Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 149-156
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112021

Hans汉斯

有限域多项式环上广义gcd和函数的均值

卢美洁

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: meijie.lu@hotmail.com

收稿日期：2020年12月27日；录用日期：2021年1月28日；发布日期：2021年2月4日

摘 要

算术函数的均值问题是数论中的重要问题之一，尤其是与gcd函数有关的均值问题。本文在已知整数环上广义gcd和函数的均值的基础上，通过类比，讨论有限域多项式环上相应的广义gcd和函数的均值。

关键词

广义gcd和函数，均值，有限域

The Mean Value of the Generalized gcd-Sum Function on the Polynomial Ring over Finite Field

Meijie Lu

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: meijie.lu@hotmail.com

Received: Dec. 27th, 2020; accepted: Jan. 28th, 2021; published: Feb. 4th, 2021

Abstract

The mean value of arithmetic functions is one of the most important problems in number theory, especially the mean value of the gcd function. In this paper, the mean values of the corresponding generalized gcd-sum function on polynomial rings over finite fields are discussed by analogy on the basis of given mean values of the generalized gcd-sum function over integer ring.

Keywords

Generalized gcd-Sum Function, Mean Value, Finite Field

文章引用: 卢美洁. 有限域多项式环上广义 gcd 和函数的均值[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 149-156.
DOI: 10.12677/pm.2021.112021

1. 引言

在整数环 $\mathbb{Z}$ 上，设 $m,n\in\mathbb{Z}$ 且不全为 0，对于 gcd 函数 $\gcd(m,n)=\max\{d\in\mathbb{N}:d\mid m,d\mid n\}$，定义其和函数

$$P(n)=\sum_{j\le n}\gcd(j,n),$$

2001 年，Broughan [1]证明了 $P(n)$ 的均值的渐近公式，对 $\forall\, x\ge 1$，

$$\sum_{n\le x}P(n)=\frac{1}{2\zeta(2)}x^2\log x+\frac{\zeta^2(2)}{2\zeta(3)}x^2+O\left(x^{\frac{3}{2}}\log x\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数。

在 2007 年，Bordellès [2]得出

$$\sum_{n\le x}P(n)=\frac{1}{2\zeta(2)}x^2\log x+\left(\gamma-\frac{1}{2}+\log\left(\frac{A^{12}}{2\pi}\right)\right)\frac{x^2}{2\zeta(2)}+O\left(x^{1+\theta+\varepsilon}\right),$$

其中 A 表示 Glaisher-Kinkelin 常数，γ 表示欧拉常数。

2010 年，Tóth [3]证明出，对 $\forall\,\varepsilon>0$，

$$\sum_{n\le x}P(n)=\frac{1}{2\zeta(2)}x^2\log x+\left(2\gamma-\frac{1}{2}+\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)x^2+O\left(x^{1+\theta+\varepsilon}\right),$$

其中 θ 出现在除数函数的均值的渐近公式：

$$\sum_{n\le x}d(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right)。$$

对于 $P(n)$ 还有更深一步的研究，设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为实数，我们定义

$$G_\alpha(x)=\sum_{n\le x}\frac{P(n)}{n^\alpha},$$

当 $\alpha=0$ 时上式表示 $P(n)$ 的均值。2001 年，Broughan [1]详细的研究了 $G_\alpha(x)$，并且得出

$$G_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2-\alpha}\log x}{(2-\alpha)\zeta(2)}+O\left(x^{2-\alpha}\right), & \alpha<2\\[2ex] \dfrac{\log^2 x}{2\zeta(2)}+O(\log x), & \alpha=2\\[2ex] \dfrac{x^{2-\alpha}\log x}{(2-\alpha)\zeta(2)}+\dfrac{\zeta(\alpha-1)^2}{\zeta(\alpha)}+O\left(x^{2-\alpha}\right), & \alpha>2\end{cases}$$

2007 年，Broughan [4]又改进了其之前得到的关于 $G_\alpha(x)$ 的上述结论。除此之外，Tóth [5]，Zhang 和 Zhai [6]还研究了关于模 n 的正则整数的 gcd 和函数的均值问题。

