Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(12), 1957-1966
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.1112218

分数阶各向异性 Navier-Stokes 方程初值问题解的唯一性

刘枚秀，孙小春*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2021年11月1日；录用日期：2021年12月2日；发布日期：2021年12月9日

摘 要

该文证明了仅有水平分数阶耗散的不可压缩 Navier-Stokes 方程初值问题在各向异性 Sobolev 函数空间 $H^{2\alpha-2,s}(\mathbb{R}^3)$ 中解的唯一性，其中 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \frac{\alpha}{2} < s < 2\alpha - \frac{\alpha}{2}$。证明的关键是给出 (α, s, t) 满足适当范围的函数乘积公式，进而利用 Fourier 分析技巧得出结论。

关键词

分数阶各向异性 Navier-Stokes 方程，Sobolev 空间，乘积公式

Uniqueness of Solutions to Initial Value Problems of Fractional Anisotropic Navier-Stokes Equations

Mixiu Liu, Xiaochun Sun*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 1^{st}, 2021; accepted: Dec. 2^{nd}, 2021; published: Dec. 9^{th}, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 刘枚秀, 孙小春. 分数阶各向异性 Navier-Stokes 方程初值问题解的唯一性[J]. 理论数学, 2021, 11(12): 1957-1966. DOI: 10.12677/pm.2021.1112218

Abstract

In this paper, we proved the uniqueness of the solution of the initial value problem of incompressible Navier-Stokes equation with only horizontal fractional dissipation in the anisotropic Sobolev function space $H^{2\alpha-2,s}(\mathbb{R}^3)$, where $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \frac{\alpha}{2} < s < 2\alpha - \frac{\alpha}{2}$. The key of the proof is to give the product formula of the function when (α, s, t) satisfies the appropriate range, and then the conclusion is obtained by using Fourier analysis technique.

Keywords

Fractional Anisotropic Navier-Stokes Equations, Sobolev Space, Product Formula

1. 引言

本文主要考虑以下 $\mathbb{R}^3$ 上仅有水平分数阶耗散的不可压缩分数阶各向异性 Navier-stokes 方程初值问题

$$\begin{cases} \partial_t v + \nu_h(-\triangle_h)^\alpha v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t \in (0,\infty), \\ \mathrm{div} v = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t \in (0,\infty), \\ v|_{t=0} = v_0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$ 为空间变量 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的水平 Laplacian 微分算子, $v = (v_1, v_2, v_3)$ 表示流体的速度, p 表示压力, 常数 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 及 $\nu_h > 0$ 分别表示水平耗散强度和水平粘性系数.

近年来，M Paicu, J-Y Chemin 和 P Zhang 等人在各向异性空间中研究了三维 Navier-Stokes 方程解的整体适定性. 2000年, J-Y Chemin, B Desjardins, I Gallagher 和 E Grenier 在文献[1]中研究了在空间 $H^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ 中当 $s > \frac{1}{2}$ 时各向异性 Navier-Stokes 方程的解是存在的, 当 $s > \frac{3}{2}$ 时解是唯一的. 2002年, D Iftimie 在文献[2]中证明了当 $s > \frac{1}{2}$ 时, 解在空间 $H^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ 中既是存在的也是唯一的. 1999年, D Iftimie 在文献[3]中研究了三维 Navier-Stokes 方程可以看成是二维 Navier-Stokes 方程

