Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 731-738
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115088

Hans汉斯

最小球B*的Kähler相关性

张倩男

青岛大学，山东 青岛
Email: QN_Zhang2020@163.com

收稿日期：2021年4月6日；录用日期：2021年5月11日；发布日期：2021年5月18日

摘　要

在这篇文章中，我们研究了最小球B*的Kähler几何性质。主要探索了赋予Bergman度量的最小球B*和复欧式空间 $\mathbb{C}^n$ 的相关性问题。本文借助最小球B*的Bergman核函数的具体形式以及纳什代数函数的性质，发现最小球B*和 $\mathbb{C}^n$ 不存在共同的Kähler子流形，即B*和 $\mathbb{C}^n$ 是Kähler不相关的。

关键词

最小球B*，Kähler子流形，Bergman度量

The Kähler Relatives of the Minimal Ball B*

Qiannan Zhang

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: QN_Zhang2020@163.com

Received: Apr. 6th, 2021; accepted: May 11th, 2021; published: May 18th, 2021

Abstract

In this article, we focus on the common Kähler submanifold problem of the minimal ball B* and the complex Euclidean space $\mathbb{C}^n$. By using the specific form of the Bergman kernel function of B*, we find that there is no Kähler submanifold between B* and $\mathbb{C}^n$. That is, B* and $\mathbb{C}^n$ are Kähler irrelevant.

Keywords

The Minimal Ball B*, Kähler Submanifolds, Bergman Metric

文章引用: 张倩男. 最小球 B*的 Kähler 相关性[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 731-738.
DOI: 10.12677/pm.2021.115088

1. 引言

众所周知，根据全纯截面曲率的符号，我们可将复空间分为三类，分别是复欧式空间 C^n、复射影空间 CP^n 和复双曲空间 CH^n。而研究 Kähler 流形是否可以全纯等距嵌入到以上三种复空间形式是复几何中非常重要的课题。而对于这方面进行较为系统的研究的是 Calabi。在文献[1]中，Calabi 利用距离函数，详细地给出了 Kähler 流形全纯等距嵌入到以上三种空间形式的判定准则。在这之后，有很多的数学家致力于研究各类复流形的全纯等距嵌入问题。例如，在 2007 年，Scala-Loi [2]研究了 Hermitian 对称空间到复空间形式的 Kähler 映射。相关的其他研究可参考程-Scala-袁[3]，Mossa [4]以及 Zedda [5]。

而 Umehara [6]从不同的角度对非平凡 Kähler 子流形进行了思考。在文献[7]中，他证明了两个具有不同曲率的复空间形式不存在具有共同诱导度量的 Kähler 子流形。受此启发，在 2010 年，Scala-Loi [8]给出两个 Kähler 流形相关性的概念：

定义 1.1 我们称两个 Kähler 流形是 Kähler 相关的，如果它们之间存在共同的 Kähler 子流形。否则，就称为是 Kähler 不相关的。

此外，他们还证明了一个赋予 Bergman 度量的有界域和一个具有 Fubini-Study 度量的射影 Kähler 流形是不相关的。所以我们自然会想这样的问题：赋予 Bergman 度量的有界域和复欧式空间 $\mathbb{C}^n$ 是否会存在共同的子流形。

最近，黄－袁[9]运用纳什代数函数证明了复欧式空间和一个非紧致的 Hermitian 对称空间之间不存在共同的 Kähler 子流形。在这之后，程－牛[10]利用黄－袁的技巧，考虑了一类非齐次域上的 Kähler 流形的相关性问题，并且证明了复欧式空间和一个赋予 Bergman 度量的 Cartan-Hartogs 区域是不相关的。在 2017 年，Zedda [5]利用等距嵌入的方法给出了一个 Kähler 流形与任意射影 Kähler 流形都强不相关的充分条件。在 2018 年，苏－唐－涂[11]利用对称双圆盘的 Bergman 核函数具体形式，发现复欧式空间和具有典范度量的对称多圆盘也不存在共同的 Kähler 子流形。而从他们的文章当中我们发现，当区域的 Bergman 核函数满足一定特性时，我们是可以建立复欧式空间和该区域的相关性。