以上都是基于常义的 gcd 和函数的研究，设 $b\ge 2$，$m,n\in\mathbb{Z}$ 且不全为 0，定义广义的 gcd 函数

$$\gcd_b(m,n) := \max\left\{d \in \mathbb{N} : d^b \mid m, d^b \mid n\right\},$$

并且定义广义的 gcd 和函数

$$h_b(n) := \sum_{j\le n} \gcd_b(j,n),$$

Chaubey 和 Goel [7]证明了的 $h_b(n)$ 的均值

$$\sum_{n\le x} h_b(n) = \frac{\zeta(2b-1)}{2\zeta(2b)}x^2 + O(E_b(x)),$$

其中 $E_2(x) = O(x\log x)$，当 $b \ge 3$ 时 $E_b(x) = O(x)$。

基于以上在整数环 $\mathbb{Z}$ 上的研究，类比到函数域上，我们同样可以研究算术函数的均值问题。本文将在有限域多项式环上讨论广义的 gcd 和函数的均值问题。

设 $\mathbb{F}_q$ 为具有 q 个元素的有限域，令 $\mathcal{A} := \mathbb{F}_q[T]$ 表示 $\mathbb{F}_q$ 上的一元多项式环，其元素形如：

$$\alpha_n T^n + \cdots + \alpha_1 T + \alpha_0, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}_q;$$

令 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中首项系数为 1 的多项式的集合；$\mathcal{M}_n$ 表示 $\mathcal{A}$ 中次数为 n 的首项系数为 1 的多项式的集合；设多项式 $f \in \mathcal{A}-\{0\}$，令 $\|f\| := q^{\deg f}$ 表示 f 的范数，当 $f=0$ 时，定义 $\|f\|=0$。

定义多项式环 $\mathcal{A}$ 上广义的 gcd 函数：

设多项式 $f,g \in \mathcal{A}$ 并且不全为 0，多项式 $d \in \mathcal{M}$，$b \ge 2$ 为整数，若 d 满足：

1) $d^b \mid f$，$d^b \mid g$，

2) 若有任意的多项式 h 满足 $h^b \mid f$，$h^b \mid g$，则一定有 $h \mid d$。

则称 d 为 f,g 的广义的最大公因式，记为 $d = \gcd_b(f,g)$ 或 $d = (f,g)_b$。

设 $f \in \mathcal{M}-\{0\}$，定义广义 gcd 函数的和函数

$$\alpha(f) = \sum_{\|h\|<\|f\|} \left\|(h,f)_b\right\|,$$

其中求和历遍所有的 $h \in \mathcal{A}$，则我们有以下定理成立：

定理 1.1 设 $n \ge 0$ 为整数，则我们有

$$\sum_{f\in\mathcal{M}_n} \alpha(f) = \sum_{k+bm=n} q^{2k+2m} - \sum_{k+b(m+1)=n} q^{2k+2m+1}.$$

符号说明：

p　$\mathcal{A}$ 中的不可约多项式；

s　表示一个复数；

$\mathbb{F}_q$　含有 q 个元素的有限域；

$\mathcal{A}$　有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的多项式环；

$\mathcal{M}$　$\mathcal{A}$ 中首 1 多项式的集合；

$\mathcal{M}_n$　$\mathcal{A}$ 中次数为 n 的首 1 多项式的集合；

$\|f\|$ 表示 f 的范数；

$\mathrm{Re}(s)$ 复数 s 的实部；

$\zeta_{\mathcal{A}}(s)$　$\mathcal{A}$ 上的 Riemann zeta 函数。

在本篇文章以下的讨论中，如无特别说明，我们所用的 f 都是 $\mathbb{F}_q$ 上的首一的非零多项式，即 $f \in \mathcal{M}-\{0\}$。

2. 预备知识

2.1. 基本定义

2.1.1. Riemann zeta 函数

$\mathcal{A}$ 上的 Riemann zeta 函数定义为

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s)=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{1}{\|f\|^{s}}，\quad \mathrm{Re}(s)>1。$$

由[8]可知，

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s)=\frac{1}{1-q^{1-s}}，\quad \mathrm{Re}(s)>1，$$

其中 q 表示有限域 $\mathbb{F}_q$ 的元素个数。

若令 $q^{-s}=u$，则我们可以将 $\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ 定义为

$$Z(u)=\frac{1}{1-qu}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}u^{n}，\quad |u|<q^{-1}。$$

$\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ 的欧拉乘积形式为

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{\|p\|^{s}}\right)^{-1}，$$

其中乘积历遍所有首 1 的不可约多项式。

2.1.2. Dirichlet 卷积和 Dirichlet 级数

设 λ 和 ρ 为两个算术函数，他们的 Dirichlet 卷积定义为

$$(\lambda*\rho)(f)=\sum_{\substack{h,g\in\mathcal{M}\\ hg=f}}\lambda(h)\rho(g)，\quad f\in\mathcal{M}。$$