的一个扰动, 并获得了在 $\|\omega_0\|_X exp(\|v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}/C\nu^2) \le C\nu$ 条件下该方程解的全局存在性. 2002年, M Paicu 在文献[4]中给出在临界空间 $H^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 解的存在性问题的证明. 2007年, J-Y Chemin 和 P Zhang 在文献[5]中介绍了各向异性负指标 Besov-Sobolev 型空间并证明了各向异性 Navier-Stokes 方程当初值足够小时解的整体适定性结果. 2009年, M Paicu 和 M Majdoub 在文献[6]获得了旋转条件下, 当 $s > \frac{1}{2}$ 时各向异性 Navier-Stokes 方程在空间 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中解的存在唯一性. 2011年, P Zhang 和 M Paicu 在文献[7]中研究了各向异性 Navier-Stokes 方程在各向异性 Besov-Sobolev 空间 $B_4^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ 中解的适定性. 2015年, Y Ding, X Sun 在文献[8]中用高低频分解证明了 Navier-Stokes 方程在 Besov 空间中弱解的唯一性. 2019年, de Oliveira, H B 在文献[9]中证明了带有非线性各向异性粘度的广义 Navier-Stokes 方程弱解的存在性. 2020年, Y Liu, M Paicu 和 P Zhang 在文献[10]中研究了加权条件下解的存在唯一性. 对 Cauchy 问题 (1.1) 已有大量文献对其进行了广泛的研究. 2021年, X Sun, H Liu 在文献[11]中用三线性估计方法证明了分数阶各向异性 Navier-Stokes 方程在 Sobolev 空间中弱解的唯一性. 2021年, F Li, B Yuan 在文献[12]中研究了具有分数阶部分耗散的三维广义 Navier-Stokes 方程解的整体适定性, 其中 $\alpha \ge \frac{5}{4}$, 主要是运用单向交换子估计证明了 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中当 $s > \frac{5}{2}$ 时的解是一个全局解. 2021年, M Abidin, Jie Chen 在文献[13]中研究了分数阶不可压缩 Navier-Stokes 方程在临界变指标 Fourier-Besov-Morrey 空间 $\mathcal{F}\dot{\mathcal{N}}^{s(\cdot)}_{p(\cdot),h(\cdot),q}(\mathbb{R}^3)$ 中解的整体适定性, 其中 $s(\cdot) = 4 - 2\alpha - \frac{3}{p(\cdot)}, \frac{1}{2} < \alpha \le 1$. 2021年, Z Lou, Q Yang, J He, K He 在文献[14]中证明了分数阶不可压缩 Navier-Stokes 方程 Cauchy 问题在临界 Fourier-Herz 空间中一致解析解的存在性, 其中 $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{5}{4}$. 对于系统 (1.1), 分数阶微分算子 $(-\Delta)^\alpha(\alpha > 0)$ 通过 Fourier 变换定义为: $\mathcal{F}[(-\Delta)^\alpha v](t,\xi) = |\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}v(t,\xi)$. 其中 $\mathcal{F}(v)$ 为函数(或分布) v 的 Fourier 变换. 为简便起见我们记 $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. 本文主要考虑当 $\alpha \in (1/2, 1]$ 时, 分数阶各向异性 Navier-Stokes 方程在各向异性 Sobolev 函数空间 $H^{2\alpha-2,s}(\mathbb{R}^3)$ 中解的唯一性, 其中 $\frac{\alpha}{2} < s < 2\alpha - \frac{\alpha}{2}$. 由于垂直粘性项的消失, 导致垂直方向的导数也随之消失. 因此研究困难主要是关于对称项 $\int v_3\partial_3\omega \cdot \Lambda_3^{-\alpha}$ 的估计.

2. 预备知识

定义 2.1 [2] 对 $\forall(s,s') \in \mathbb{R}^2$, 定义非齐次各向异性 Sobolev 空间 $H^{s,s'}$ 范数为

$$\|f\|^2_{H^{s,s'}} = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi_h|^{2s}|\xi_3|^{2s'}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

其中f 为缓增广义分布, $\xi_h = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ 为 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 的水平分量.

为了简便, 我们记范数 $\|f\|_{H^{s,s'}}$ 为 $\|\cdot\|_{s,s'}$. $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 表示为 ∂_j, $\Lambda_3 = (1 - \partial_3^2)^{\frac{1}{2}}$. 显然, 对$\forall s, s' \in \mathbb{R}$, Λ_3 是 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s,s'-1}$ 上的等距算子. $A \simeq B \Leftrightarrow \frac{A}{B} = C(C > 0)$, $\langle x\rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

定理 2.2 [2] 设 $s, t \le 1, s + t > 0$, 且 $s', t' \le \frac{1}{2}, s' + t' > 0$. 若 $f \in H^{s,s'}, g \in H^{t,t'}$, 则 $fg \in H^{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}}$ 且存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|fg\|_{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}} \le C\|f\|_{s,s'}\|g\|_{t,t'}.$$