因此在本篇文章中，我们主要考虑 $\mathbb{C}^n\left(n\geq 2\right)$ 当中的一类凸的有界域 $\mathbf{B}_*$，其具体的定义如下：

$$B_* := \left\{ z\in\mathbb{C}^n : |z|^2 + |z\cdot z| < 1 \right\}$$

这里 $z\cdot z=\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2}$。$\mathbf{B}_*$ 是半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球，在该区域上，我们可以赋予一个自然范数

$$N_*\left(z\right)=\sqrt{\frac{|z|^2+|z\cdot z|}{2}},\ z\in\mathbb{C}^n .$$

很显然，在该范数下 $\mathbf{B}_*$ 可视为半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球。事实上，这个范数 N_* 是由 Hahn-PHug [12]引入的，并且证明了 N_* 是 $\mathbb{C}^n$ 中的如下意义下最小范数：

对于 $\mathbb{C}^n$ 中任意范数 N，如果它满足：$N\left(x\right)=|x|:=\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$x\in\mathbb{R}^n$，$N\left(z\right)\leq z,\ z\in\mathbb{C}^n$，那么有

$N^*(z) \le N(z),\ z \in \mathbb{C}^n$。

此外，他们还证明了最小球$\mathbf{B}_*$既不双全纯等价于单位球$B=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<1\}$，也不双全纯等价于多圆盘$D^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_j|<1\}$。

最小球$\mathbf{B}_*$这个区域得到了很多学者的关注，并且取得了很漂亮的结果。例如，Oeljeklaus-Pflug-Youssfi [13]发现：最小球$\mathbf{B}_*$是$\mathbb{C}^n$中的第一个既不是 Reinhardt 域、也不是齐次域的有界域。此外，$\mathbf{B}_*$的自同构群是紧致的，并且自同构群中含恒等映射的连通分支可表示为：

$$Aut_{\mathcal{O}}^0(B_*) = S^1 \cdot SO(n,R)$$

从上面的形式可知：当$n\ge 3$时，最小球$\mathbf{B}_*$不双全纯等价于任何的 Reinhardt 域。而且当$n=2$时，最小球$\mathbf{B}_*$线性双全纯等价于 Reinhardt 三角形$\{(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|+|z_2|<1\}$。另外，在 1998 年，Pflug-Youssfi [14]发现可以用球$\mathbf{B}_*$来构造对陆启铿猜想的反例，这使得对最小球$\mathbf{B}_*$的研究更有意义。此后，Youssfi [15]计算出了最小球$\mathbf{B}_*$的加权 Bergman 核函数。以往关于最小球$\mathbf{B}_*$的研究多是从分析的角度进行的，而几何角度的研究较少，故本文希望通过几何的观点出发对最小球$\mathbf{B}_*$几何性质进行研究和探索。

具体来说，本文主要研究了最小球$\mathbf{B}_*$和复欧式空间是否相关或是否存在共同的$K\ddot{a}hler$子流形，并得到如下结论：

定理 1.2 设$D\subset\mathbb{C}$是连通开子集。假设$F=(f_1,f_2,\cdots,f_n):D\to\mathbb{C}^n$，$G=(g_1,g_2,\cdots,g_n):D\to B_*$是全纯映射，并且使得

$$F^*\omega_{\mathbb{C}^n} = G^*\omega_{B_*} \tag{1}$$

在 D 上成立，这里，$\omega_{\mathbb{C}^n}$是$\mathbb{C}^n$的欧式度量，则F必须是常映射。

由于 Bergman 核函数是全纯纳什代数函数，用同样的方法我们可以得到：

推论 1.3 不存在一个 Kähler 流形$(\mathbb{C}^n,\omega_{\mathbb{C}^n})$能够同时全纯等距的嵌入到复欧式空间$(\mathbb{C}^n,\omega_{\mathbb{C}^n})$和最小球$(B_*,\omega_{B_*})$。也就是说，欧式空间和最小球$\mathbf{B}_*$是 Kähler 不相关的。

通过类似方法，我们也可以得到如下结果：

定理 1.4 不存在一个 Kähler 流形(CP^n,ω_{CP^n})能够同时全纯等距的嵌入到复射影空间$(\mathbb{C}^n,\omega_{\mathbb{C}^n})$和最小球$(B_*,\omega_{B_*})$。也就是说，复射影空间和最小球$\mathbf{B}_*$之间是 Kähler 不相关的。