设 λ 为一个算术函数，定义其 Dirichlet 级数为

$$D_{\lambda}(s)=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\lambda(f)}{\|f\|^{s}}。$$

设 λ 为算术函数，设 $f,g\in\mathcal{M}$ 并且 $(f,g)=1$，若 $\lambda(fg)=\lambda(f)\lambda(g)$，则称 λ 为可乘函数。显然有 $\lambda(f)=\|f\|$ 为可乘函数，两个可乘函数的乘积以及 Dirichlet 卷积仍为可乘函数。

若设 $\lambda(f)$ 为可乘函数，则我们有

$$D_{\lambda}(s)=\prod_{p}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(p^{k})}{\|p\|^{ks}}\right)，$$

其中乘积历遍所有首 1 的不可约多项式。

设 $D_{\lambda}(s),D_{\rho}(s),D_{\lambda*\rho}(s)$ 分别为函数 λ,ρ 和 $\lambda*\rho$ 的 Dirichlet 级数，则我们有

$$D_{\lambda}(s)D_{\rho}(s)=D_{\lambda*\rho}(s)，$$

2.2. 所需引理

引理 2.2.1 设 d 为一个多项式，$(f,g)_b$ 为广义的 gcd 函数，则有下列结论成立：

1) $d\mid (f,g)_b \Leftrightarrow d^b \mid f$ 且 $d^b \mid g$.

2) $d=(f,g)_b \Leftrightarrow d^b \mid f, d^b \mid g, \left(\frac{f}{d^b},\frac{g}{d^b}\right)_b=1$.

设 $b\ge 2$ 为整数， $f\in\mathcal{M}-\{0\}$ 为非零的首 1 多项式，定义广义的欧拉函数

$$\varphi_b(f)=\#\left\{h\in\mathcal{A}:\deg h<\deg f,(h,f)_b=1\right\}。$$

引理 2.2.2 设 $f\in\mathcal{M}-\{0\}$，$\varphi_b(f)$ 表示广义的欧拉函数，则我们有以下结论成立：

1) $\varphi_b(f)$ 为可乘函数；

2) 设 m 为非负整数，则有

$$\varphi_b(p^m)=\begin{cases}\|p\|^m, & 0\le m\le b-1\\ \|p\|^m-\|p\|^{m-b}, & m\ge b\end{cases}$$

3) $\varphi_b(f)$ 的 Dirichlet 级数表示为

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\varphi_b(f)}{\|f\|^s}=\frac{\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)}{\zeta_{\mathcal{A}}(bs)},$$

并且在 $\mathrm{Re}(s)>2$ 时该级数收敛。

证 1) 由 $\varphi_b(f)$ 的定义可知，

$$\varphi_b(f)=\sum_{\substack{h\in\mathcal{A}\\ \deg h<\deg f,\\ (h,f)_b=1}}1=\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\ (h,f)_b=1}}1,$$

利用公式

$$\sum_{\substack{g\in\mathcal{M}\\ g\mid f}}\mu(g)=\begin{cases}1, & f=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\mu(g)$ 为莫比乌斯函数，我们可得

$$\varphi_b(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\sum_{\substack{g\in\mathcal{M}\\ g\mid(h,f)_b}}\mu(g)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\sum_{\substack{g\in\mathcal{M}\\ g^b\mid h,g^b\mid f}}\mu(g),$$

交换求和顺序，我们有

$$\varphi_b(f)=\sum_{\substack{g\in\mathcal{M}\\ g^b\mid f}}\mu(g)\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\ g^b\mid h}}1=\sum_{\substack{g\in\mathcal{M}\\ g^b\mid f}}\mu(g)\sum_{\|l\|<\left\|\frac{f}{g^b}\right\|}1=\sum_{\substack{g\in\mathcal{M}\\ g^b\mid f}}\mu(g)\left\|\frac{f}{g^b}\right\|。\tag{2.1}$$

令 $g^b=t$，则有

$$\varphi_b(f)=\sum_{\substack{t\in\mathcal{M},t\mid f\\ g^b=t}}\mu\left(t^{\frac{1}{b}}\right)\left\|\frac{f}{t}\right\|=\sum_{\substack{t\in\mathcal{M}\\ t\mid f}}\mu\left(t^{\frac{1}{b}}\right)\left\|\frac{f}{t}\right\|\chi_b(t),$$

其中

$$\chi_b(f)=\begin{cases}1, & \text{对某些}g\text{有}f=g^b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

