f(x)h(x)\right)=f_1(x)\left(ag(x),ah(x)\right)=f_1(x)\left(g(x),h(x)\right).$$

于是，(6)式成立。又因 $\left(f(x)g(x),h(x)\right)\mid h(x)\left(g(x),h(x)\right)$，故(5)式成立。

由(3)和(4)两式，即知(2)式成立。

定理 2 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),g(x)$ 是 $n+1$ 个多项式，$f_i(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零多项式，$i=1,2,\cdots,n$，且

$$\left(\left(f_i(x),g(x)\right),\left(f_j(x),g(x)\right)\right)=1,\left(i,j=1,2,\cdots,n,\text{但}i\neq j\right),$$

则

$$\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g(x)\right)=\left(f_1(x),g(x)\right)\left(f_2(x),g(x)\right)\cdots\left(f_n(x),g(x)\right).$$

证 对 n 作数学归纳法证明。

当 $n=1$ 时，根据定理 1，结论正确。

假设定理 2 的结论对 $n-1(n\geq 2)$ 正确，下面由此可推出定理 2 的结论对 n 也正确。因为 $f_i(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零多项式，$i=1,2,\cdots,n$，所以 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x),g(x)$ 不全为零多项式，$f_n(x),g(x)$ 不全为零多项式。设

$$\left(\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x),g(x)\right),\left(f_n(x),g(x)\right)\right)=d(x).$$

若 $d(x)$ 的次数 $\partial\left(d(x)\right)>0$，则 $d(x)$ 存在不可约因式 $p(x)$，从而

$$p(x)\mid\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x),g(x)\right),p(x)\mid\left(f_n(x),g(x)\right).$$

于是，$p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x),p(x)\mid g(x)$。由 $p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x)$ 得，$p(x)\mid$ 某个 $f_r(x)$ $(1\leq r\leq n-1)$。从而 $p(x)\mid\left(f_r(x),g(x)\right)$，故 $p(x)\mid\left(f_r(x),g(x)\right),p(x)\mid\left(f_n(x),g(x)\right)$，这与 $\left(\left(f_r(x),g(x)\right),\left(f_n(x),g(x)\right)\right)=1$ 矛盾。故

$$\left(\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x),g(x)\right),\left(f_n(x),g(x)\right)\right)=1.$$

因上式成立，故由定理 1 及归纳假设得

$$\begin{aligned}&\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g(x)\right)=\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x),g(x)\right)\left(f_n(x),g(x)\right)\\&=\left(f_1(x),g(x)\right)\left(f_2(x),g(x)\right)\cdots\left(f_n(x),g(x)\right).\end{aligned}$$

推论 1 设非零多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 两两互素，$g(x)$ 为任意多项式，则

$$\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g(x)\right)=\left(f_1(x),g(x)\right)\left(f_2(x),g(x)\right)\cdots\left(f_n(x),g(x)\right).$$

推论 2 设非零多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 两两互素，$g(x)$ 为任意多项式，若

$$f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x),\cdots,f_n(x)\mid g(x),$$

则

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\mid g(x).$$

证 设多项式 $f_i(x)$ 的首项系数为 $a_i, i=1,2,\cdots,n$。因

$$f_1(x)\mid g(x), f_2(x)\mid g(x),\cdots, f_n(x)\mid g(x),$$

故 $\left(f_1(x),g(x)\right)=\frac{1}{a_1}f_1(x),\left(f_2(x),g(x)\right)=\frac{1}{a_2}f_2(x),\cdots,\left(f_n(x),g(x)\right)=\frac{1}{a_n}f_n(x)$。

又因 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 两两互素，故由推论 1 得

$$\begin{aligned}\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g(x)\right)&=\left(f_1(x),g(x)\right)\left(f_2(x),g(x)\right)\cdots\left(f_n(x),g(x)\right)\\&=\frac{1}{a_1}f_1(x)\cdot\frac{1}{a_2}f_2(x)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}f_n(x)=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),\end{aligned}$$

所以 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\mid g(x)$。

定理 3 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 及 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x)$ 是任意两组多项式，且 $f_i(x),g_j(x)$ 至少有一个不全为零多项式，$i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m$。若