引理 2.3 设 $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, $s, t \le 1, s + t > 0$, 且 $s' > \frac{\alpha}{2}$. 若 $f \in H^{s,s'}, g \in H^{t,-\frac{\alpha}{2}}$, 则

$fg \in H^{s+t-1,-\frac{\alpha}{2}}$ 且存在常数 $C>0$

$$\|fg\|_{s+t-1,-\frac{\alpha}{2}} \leq C\|f\|_{s,s'}\|g\|_{t,-\frac{\alpha}{2}}.$$

证 设$f \in H^{s,s'}, g \in H^{t,-\frac{\alpha}{2}}$, 由于

$$\|fg\|_{s+t-1,-\frac{\alpha}{2}} = (2\pi)^{-3}\|\langle\xi_h\rangle^{s+t-1}\langle\xi_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\widehat{f}*\widehat{g}(\xi)\|_{L^2}.$$

根据对偶方法,

$$\begin{aligned}(2\pi)^3\|fg\|_{s+t-1,-\frac{\alpha}{2}} &= \sup_{\|h\|_{L^2\leq 1}}\int\langle\xi_h\rangle^{s+t-1}\langle\xi_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\widehat{f}*\widehat{g}(\xi)h(\xi)d\xi \\ &= \sup_{\|h\|_{L^2\leq 1}}\iint\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{s+t-1}\langle\xi_3+\eta_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)h(\xi+\eta)d\xi d\eta.\end{aligned}$$

进一步有,

$$\begin{aligned}(2\pi)^3\|fg\|_{s+t-1,-\frac{\alpha}{2}} \leq& \sup_{\|h\|_{L^2\leq 1}}\underbrace{\iint_{2|\xi_h|\geq|\eta_h|}\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{s+t-1}\langle\xi_3+\eta_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)h(\xi+\eta)d\xi d\eta}_{I_1} \\ &+\sup_{\|h\|_{L^2\leq 1}}\underbrace{\iint_{2|\xi_h|\leq|\eta_h|}\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{s+t-1}\langle\xi_3+\eta_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\eta)h(\xi+\eta)d\xi d\eta}_{I_2}. \end{aligned}\tag{2.1}$$

对于 I_1, 运用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}I_1 =& \iint_{2|\xi_h|\geq|\eta_h|}\langle\xi_3+\eta_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{s+t-1}}{\langle\eta_h\rangle^t}\widehat{f}(\xi)\langle\eta_h\rangle^t\widehat{g}(\eta)h(\xi+\eta)d\xi d\eta \\ \leq& \iint\langle\xi_3+\eta_3\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\Bigg(\underbrace{\iint_{2|\xi_h|\geq|\eta_h|}\frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{2(s+t-1)}}{\langle\eta_h\rangle^{2t}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi_h d\eta_h}_{I_3} \\ &\times\iint\langle\eta_h\rangle^{2t}|\widehat{g}(\eta)|^2|h(\xi+\eta)|^2d\xi_h d\eta_h\Bigg)^{\frac{1}{2}}d\xi_3 d\eta_3.\end{aligned}$$

为估计 I_3, 我们首先关于 η_h 积分得

$$\begin{aligned}\int_{2|\xi_h|\geq|\eta_h|}\frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{2(s+t-1)}}{\langle\eta_h\rangle^{2t}}d\eta_h =& \int_{|\eta_h|\leq\frac{|\xi_h|}{2}}\frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{2(s+t-1)}}{\langle\eta_h\rangle^{2t}}d\eta_h \\ &+\int_{\frac{\xi_h}{2}\leq|\eta_h|\leq 2|\xi_h|}\frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{2(s+t-1)}}{\langle\eta_h\rangle^{2t}}d\eta_h.\end{aligned}$$

若 $|\eta_h| \le \frac{|\xi_h|}{2}$, 则 $\langle \xi_h + \eta_h \rangle \simeq \langle \xi_h \rangle$. 若 $\frac{\xi_h}{2} \le |\eta_h| \le 2|\xi_h|$, 则 $\langle \eta_h \rangle \simeq \langle \xi_h \rangle$. 于是,

$$\int_{|\eta_h| \le \frac{|\xi_h|}{2}} \frac{\langle \xi_h + \eta_h \rangle^{2(s+t-1)}}{\langle \eta_h \rangle^{2t}} d\eta_h \simeq \langle \xi_h \rangle^{2(s+t-1)} \int_{|\eta_h| \le \frac{|\xi_h|}{2}} \frac{1}{\langle \eta_h \rangle^{2t}} d\eta_h \le \frac{C}{1-t} \langle \xi_h \rangle^{2s}$$