是一个可乘函数。

若我们令 $\lambda(f)=\|f\|$，$\eta(f)=\chi_b(f)\mu\left(f^{\frac{1}{b}}\right)$，由 Dirichlet 卷积可知，$\varphi_b(f)=(\lambda*\eta)(f)$，又 $\lambda(f),\eta(f)$ 为可乘函数，则 $\varphi_b(f)$ 为可乘函数。

2) 将 $f=p^m$ 带入到公式(2.1)可得结论成立。

3) 由 $\varphi_b(f)$ 为可乘函数，我们有

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\varphi_b(f)}{\|f\|}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_b(p^k)}{\|p\|^{ks}}\right)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{b-1}\frac{\varphi_b(p^k)}{\|p\|^{ks}}+\sum_{k=b}^{\infty}\frac{\varphi_b(p^k)}{\|p\|^{ks}}\right)。$$

由(2)，我们可得

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\varphi_b(f)}{\|f\|}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{b-1}\frac{\|p\|^k}{\|p\|^{ks}}+\sum_{k=b}^{\infty}\frac{\|p\|^k-\|p\|^{k-b}}{\|p\|^{ks}}\right)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\|p\|^{k(s-1)}}-\sum_{k=b}^{\infty}\frac{1}{\|p\|^{k(s-1)+b}}\right)。$$

计算可知

$$\varphi_b(f)=\prod_p\left(1-\frac{1}{\|p\|^{s-1}}\right)^{-1}\prod_p\left(1-\frac{1}{\|p\|^{bs}}\right)。$$

由 $\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ 的欧拉乘积以及收敛范围可知结论成立。

引理 2.2.3 设 $f\in\mathcal{M}-\{0\}$，$\alpha(f)$ 为广义 gcd 函数的和函数，则有

1) $\alpha(f)$ 为可乘函数并且

$$\alpha(f)=(\varphi_b*\beta)(f),$$

其中 $\beta(f)=\chi_b(f)\|f\|^{\frac{1}{b}}$ 为可乘函数。

2) $\alpha(f)$ 的 Dirichlet 级数为

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\alpha(f)}{\|f\|^s}=\frac{\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)}{\zeta_{\mathcal{A}}(bs)},$$

并且在 $\mathrm{Re}(s)>2$ 时该级数收敛。

证 1) 由 $\alpha(f)$ 的定义可知

$$\alpha(f)=\sum_{\|h\|<\|f\|}\left\|(h,f)_b\right\|,$$

令 $(h,f)_b=d$，则我们有

$$\alpha(f)=\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\(h,f)_b=d}}\|d\|=\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\d^b|h,d^b|f,\\\left(\frac{h}{d^b},\frac{f}{d^b}\right)_b=1}}\|d\|,$$

交换求和次序，可得

$$\alpha(f)=\sum_{\substack{d\in\mathcal{M}\\d^b|f}}\|d\|\sum_{\substack{\|h\|<\|f\|\\d^b|h,\\\left(\frac{h}{d^b},\frac{f}{d^b}\right)_b=1}}1。$$

令 $h=d^b\cdot l$ 可得

$$\alpha(f)=\sum_{\substack{d\in\mathcal{M}\\ d^b\mid f}}\|d\|\sum_{\substack{\|l\|<\left\|\frac{f}{d^b}\right\|\\ \left(l,\frac{f}{d^b}\right)_b=1}}1=\sum_{\substack{d\in\mathcal{M}\\ d^b\mid f}}\|d\|\varphi_b\left(\frac{f}{d^b}\right),$$

令 $d^b=t$，则有

$$\alpha(f)=\sum_{\substack{t\in\mathcal{M}\\ t\mid f}}\|t\|^{\frac{1}{b}}\chi_b(t)\varphi_b\left(\frac{f}{t}\right)。$$

从而令 $\beta(f)=\chi_b(f)\|f\|^{\frac{1}{b}}$ 以及 Dirichlet 卷积的定义可知结论成立。

2) 由(1)以及 Dirichlet 级数的性质可知，我们只需计算 $\sum\limits_{f\in\mathcal{M}}\frac{\varphi_b(f)}{\|f\|^s}$ 和 $\sum\limits_{f\in\mathcal{M}}\frac{\beta(f)}{\|f\|^s}$。

由 $\beta(f)$ 的定义以及可乘性可知

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\beta(f)}{\|f\|^s}=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\chi_b\left(p^k\right)\|p\|^{\frac{k}{b}}}{\|p\|^{ks}}\right),$$