$\left(\left(f_i(x),g_j(x)\right),\left(f_k(x),g_l(x)\right)\right)=1$，$i,k=1,2,\cdots,n$；$j,l=1,2,\cdots,m$，但有序数对 $(i,j)\neq$ 有序数对 (k,l)，这里规定当且仅当 $i=j$ 且 $k=l$ 时有序数对 $(i,j)=$ 有序数对 (m,l)，则

$$\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)\right)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(f_i(x),g_j(x)\right).$$

证 对 m 作数学归纳法。

当 $m=1$ 时，由定理 2 得定理 3 的结论正确。假设定理 3 的结论对 $m-1(m\geq 2)$ 正确，我们将由此推出定理 3 的结论对 m 也正确。因为 $f_i(x),g_j(x)$ 至少有一个不为零多项式，$i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m$，故 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_{m-1}(x)$ 不全为零多项式，$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_m(x)$ 不全为零多项式。设

$$\left(\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_{m-1}(x)\right),\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_m(x)\right)\right)=d(x).$$

若多项式 $d(x)$ 的次数 $\partial\left(d(x)\right)\geq 1$，则 $d(x)$ 存在不可约因式 $p(x)$。从而

$$p(x)\mid\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_{m-1}(x)\right),$$

$$p(x)\mid\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_m(x)\right).$$

于是，$p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x), p(x)\mid g_1(x)g_2(x)\cdots g_{m-1}(x), p(x)\mid g_m(x)$。但 $p(x)$ 为不可约多项式，故 $p(x)\mid$ 某个 $f_r(x)(1\leq r\leq n)$，$p(x)\mid$ 某个 $g_s(x)(1\leq s\leq m-1)$，于是 $p(x)\mid\left(f_r(x),g_s(x)\right)$，$p(x)\mid\left(f_r(x),g_m(x)\right)$，这与已知条件 $\left(\left(f_r(x),g_s(x)\right),\left(f_r(x),g_m(x)\right)\right)=1$ 矛盾。故

$\left(\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_{m-1}(x)\right),\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_m(x)\right)\right)=1$。于是，由定理 1，定理 2 及归纳假设得

$$\begin{aligned}&\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)\right)\\&=\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_{m-1}(x)\right)\left(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x),g_m(x)\right)\\&=\left[\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m-1}\left(f_i(x),g_j(x)\right)\right]\prod_{i=1}^{n}\left(f_i(x),g_m(x)\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(f_i(x),g_j(x)\right).\end{aligned}$$

推论 1 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 及 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ 是任意两组多项式，若前一组多项式中任一多项式与后一组多项式中任一多项式互素，则 $f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$ 与 $g_1(x) g_2(x) \cdots g_m(x)$ 互素。

推论 2 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 及 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ 是任意两组多项式，且多项式 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 两两互素，多项式 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ 两两互素，则

$$\left(f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x), g_1(x) g_2(x) \cdots g_m(x)\right) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left(f_i(x), g_j(x)\right).$$

推论 3 设 $f(x), g(x)$ 是任意两个非零多项式，其首项系数分别为 a, b，

$f(x) = a p_1^{\alpha_1}(x) p_2^{\alpha_2}(x) \cdots p_k^{\alpha_k}(x)$，整数 $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k$，

$g(x) = b p_1^{\beta_1}(x) p_2^{\beta_2}(x) \cdots p_k^{\beta_k}(x)$，整数 $\beta_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k$，

其中 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_k(x)$ 是互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式，则

$$\left(f(x), g(x)\right) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)}(x) p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)}(x) \cdots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}(x).$$

证 由推论 2 得，

$$\begin{aligned}\left(f(x), g(x)\right) &= \left(p_1^{\alpha_1}(x) p_2^{\alpha_2}(x) \cdots p_k^{\alpha_k}(x), p_1^{\beta_1}(x) p_2^{\beta_2}(x) \cdots p_k^{\beta_k}(x)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{k} \prod_{j=1}^{k} \left(p_i^{\alpha_i}(x), p_j^{\beta_j}(x)\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{\alpha_i}(x), p_i^{\beta_i}(x)\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}(x).\end{aligned}$$

参考文献

[1] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[2] 杨继明. 关于最大公因数的一个定理的推广[J]. 高等数学研究, 2016, 19(4): 47-48.

[3] 高哲敏, 张华, 肖薇. 高等代数专题选讲[M]. 昆明: 云南科技出版社, 1997.