且

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\xi_h}{2} \le |\eta_h| \le 2|\xi_h|} \frac{\langle \xi_h + \eta_h \rangle^{2(s+t-1)}}{\langle \eta_h \rangle^{2t}} d\eta_h &\simeq \frac{1}{\langle \xi_h \rangle^{2t}} \int_{\frac{|\xi_h|}{2} \le |\eta_h| \le 2|\xi_h|} \langle \xi_h + \eta_h \rangle^{2(s+t-1)} d\eta_h \\ &\le \frac{C}{\langle \xi_h \rangle^{2t}} \int_{|\zeta| \le 3|\xi_h|} \langle \zeta \rangle^{2(s+t-1)} d\zeta \le \frac{C}{s+t} \langle \xi_h \rangle^{2s}, \end{aligned}$$

这里我们作了变量替换 $\zeta = \xi_h + \eta_h$.

根据 I_3 的定义, 我们得到

$$\underline{I}_3 \le C \int \langle \xi_h \rangle^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi_h,$$

关于变量 (ξ_3, η_3) 运用 Hölder 不等式, 由此得到 I_1 的估计:

$$\begin{aligned} I_1 \le C \iint &\left(\int \langle \xi_h \rangle^{2s} \langle \xi_3 \rangle^{2s'} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi_h \int |h(\zeta, \xi_3 + \eta_3)|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\langle \xi_3 + \eta_3 \rangle^{-\alpha} \langle \xi_3 \rangle^{-2s'} \int \langle \eta_h \rangle^{2t} |\widehat{g}(\eta)|^2 d\eta_h \right)^{\frac{1}{2}} d\xi_3 d\eta_3. \end{aligned}$$

从而

$$I_1 \le C \|f\|_{s,s'} \|h\|_{L^2} \left(\int \langle \eta_h \rangle^{2t} \varphi(\eta_3) |\widehat{g}(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

其中

$$\varphi(\eta_3) = \int \frac{1}{\langle \xi_3 + \eta_3 \rangle^{\alpha} \langle \xi_3 \rangle^{2s'}}.$$

下面我们估计 φ,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_3| \ge 2|\eta_3|} \frac{1}{\langle \xi_3 + \eta_3 \rangle^{\alpha} \langle \xi_3 \rangle^{2s'}} d\xi_3 &\simeq \int_{2|\eta_3|}^{\infty} \frac{1}{\langle \xi_3 \rangle^{2s'+1}} d\xi_3 \\ &\simeq \int_{2|\eta_3|}^{\infty} \frac{1}{\langle (1+\xi_3) \rangle^{2s'+1}} d\xi_3 \le \frac{C}{\langle \eta_3 \rangle^{2s'}} \le \frac{C}{\langle \eta_3 \rangle^{\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\int_{|\xi_3| \le \frac{|\eta_3|}{2}} \frac{1}{\langle \xi_3 + \eta_3 \rangle^{\alpha} \langle \xi_3 \rangle^{2s'}} d\xi_3 \simeq \frac{1}{\langle \eta_3 \rangle^{\alpha}} \int_{|\xi_3| \le \frac{|\eta_3|}{2}} \frac{1}{\langle \xi_3 \rangle^{2s'}} d\xi_3 \le \frac{C}{(s' - \frac{1}{2}) \langle \eta_3 \rangle^{\alpha}},$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{|\eta_3|}{2} \le |\xi_3| \le 2|\eta_3|} \frac{1}{\langle \xi_3 + \eta_3 \rangle^{\alpha} \langle \xi_3 \rangle^{2s'}} d\xi_3 &\simeq \frac{1}{\langle \eta_3 \rangle^{2s'}} \int_{\frac{|\eta_3|}{2} \le |\xi_3| \le 2|\eta_3|} \frac{1}{\langle \xi_3 + \eta_3 \rangle^{\alpha}} d\xi_3 \\ &\le \frac{C}{\langle \eta_3 \rangle^{2s'}} \int_{|\zeta| \le 3|\eta_3|} \frac{1}{\langle \zeta \rangle^{\alpha}} d\zeta \\ &\le \frac{C}{(s' - \frac{1}{2}) \langle \eta_3 \rangle^{\alpha}}, \end{aligned}$$