2. 预备知识

2.1. 全纯纳什代数函数

为了证明主定理，我们先简单介绍一下纳什代数函数的基本概念及其性质。

定义 2.5 我们称$U\subseteq\mathbb{C}^k$中的全纯函数F是全纯纳什代数函数，如果存在X上的并且系数是关于z的多项式的非零全纯多项式$P(z,X)$，使得在U上有$P(z,F(z))\equiv 0$成立。

因此，我们可以假定$P(z,X)$是一个不可约多项式：

$$P(z,X) = a_d(z)X^d + a_{d-1}(z)X^{d-1} + \cdots + a_0(z)$$

这里$a_i(z)$ $(i=0,1,\cdots,d)$是z的全纯多项式，并且无公因式。若$a_d(z)\ne 0$，则$P(z,X)$就被称为$F(z)$的湮灭函数。

2.2. 最小球 B*的 Bergman 核函数

为了证明我们的定理，我们给出以下几个引理：

引理 2.6 最小球B_*的 Bergman 核函数有如下形式：

DOI: 10.12677/pm.2021.115088

$$K_{B_*}(z,w)=\frac{1}{n(n+1)V(B_*)}\frac{\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n+1}^{2j+1}X^{n-1-2j}Y^j\left(2nX-(n-2j)\left[X^2-Y\right]\right)}{\left(X^2-Y\right)^{n+1}}$$

这里 $X=1-\langle z,w\rangle$， $Y=(z\cdot z)\overline{w\cdot w}$，并且 $V(B_*)$ 表示 B_* 的 Lebesgue 体积。

特别地，当 $n=2$ 时， B_* 的 Bergman 核函数有如下形式：

$$K_{B_*}(z,w)=\frac{2}{\pi^2}\frac{3(1-\langle z,w\rangle)^2(1+\langle z,w\rangle)+(z\cdot z)\overline{w\cdot w}(5-3\langle z,w\rangle)}{\left((1-\langle z,w\rangle)^2-(z\cdot z)\overline{w\cdot w}\right)^3}.$$

引理 2.7 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中的连通开集，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in U$。假设 $H_1(\xi),\cdots,H_l(\xi)$ 和 $H(\xi)$ 是 U 上的全纯纳什代数函数，使得

$$\exp H(\xi)=\prod_{i=1}^{l}\left(H_i(\xi)\right)^{\mu_i}$$

对任意实数 $\mu_1,\cdots,\mu_l$ 成立，则 $H(\xi)$ 是 U 中的常数。

证明 该定理的证明请参照[9]。

3. 主定理的证明

本文运用反证法来完成主定理的证明。

假设 $F:D\to\mathbb{C}^m$ 不是常映射，不失一般性，设 D 是单连通的，并且 $0\in D$， $F(0)=0$。由(1)式得：

$$\partial\bar{\partial}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|f_j(z)\right|^2-\log K_{B_*}\left(G(z),G(z)\right)\right)=0,\ z\in D \tag{2}$$

由(2)可得：$\sum_{j=1}^{m}\left|f_j(z)\right|^2-\log K_{B_*}\left(G(z),G(z)\right)$ 是关于 $z(\in D\subset\mathbb{C})$ 的调和函数，所以存在 D 上的全纯函数 $\varphi(z)$，使得

$$\sum_{j=1}^{m}\left|f_j(z)\right|^2-\log K_{B_*}\left(G(z),G(z)\right)=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)} \tag{3}$$

由 $F(0)=0$ 可知：$2\operatorname{Re}(\varphi(0))=-\log K_{B_*}\left(G(0),G(0)\right)$。将(3)式中的一个 z 变为 w 得：

$$\sum_{j=1}^{m}f_j(z)\overline{f_j(w)}-\log K_{B_*}\left(G(z),G(w)\right)=\varphi(z)+\overline{\varphi(w)},\ (z,w)\in D\times D \tag{4}$$