由 $\chi_b(f)$ 的定义，只有当 $p^k=p^{mb},m=0,1,\cdots$ 时才不为 0，从而可得

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\beta(f)}{\|f\|^s}=\prod_p\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\chi_b\left(p^{mb}\right)\|p\|^m}{\|p\|^{mbs}}\right)=\prod_p\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\|p\|^{m(bs-1)}}\right),$$

计算可知

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\beta(f)}{\|f\|^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{\|p\|^{bs-1}}\right)^{-1}=\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)。$$

从而由

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\alpha(f)}{\|f\|^s}=\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\varphi_b(f)}{\|f\|^s}\cdot\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\beta(f)}{\|f\|^s}$$

以及 $\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ 的收敛范围可知结论成立。

3. 定理 1.1 的证明

由引理 2.2.3 可知，

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\alpha(f)}{\|f\|^s}=\frac{\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)}{\zeta_{\mathcal{A}}(bs)}。\tag{3.1}$$

将等式右边的三个函数分别用级数来表示：

$$\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)=\frac{1}{1-q^{2-s}}=\frac{1}{1-q^2u}=\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}u^k，\ |u|<q^{-2},$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)=\frac{1}{1-q^{2-bs}}=\frac{1}{1-q^2u^b}=\sum_{m=0}^{\infty}q^{2m}u^{bm}，\ |u|<q^{-\frac{2}{b}},$$

对于 $\zeta_{\mathcal{A}}^{-1}(bs)$，我们有

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{-1}(bs)=1-q^{1-bs}=1-qu^{b}\text{，}\quad |u|<q^{-\frac{1}{b}}\text{。}$$

从而我们有

$$\frac{\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)}{\zeta_{\mathcal{A}}(bs)}=\left(\sum_{k,m=0}^{\infty}q^{2k+2m}u^{k+bm}\right)\left(1-qu^{b}\right)=\sum_{k,m=0}^{\infty}q^{2k+2m}u^{k+bm}-\sum_{k,m=0}^{\infty}q^{2k+2m+1}u^{k+b(m+1)}\text{，}$$

分别令 $k+bm=n$ 和 $k+b(m+1)=v$，可得

$$\frac{\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)}{\zeta_{\mathcal{A}}(bs)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{bm+k=n}q^{2m+2k}u^{n}-\sum_{v=b}^{\infty}\sum_{b(m+1)+k=v}q^{2m+2k+1}u^{v}\text{。}$$

由于上式右边第二项在 $v\le b-1$ 时是无意义的，可定义为 0，则有

$$\frac{\zeta_{\mathcal{A}}(s-1)\zeta_{\mathcal{A}}(bs-1)}{\zeta_{\mathcal{A}}(bs)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{bm+k=n}q^{2m+2k}-\sum_{b(m+1)+k=n}q^{2m+2k+1}\right)u^{n}\text{。}\tag{3.2}$$

又由于

$$\sum_{f\in\mathcal{M}}\frac{\alpha(f)}{\|f\|^{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\frac{\alpha(f)}{q^{ns}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{f\in\mathcal{M}_n}\alpha(f)u^{n}\text{。}\tag{3.3}$$

由公式(3.1)，(3.2)和(3.3)比较两边系数可知定理成立。

基金项目

国家自然科学基金(项目编号：12071238)资助。

参考文献

[1] Broughan, K.A. (2001) The gcd-Sum Function. *Journal of Integer Sequences*, **4**, Article 01.2.2.

[2] Bordellès, O. (2007) A Note on the Average Order of the gcd-Sum Function. *Journal of Integer Sequences*, **10**, Article 07.3.3.

[3] Tóth, L. (2010) A Survey of gcd-Sum Functions. *Journal of Integer Sequences*, **13**, Article 10.8.1.

[4] Broughan, K.A. (2007) The Average Order of the Dirichletseries of the gcd-Sum Function. *Journal of Integer Sequences*, **10**, Article 07.4.2.

[5] Tóth, L. (2009) A gcd-Sum Function over Regular Integers Modulo n. *Journal of Integer Sequences*, **12**, Article 09.2.5.

[6] Zhang, D. and Zhai, W. (2010) Mean Values of a gcd-Sum Function over Regular Integers Modulo n. *Journal of Integer Sequences*, **13**, Article 10.3.8.

[7] Chaubey, S. and Goel, S. (2020) Mean Value Estimates of gcd and lcm-Sums. arXiv: 2006.15856v2.

[8] Rosen, M. (2002) Number Theory in Function Fields. Springer-Verlag, New York, 11-19. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6046-0_2