从而得

$$\varphi(\eta_3) \leq C\langle\eta_3\rangle^{-\alpha},$$

将上式代入 (2.2), 得到以下估计

$$I_1 \leq C\|f\|_{s,s'}\|g\|_{t,-\frac{\alpha}{2}}\|h\|_{L^2}. \tag{2.3}$$

最后估计 I_2, 由 Hölder 不等式,

$$I_2 \leq (T_1T_2)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$T_1 = \iint \langle\xi_h\rangle^{2s}\langle\xi_3\rangle^{2s'}|\widehat{f}(\xi)|^2|h(\xi+\eta)|^2 d\xi d\eta$$

且

$$T_2 = \iint_{2|\xi_h|\leq|\eta_h|} \frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{2(s+t-1)}}{\langle\xi_h\rangle^{2s}} \frac{\langle\xi_3+\eta_3\rangle^{-\alpha}}{\langle\xi_3\rangle^{2s'}}|\widehat{g}(\eta)|^2 d\xi d\eta.$$

显然, $T_1 = \|h\|_{L^2}^2\|f\|_{s,s'}^2$. 为了估计 T_2, 首先关于 ξ_h 和 ξ_3 积分. 同 I_3 的估计, 有

$$\int_{2|\xi_h|\leq|\eta_h|} \frac{\langle\xi_h+\eta_h\rangle^{2(s+t-1)}}{\langle\xi_h\rangle^{2s}} d\xi_h \simeq \langle\eta_h\rangle^{2(s+t-1)} \int_{2|\xi_h|\leq|\eta_h|} \frac{1}{\langle\xi_h\rangle^{2s}} d\xi_h \leq \frac{C}{\frac{1}{2}-s}\langle\eta_h\rangle^{2t}.$$

因此,

$$T_2 \leq C\|g\|_{t,-\frac{\alpha}{2}}.$$

于是得到

$$I_2 \leq C\|f\|_{s,s'}\|g\|_{t,-\frac{\alpha}{2}}\|h\|_{L^2}, \tag{2.4}$$

结合 (2.1)(2.3)(2.4), 引理 2.3 得证.

3. 主要定理及证明

定理 3.1 设 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $\frac{\alpha}{2} < s < 2\alpha - \frac{1}{2}$, υ 和 $\widetilde{\upsilon}$ 是方程 (1.1) 相应于初值 $\upsilon_0 \in H^{2\alpha-2,s}(\mathbb{R}^3)$ 的两个解, 且

$$\upsilon, \widetilde{\upsilon} \in \mathrm{L}^\infty\Big([0,T]; H^{2\alpha-2,s}\Big) \cap \mathrm{L}^2\Big([0,T]; H^{3-2\alpha,s}\Big).$$

则 $\upsilon = \widetilde{\upsilon}$.

证 令 $\omega = \upsilon - \widetilde{\upsilon}$, 在方程两边对 ω 乘以 $\Lambda_3^{-\alpha}\omega$, 然后在 $(\varepsilon, t) \times \mathbb{R}^3$ 上进行积分, 令 $\varepsilon \to 0$ 有

$$\begin{aligned}
&\|\omega(t)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2 + 2\nu_h \int_0^t \big(\|\Lambda_1^\alpha\omega(\tau)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2 + \|\Lambda_2^\alpha\omega(\tau)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2\big) d\tau \\
&= -2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \omega(\tau,x)\cdot\nabla\widetilde{\upsilon}(\tau,x)\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega(\tau,x) d\tau dx - 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \upsilon(\tau,x)\cdot\nabla\omega(\tau,x)\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega(\tau,x) d\tau dx.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

为了简化符号, 我们记 $\upsilon(\tau,x)$ 为 υ , 其他符号类似, 下面计算

$$\int \omega\cdot\nabla\widetilde{\upsilon}\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega dx=\underbrace{\int(\omega_1\partial_1\widetilde{\upsilon}+\omega_2\partial_2\widetilde{\upsilon})\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega dx}_{L_1}+\underbrace{\int\omega_3\partial_3\widetilde{\upsilon}\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega dx}_{L_2}\tag{3.2}$$