上式中，令 $w=0$，则有

$$\varphi(z)=-\log K_{B_*}\left(G(z),G(0)\right)-\overline{\varphi(0)} \tag{5}$$

根据引理 2.3 知，域 B_* 上的 Bergman 核函数为：

$$K_{B_*}(\xi,\eta)=\frac{1}{n(n+1)V(B_*)}\frac{\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n+1}^{2j+1}X^{n-1-2j}Y^j\left(2nX-(n-2j)\left[X^2-Y\right]\right)}{\left(X^2-Y\right)^{n+1}} \tag{6}$$

这里 $X=1-\langle\xi,\eta\rangle$, $Y=(\xi\cdot\xi)\overline{\eta\cdot\eta}$。

令 $K_{B_*}(\xi,\eta):=\dfrac{P_1(\xi,\overline{\eta})}{P_2(\xi,\overline{\eta})}$，

这里 $P_1(\xi,\overline{\eta})=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n+1}^{2j+1}X^{n-1-2j}Y^j\left(2nX-(n-2j)\right)\left[X^2-Y\right],\ P_2(\xi,\overline{\eta})=\left(X^2-Y\right)^{n+1}$。

则从(4)式可以看出：$P_1(\xi,\overline{\eta})$，$P_2(\xi,\overline{\eta})$ 都是 $\xi,\overline{\eta}$ 的多项式，并且都是关于 ξ 全纯，关于 η 反全纯的。

注意到 $\{f_i(z)\}_{i=1}^m$ 可以被写为 $g_1(z),\cdots,g_n(z)$ 的全纯有理函数。因为 $K_{B_*}(\cdot,\cdot)$ 是 $B_*\times B_*$ 上的实解析函数，并且有 $K_{B_*}(\xi,\xi)\neq 0$。故假设存在两个包含原点的邻域 U_1,U_2，使得：

$$K_{B_*}(G(z),G(w))\neq 0, P_1\left(G(z),\overline{G(w)}\right)\neq 0,\ (z,w)\in U_1\times U_2$$

我们引入符号 $D^\alpha\left(\overline{F}(z)\right)$，定义如下：

$$D^\alpha\left(\overline{F}(z)\right)=\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\overline{w}^\alpha}\overline{f}_1(w),\cdots,\frac{\partial^\alpha}{\partial\overline{w}^\alpha}\overline{f}_n(w)\right),\ \forall\alpha\in\mathbb{N} \tag{7}$$

对于固定原点附近的 z，对(4)式关于 $\overline{w}$ 求导再令 $\overline{w}\to 0$，则有

$$F(z)\cdot D^1\left(\overline{F(0)}\right)=\frac{1}{K_{B_*}(G(z),G(0))}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial K_{B_*}}{\partial\overline{\eta}_k}(G(z),G(0))\frac{\partial\overline{g_k(w)}}{\partial\overline{w}}\right\}+\overline{\varphi'(0)} \tag{8}$$

令 $K_{B_*}(G(z),G(w))=\dfrac{H_1\left(G(z),\overline{G(w)}\right)}{H_2\left(G(z),\overline{G(w)}\right)}$，化简(8)式可得

$$F(z)\cdot D^1\left(\overline{F(0)}\right)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_1}{\partial\overline{\eta}_k}(G(z),G(0))\frac{\partial\overline{g_k(0)}}{\partial\overline{w}}}{H_1\left(G(z),\overline{G(0)}\right)}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_2}{\partial\overline{\eta}_k}(G(z),G(0))\frac{\partial\overline{g_k(0)}}{\partial\overline{w}}}{H_2\left(G(z),\overline{G(0)}\right)}+\overline{\varphi'(0)} \tag{9}$$

注意到：上式右边是关于 $g_1(z),\cdots,g_n(z)$ 的全纯有理函数。同理，对于任意的正整数 α 以及零点附近的 z，我们有：

$$F(z)\cdot D^\alpha\overline{(F(0))}=Q_\alpha\left(g_1(z),\cdots,g_n(z)\right),\ \alpha=1,2,\cdots \tag{10}$$

这里 $Q_\alpha\left(g_1(z),\cdots,g_n(z)\right)$ 是关于 $g_1(z),\cdots,g_n(z)$ 的全纯有理函数。

定义 $\mathbb{V}:=Span_{\mathbb{C}}\left\{D^\alpha\left(\overline{F}(w)\right)\Big|_{w=0}\right\}_{\alpha\geq 1}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的向量空间。