和

$$\int \upsilon\cdot\nabla\omega\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega dx=\underbrace{\int(\upsilon_1\partial_1\omega+\upsilon_2\partial_2\omega)\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega dx}_{L_3}+\underbrace{\int\upsilon_3\partial_3\omega\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\omega dx}_{L_4}.\tag{3.3}$$

L_1 的估计. 根据引理 2.3,

$$\begin{aligned}|L_1|&\le\left\|\omega_1\partial_1\widetilde{\upsilon}+\omega_2\partial_2\widetilde{\upsilon}\right\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\left\|\Lambda_3^{-\alpha}\omega\right\|_{\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2}}\\&\le C\left\|\widetilde{\upsilon}\right\|_{3-2\alpha,s}\left\|\omega\right\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\left\|\omega\right\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

L_2 的估计. 根据定理 2.2,

$$\begin{aligned}|L_2|&\le\left\|\omega_3\partial_3\widetilde{\upsilon}\right\|_{-\alpha,\frac{2s-1-\alpha}{2}}\left\|\Lambda_3^{-\alpha}\omega\right\|_{\alpha,\frac{-2s+1+\alpha}{2}}\\&\le C\left\|\omega_3\right\|_{\alpha-1,\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\left\|\nabla\widetilde{\upsilon}\right\|_{2-2\alpha,\frac{s}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\left\|\omega\right\|_{\alpha,\frac{-2s+1-\alpha}{2}}\\&\le C\left\|\widetilde{\upsilon}\right\|_{3-2\alpha,s}\left\|\omega_3\right\|_{\alpha-1,\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\left\|\omega\right\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}},\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中,

$$\begin{aligned}\left\|\omega\right\|_{\alpha-1,\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}&\le\left\|\omega\right\|_{\alpha-1,\frac{s}{2}-\frac{5}{4}}+\left\|\partial_3\omega_3\right\|_{\alpha-1,\frac{s}{2}-\frac{5}{4}}\\&\le\left\|\omega\right\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}+\left\|\omega\right\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

L_3 的估计. 根据引理 2.3,

$$\begin{aligned}|L_3|&\le\left\|\upsilon_1\partial_1\omega+\upsilon_2\partial_2\omega\right\|_{-\frac{1}{2},-\frac{\alpha}{2}}\left\|\Lambda_3^{-\alpha}\omega\right\|_{\frac{1}{2},\frac{\alpha}{2}}\\&\le\left\|\upsilon\right\|_{3-2\alpha,s}\left\|\omega\right\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\left\|\omega\right\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

L_4 的估计.

$$\begin{aligned}&\int\upsilon_3\partial_3\omega\cdot\Lambda_h^{-\alpha}\omega dx\\=&(2\pi)^{-3}\int\upsilon_3\widehat{\partial_3\omega(\xi)}\cdot\Lambda_3^{-\alpha}\widehat{\omega(-\xi)}d\xi\\=&(2\pi)^{-6}\int\frac{1}{\langle\xi_3\rangle^{\alpha}}\widehat{\upsilon_3}*\widehat{\partial_3\omega(\xi)}\cdot\widehat{\omega(-\xi)}d\xi\\=&i(2\pi)^{-6}\iint\frac{\eta_3}{\langle\xi_3\rangle^{\alpha}}\widehat{\upsilon_3}(\xi-\eta)\widehat{\omega}(\eta)\cdot\widehat{\omega}(-\xi)d\xi d\eta.\end{aligned}\tag{3.7}$$

DOI: 10.12677/pm.2021.1112218

作变量替换 $(\xi,\eta)\leftrightarrow(-\eta,-\xi)$, 可得

$$L_4=\frac{i}{2}(2\pi)^{-6}\iint\left(\frac{\eta_3}{\langle\xi_3\rangle^\alpha}-\frac{\xi_3}{\langle\eta_3\rangle^\alpha}\right)\widehat{v_3}(\xi-\eta)\widehat{\omega}(\eta)\cdot\widehat{\omega}(-\xi)d\xi d\eta. \tag{3.8}$$

因为, 对 $\forall x,y\in\mathbb{R},\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, 有如下不等式成立:

$$\left|\frac{x}{\langle y\rangle^\alpha}-\frac{y}{\langle x\rangle^\alpha}\right|\leq|x-y|\left(\frac{1}{\langle x\rangle^\alpha}-\frac{1}{\langle y\rangle^\alpha}\right).$$

故由 (3.8) 可得

$$|L_4|\leq\frac{1}{2}(2\pi)^{-6}\sum_k\iint|\xi_3-\eta_3|\left(\frac{1}{\langle\xi_3\rangle^\alpha}+\frac{1}{\langle\eta_3\rangle^\alpha}\right)|\widehat{v_3}(\xi-\eta)||\widehat{\omega_k}(\eta)||\widehat{\omega_k}(-\xi)|d\xi d\eta.$$

再作变量替换 $(\xi,\eta)\leftrightarrow(-\eta,-\xi)$, 可得

$$|L_4|\leq(2\pi)^{-6}\sum_k\iint\frac{|\xi_3-\eta_3|}{\langle\xi_3\rangle^\alpha}|\widehat{v_3}(\xi-\eta)||\widehat{\omega_k}(\eta)||\widehat{\omega_k}(-\xi)|d\xi d\eta.$$

因为 $\mathrm{div}v=0$, 所以 $\xi_3\widehat{v}_3=-\xi_1\widehat{v}_1(\xi)-\xi_2\widehat{v}_2(\xi)$, 则 $|\xi_3||\widehat{v}_3|\leq|\xi_1||\widehat{v}_1(\xi)|+|\xi_2||\widehat{v}_2(\xi)|$. 于是,

$$|L_4|\leq(2\pi)^{-6}\sum_k\iint\frac{|\xi_1-\eta_1||\widehat{v}_1(\xi-\eta)|+|\xi_2-\eta_2||\widehat{v}_2(\xi-\eta)|}{\langle\xi_3\rangle^\alpha}|\widehat{\omega}_k(\eta)||\widehat{\omega}_k(-\xi)|d\xi d\eta. \tag{3.9}$$

令 $\widehat{V}_k=|\widehat{v}_k|$, 显然, 对 $\forall r,r',k$, 有 $\|V_k\|_{r,r'}=\|v_k\|_{r,r'}$. 以同样的方式, 定义向量 W. 运用 (3.7) 式的反向结论, 得到与 (3.9) 等价的式子

$$|L_4|\leq\int(|D_1|V_1+|D_2|V_2)W\cdot\Lambda_3^{-\alpha}Wdx,$$

其中 $|D_k|$ 表示与 $|\xi_k|$ 相关的算子. 由于对 $\forall r,r',k$, $\||D_k|V_k\|_{H^{r,r'}}=\|\partial_kV_k\|_{H^{r,r'}}$, 得到与 L_1 相同的估计

$$\begin{aligned}|L_4|\leq&\int(|D_1|V_1+|D_2|V_2)W\cdot\Lambda_3^{-\alpha}Wdx\\\leq&C\|V\|_{3-2\alpha,s}\|W\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\|W\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}\\=&C\|v\|_{3-2\alpha,s}\|\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\|\omega\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

结合关系式 (3.1)-(3.6) 和 (3.10) 得

$$\begin{aligned}&\|\omega(t)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2+2\nu_h\int_0^t\left(\|\Lambda_1^\alpha\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2+\|\Lambda_2^\alpha\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2\right)d\tau\\\leq&C\int_0^t\|\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\|\omega\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}(\|\widetilde{v}\|_{3-2\alpha,s}+\|v\|_{3-2\alpha,s})d\tau\\&+C\int_0^t\|\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}\|\omega\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}\|\widetilde{v}\|_{3-2\alpha,s}d\tau.\end{aligned}$$

利用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}&\|\omega(t)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2+2\nu_h\int_0^t(\|\Lambda_1\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2+\|\Lambda_2\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2)d\tau\\ \le&2\nu_h\int_0^t\|\omega\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}^2d\tau+C\int_0^t\|\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2(\|\widetilde{v}\|_{3-2\alpha,s}^2+\|v\|_{3-2\alpha,s}^2)d\tau.\end{aligned}$$