前面我们假设 F 不是常映射，所以 $\mathbb{V}$ 不是零空间。设 $\mathbb{V}$ 中的一组基为 $\left\{D^{\alpha_j}\left(\overline{F}(w)\right)\Big|_{w=0}\right\}_{j=1}^{d}$。

因为 $F(w)$ 在 D 中是反全纯的，并且 $F(0)=0$，对零点附近的 w，运用 Taylor 展开式，我们有

$$\overline{F}(w)=\sum_{\alpha\geq 1}\frac{D^\alpha\left(\overline{F}(0)\right)}{\alpha!}\overline{w}^\alpha\in\mathbb{V}$$

这里 D^α 是由(6)式所定义的。对于零点附近的小邻域 U_0，我们有 $\overline{F}(U_0)\subseteq\mathbb{V}$。

另一方面，取向量空间 $\mathbb{V}^\perp$ 的一组基 $\{v_j\}_{j=1}^{n-d}$，则有：

$$F(z)\cdot v_j=0,\ j=1,\cdots,n-d$$

结合(7)式，可以得到一个非退化的线性方程组：

$$\left(f_1, f_2, \cdots, f_n\right)\begin{pmatrix} D^{\alpha_1}\left(\overline{F(w)|_{w=0}}\right) \\ \cdots \\ D^{\alpha_d}\left(\overline{F(w)|_{w=0}}\right) \\ v_1 \\ \cdots \\ v_{n-d} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} Q_{\alpha_1} \\ \cdots \\ Q_{\alpha_d} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

由 Gramer 法则可知：F 中的分量 f_j 都可被 $\left\{Q_{\alpha_j}\right\}_{j=1}^{d}$ 线性表出，即可将 f_j 写为如下形式：

$$f_j = \tilde{Q}\{g_1, g_2, \cdots, g_n\},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

这里 $\tilde{Q}\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}_{j=1}^{n}$ 是 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的全纯有理函数。从而，$\left\{f_j\right\}_{j=1}^{n}$ 是 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的全纯纳什代数函数。

下面，我们分两种情形讨论。

设 R 是 $z \in D$ 上的有理函数域。考虑域扩张：$\tilde{R} = R\left(g_1, g_2, \cdots, g_n\right)$，也就是 D 上的亚纯函数的最小子域，其中包含有理函数和 $g_1, g_2, \cdots, g_n$。定义 $trdge\left(\tilde{R}/R\right)$，表示域扩张 $\tilde{R}/R$ 的超越次数。最后，我们通过分析超越次数来完成定理证明。

首先：如果 $trdge\left(\tilde{R}/R\right) = 0$，即 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 都是 z 的全纯纳什代数函数。结合上面的讨论，我们会得到：f_j 仍是 z 的全纯纳什代数函数。

由引理 2.4 及

$$\begin{aligned} &\exp\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\overline{f_i(w)}\right) \\ &= \exp\left\{\varphi(z) + \overline{\varphi(w)}\right\} K_{B_*}\left(G(z), G(w)\right) \\ &= \exp\left\{-\left(\varphi(0) + \overline{\varphi(0)}\right)\right\} \frac{K_{B_*}\left(G(z), G(w)\right)}{K_{B_*}\left(G(z), G(0)\right) K_{B_*}\left(G(0), G(w)\right)} \end{aligned}$$

我们可知：F 是常映射。

其次：如果 $trdge\left(\tilde{R}/R\right) := l > 0$，即 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 不全是 z 的全纯纳什代数函数。

不失一般性，设存在 $g_1, g_2, \cdots, g_l$ $(l \le n)$ 是 $\tilde{R}$ 子域的最大的代数子集，则

$$trdge\left(\tilde{R}/R\left(g_1, g_2, \cdots, g_l\right)\right) = 0$$

因此，$\{g_{l+1}, \cdots, g_n\}$ 中的元素都是 $z, g_1, g_2, \cdots, g_l$ 的全纯纳什代数函数。也就是说，对 $\{g_i\}_{i=l+1}^{n}$，存在包含零点的小邻域 V，在 $\left\{\left(z, g_1, g_2, \cdots, g_l\right) \middle| z \in V\right\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^l$ 的邻域 $\hat{V}$ 上能找到全纯纳什代数函数 $\{\hat{g}(z, X)\}_{i=l+1}^{n}$ 使得

$$g_i(z) = \hat{g}_i\left(z, g_1, g_2, \cdots, g_l\right),\ i = 1, \cdots, n, \forall z \in V$$