由于

$$\|\omega\|_{\alpha,-\frac{\alpha}{2}}^2=\|\Lambda_1^\alpha\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2+\|\Lambda_2^\alpha\omega\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2.$$

进一步可得

$$\|\omega(t)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2\le\int_0^t\|\omega(t)\|_{0,-\frac{\alpha}{2}}^2h(\tau)d\tau, \tag{3.11}$$

其中

$$h(t)=C(2\nu_h+\|\widetilde{v}\|_{3-2\alpha,s}^2+\|v\|_{3-2\alpha,s}^2).$$

对公式 (3.11) 运用 Gronwall 不等式得到 $\omega=0$, 从而有 $\tilde{v}=v$. 定理 3.1 得证.

基金项目

国家自然科学青年基金资助(11601434).

参考文献

[1] Chemin, J.-Y., Desjardins, B., Gallagher, I. and Grenier, E. (2000) Fluids with Anisotropic Viscosity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **34**, 315-335. https://doi.org/10.1051/m2an:2000143

[2] Iftimie, D. (2002) A Uniqueness Result for the Navier-Stokes Equations with Vanishing Vertical Viscosity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **33**, 1483-1493. https://doi.org/10.1137/S0036141000382126

[3] Iftimie, D. (1999) The 3D Navier-Stkoes Equation Seen as a Perturbation of the 2D Navier-Stkoes Equations. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **127**, 473-517. https://doi.org/10.24033/bsmf.2358

[4] Paicu, M. (2005) Équation anisotrope de Navier-Stokes dans des espaces critiques. *Revista Matemática Iberoamericana*, **21**, 179-235. https://doi.org/10.4171/RMI/420

[5] Chemin, J.-Y. and Zhang, P. (2007) On the Global Well Posedness to the 3-D Incompressible Anisotropic Navier-Stokes Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **272**, 529-566. https://doi.org/10.1007/s00220-007-0236-0

[6] Paicu, M. and Majdoub, M. (2009) Uniform Local Existence for Inhomogeneous Rotating Fluid Equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **21**, 21-44. https://doi.org/10.1007/s10884-008-9120-7

[7] Paicu, M. and Zhang, P. (2011) Global Solutions to the 3-D Incompressible Anisotropic Navier-Stokes System in the Critical Spaces. *Communications in Mathematical Physics*, **307**, 713-759. https://doi.org/10.1007/s00220-011-1350-6

[8] Ding, Y. and Sun, X. (2015) Uniqueness of Weak Solutions for Fractional Navier-Stokes Equations. *Frontiers of Mathematics in China*, **10**, 33-51. https://doi.org/10.1007/s11464-014-0370-x

[9] de Oliveira, H.B. (2019) Generalized Nacier-Stokes Equations with Nonlinear Anisotropic Viscosity. *Analysis and Applications (Singap.)*, **17**, 977-1003. https://doi.org/10.1142/S021953051950009X

[10] Liu, Y., Paicu, M. and Zhang, P. (2020) Global Well-Posedness of 3-D Anisotropic Navier-Stokes System with Small Unidirectional Derivative. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **238**, 805-843. https://doi.org/10.1007/s00205-020-01555-x

[11] Sun, X. and Liu, H. (2021) Uniqueness of the Weak Solution to the Fractional Anisotropic Navier-Stokes Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 253-264. https://doi.org/10.1002/mma.6727

[12] Li, F. and Yuan, B. (2021) Global Well-Posedness of the 3D Generalized Navier-Stokes Equations with Fractional Partial Dissipation. *Acta Applicandae Mathematicae*, **171**, 16 p. https://doi.org/10.1007/s10440-021-00388-4

[13] Abidin, M. and Chen, J. (2021) Global Well-Posedness for Fractional Navier-Stokes Equations in Variable Exponent Fourier-Besov-Morrey Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **41**, 164-176. https://doi.org/10.1007/s10473-021-0109-1

[14] Lou, Z., Yang, Q., He, J. and He, K. (2021) Uniform Analytic Solutions for Fractional Navier-Stokes Equations. *Applied Mathematics Letters*, **112**, 106784, 7 p. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106784