这里，$X = \left(X_1, \cdots, X_l\right)$。

由上面的分析可知：存在 $\hat{V}$ 上的纳什代数函数 $\left\{\hat{f}_i(z, X)\right\}_{i=1}^{n}$ 使得

$$f_i(z) = \hat{f}_i\left(z, g_1, g_2, \cdots, g_l\right),\ i = 1, \cdots, n$$

定义 $G(z, X) = \left(\hat{g}_{l+1}(z, X), \cdots, \hat{g}_n(z, X)\right)$。由(4)及(5)，我们可定义 $\hat{V} \times V$ 上的一个函数：

$$\begin{aligned} \phi(z, X, w) = &\sum_{i=1}^{m} \hat{f}_i(z, X)\, \hat{f}_i(w) - \log K_{B_*}\left(X, \hat{G}(z, X), G(w)\right) \\ &+ \log K_{B_*}\left(X, \hat{G}(z, X), G(0)\right) + \overline{\varphi(0)} - \overline{\varphi(w)} \end{aligned}$$

显然，在 V 上，有 $\phi(z,g_1,\cdots,g_l,w)\equiv 0$。现在我们要证明 $\phi(z,g_1,\cdots,g_l,w)\equiv 0$ 在 $\hat{V}\times V$ 上成立。这里利用苏－唐－涂[11]的方法是可以得到的，但为了叙述完整，我们还是写出详细证明。

定义 $\rho(z,X,w)=\frac{\partial\phi}{\partial\varpi}(z,X,w)$。我们只需证 $\rho(z,X,w)\equiv 0$ 在 $\hat{V}\times V$ 上成立。

如果 $\rho(z,X,w)\equiv 0$ 不成立，则必存在 $0(\in V)$ 的一个小邻域 V_0，使得 $\rho(z,X,w)\neq 0$。

对于固定的 $w_0\in V_0$，$\rho(z,X,w_0)$ 是 (z,X) 的全纯多项式。假设它的湮灭函数如下：

$$P(z,X,t)=a_d(z,X)t^d+\cdots+a_0(z,X)$$

这里，在 $\hat{V}$ 中，$a_0(z,X)\neq 0$，$\{a_i(z,X)\}_{i=0}^{d}$ 是 z,X 的全纯纳什代数函数。容易看出，在 V 上有

$$\rho(z,g_1,\cdots,g_l,w)=0$$

进而有，在 V 上，$\rho(z,X,w)\equiv 0$。从而可得：

$$P(z,g_1,\cdots,g_l,\phi(z,g_1,\cdots,g_l,w_0))=P(z,g_1,\cdots,g_l,0)=a_0(z,g_1,\cdots,g_l)=0。$$

于是我们可得到如下结论：$\{g_1,\cdots,g_l\}$ 是 R 上的代数。这与之前的假设是矛盾的。

故对所有的 $(z,X)\in\hat{V},w\in V_0$，有 $\rho(z,X,w)\equiv 0$。

从而，对 $(z,X,w)\in\hat{V}\times V$，我们考虑如下等式：

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{f}_i(z,X)\hat{f}_i(w)=\log K_{B_*}\left(X,\hat{G}(z,X),G(w)-\log K_{B_*}\left(X,\hat{G}(z,X),G(0)\right)-\overline{\varphi(0)}+\overline{\varphi(w)}\right)$$

这里，$(z,X,w)\in\hat{V}\times V$。

特别地，对于固定的 z,w，上述等式的右边在 $\hat{V}\times V$ 上不恒等于 0。

如若不然，假设 $\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(z,X)\hat{f}_i(w)\equiv 0$，令 $w=z$，我们有：

$$\sum_{i=1}^{m}\left|f_i(z)\right|^2=\sum_{i=1}^{m}\hat{f}_i(z,g_1,\cdots,g_l)\overline{f}(z)\equiv 0。$$

从上式可以看出：$\{f_i(z)\}_{i=1}^{m}$ 是常映射。这与假设矛盾。

接下来，我们考虑如下等式：

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(z,X)\overline{f}_i(w)\right)=\exp\left\{-\left(\varphi(0)+\overline{\varphi(0)}\right)\right\}\frac{K_{B_*}\left(\left(X,\hat{G}(z,X)\right),G(w)\right)}{K_{B_*}\left(\left(X,\hat{G}(z,X)\right),G(0)\right)K_{B_*}\left(G(0),G(w)\right)}$$

注意到，对固定的 z,w，$\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(z,X)\overline{f}_i(w)$ 是 X 上的非常数全纯纳什代数函数，并且等式右边仍然是 X 的全纯纳什代数函数，这与引理 2.7 是矛盾的。因此，F 必须是常数。

这就完成了定理的证明。

参考文献

[1] Calabi, E. (1953) Isometric Imbedding of Complex Manifolds. *Annals of Mathematics*, **58**, 1-23. https://doi.org/10.2307/1969817

[2] Scala, A. and Loi, A. (2007) Kähler Maps of Hermitian Symmetric Spaces into Complex Forms. *Geometriae Dedicata*, **125**, 103-113. https://doi.org/10.1007/s10711-007-9142-z

[3] Cheng, X., Scala, A. and Yuan, Y. (2017) Kähler Submanifolds and the Umehara Algebra. *International Journal of Mathematics*, **28**, Article ID: 1750027. https://doi.org/10.1142/S0129167X17500276

[4] Mossa, R. (2013) A Bounded Homogeneous Domain and a Projective Manifold Are Not Relatives. *Rivista di Matematica della Universita di Parma*, **4**, 55-59.

[5] Zedda, M. (2017) Strogly Not Relative Kahler Manifolds. *Complex Manifolds*, **4**, 1-6. https://doi.org/10.1515/coma-2017-0001

[6] Umehara, M. (1987) Kaehler Submanifolds of Complex Space Forms. *Tokyo Journal of Mathematics*, **10**, 203-214. https://doi.org/10.3836/tjm/1270141804

[7] Kim, K.T. (1991) Automorphism Groups of Certain Domain Domains in C^n with Singular Boundary. *Pacific Journal of Mathematics*, **151**, 54-64. https://doi.org/10.2140/pjm.1991.151.57

[8] Scala, A. and Loi, A. (2010) Kahler Manifolds and Their Relatives. *Annali Scuola Normale Superiore-Classe di Scienze*, **9**, 495-501. https://doi.org/10.2422/2036-2145.2010.3.02

[9] Huang, X. and Yuan, Y. (2015) Submanifolds of Hermitian Symmetric Spaces. In: Baklout, A., El Kacim, A., Kallel, S. and Mir, N., Eds., *Analysis and Geanmetry*, Vol. 127, Springer, Cham, 197-206. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17443-3_10

[10] Cheng, X. and Niu, Y. (2017) Submanifolds of Cartan-Hartogs Domains and Complex Eulidean Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **452**, 1262-1268. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.03.043

[11] Su, G.C., Tang, Y.Y. and Tu, Z.H. (2018) Kähler Submanifolds of the Symmetrized Polydisc. *Comptes Rendus Mathematique*, **356**, 387-394. https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.03.009

[12] Hahn, E.T. and Pflug, P. (1988) On a Minimal Complex Norm That Extends the Euclidean Norm. *Monatshefte für Mathematik*, **105**, 107-112. https://doi.org/10.1007/BF01501163

[13] Oeljeklaus, K., Pflug, P. and Youssfi, E.H. (1997) The Bergman of the Minimal Ball and Applications. *Annales de l'Institut Fourier*, **47**, 915-928. https://doi.org/10.5802/aif.1585

[14] Pflug, P. and Youssfi, E.H. (1998) The Lu Qi-Keng Conjecture Fails for Strongly Convex Algebraic Domains. *Archiv der Mathematik*, **71**, 240-245. https://doi.org/10.1007/s000130050259

[15] Youssfi, G. (1999) The Weighted Bergman Projection and Related Theory on the Minimal Ball. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **123**, 501-525. https://doi.org/10.1016/S0007-4497(99)00110-4