

# 平面曲线局部性质的数值化与极限环

陈金和

东华理工大学, 理学院数学系, 江西 抚州  
Email: [cjhgzafz@163.com](mailto:cjhgzafz@163.com)

收稿日期: 2021年4月15日; 录用日期: 2021年5月19日; 发布日期: 2021年5月26日

---

## 摘要

本文通过引入非对称度、拱度、偏度等概念, 刻画平面曲线的局部性质, 获得平面曲线局部性质的数值化理论, 并应用此数值化理论讨论平面微分系统极限环的求解问题, 为极限环的研究, 特别是希尔伯特第16个问题有关极限环的存在个数问题的研究, 提供一种新的研究思路与方法。

## 关键词

拱度, 偏度, 极限环

---

# Numerization to Local Property of Plane Curve and Limit Cycles

Jinhe Chen

School of Science, East China University of Technology, Fuzhou Jiangxi  
Email: [cjhgzafz@163.com](mailto:cjhgzafz@163.com)

Received: Apr. 15<sup>th</sup>, 2021; accepted: May 19<sup>th</sup>, 2021; published: May 26<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

In this paper, we characterize the local properties of plane curves by introducing the geometric concepts of asymmetry, archness and skewness, and obtain the local numerical theory of plane curves. We discuss the solving process of limit cycles by numerization to local property of plane curve, which is the study of limit cycles. A new idea and method are given for study to limit cycles, especially the existence of limit cycles in Hilbert's 16th problem.

## Keywords

Archness, Skewness, Limit Cycles

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

极限环最早是 H. Poincare 在他的论文《微分方程所定义的积分曲线》中提出[1] [2] [3] [4]。1901 年瑞典数学家 I. Bendixson 以同样的题目发表了一篇论文[5]，完善了 Poincare-Bendixson 理论。同年，著名数学家 D. Hilbert 在国际数学大会上提出了一系列的数学难题[6]，其中第 16 个问题的后半部分就是关于极限环的存在数量问题。迄今一个多世纪过去了，D. Hilbert 第 16 个问题有关极限环的存在个数问题仍未解决。为此我们在文[7]中提出平面曲线局部性质的数值化问题，并指出通过曲线性质的数值化可以求出平面微分系统极限环的方程，从而解决极限环的存在性与存在个数问题。本文解决了文[7]中提出的第一个问题——平面曲线局部性质的数值化，并对第二个问题——极限环的求解问题给出了若干解决方法。与文[7]一样，本文用  $R$  表示平面曲线的曲率半径， $R_1$  表示  $R$  对曲线弧长的一阶导数  $\frac{dR}{ds}$ ， $R_2$  表示  $R$  对弧长的二阶导数  $\frac{d^2R}{ds^2}$ 。

## 2. 基本定义

我们先讨论平面曲线对称性的数值表示。

设  $L$  是足够光滑的严格凸平面曲线， $O$  点是曲线  $L$  上一点，以过  $O$  点的切线为  $x$  轴，法线为  $y$  轴，如图 1 建立直角坐标系。设曲线  $L$  的方程为： $y = y(x)$ 。

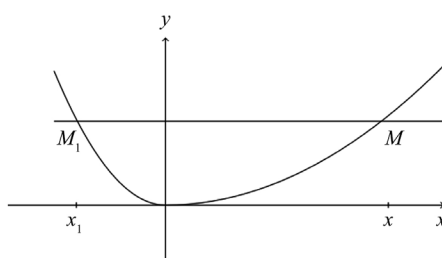


Figure 1. Curve  $y = y(x)$

图 1. 曲线  $y = y(x)$

过  $O$  点附近曲线  $L$  上点  $M(x, y)$  作  $x$  轴平行线与曲线  $L$  交于另一点  $M_1(x_1, y_1)$ 。显然有  $y(x_1) = y(x)$ 。由此确定  $x_1$  是  $x$  的隐函数。对  $y(x_1) = y(x)$  两边求导数，得  $y'(x_1)x_1' = y'(x)$  令  $x \rightarrow 0$ ，注意到  $y'(0) = 0$ ，有：

$$x_1'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{y'(x_1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''(x)}{y''(x_1)x_1'} = \frac{1}{x_1'(0)},$$

由于当  $x$  减少时,  $x_1$  是增加的, 所以  $x_1' \leq 0$ , 因此  $x_1'(0) = -1$ 。

继续对  $y'(x_1)x_1' = y'(x)$  两边关于  $x$  求导得  $y''(x_1)x_1'^2 + y'(x_1)x_1'' = y''(x)$ 。于是

$$\begin{aligned} x_1''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''(x) - y''(x_1)x_1'^2}{y'(x_1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'''(x) - y'''(x_1)x_1'^3 - 2y''(x_1)x_1'x_1''}{y''(x_1)x_1'} \\ &= -\frac{2y'''(0)}{y''(0)} - 2x_1''(0) \end{aligned}$$

$$\text{即 } x_1''(0) = -\frac{2y'''(0)}{3y''(0)}。$$

继续对  $y''(x_1)x_1'^2 + y'(x_1)x_1'' = y''(x)$  两边关于  $x$  求导, 有:

$$y'''(x_1)x_1'^3 + 3y''(x_1)x_1'x_1'' + y'(x_1)x_1''' = y'''(x)。$$

于是

$$\begin{aligned} x_1'''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'''(x) - y'''(x_1)x_1'^3 - 3y''(x_1)x_1'x_1''}{y'(x_1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^{(4)}(x) - y^{(4)}(x_1)x_1'^4 - 6y'''(x_1)x_1'^2x_1'' - 3y''(x_1)x_1'^2 - 3y''(x_1)x_1'x_1'''}{y''(x_1)x_1'} \\ &= -\frac{4y^{(4)}(0)}{y'''(0)} + \frac{4y^{(4)}(0)}{3y'''(0)} - 3x_1'''(0) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } x_1'''(0) = -\frac{2y^{(4)}(0)}{3y'''(0)}。$$

$x_1(x)$  的这些导数, 我们将会用到。为了叙述方便, 我们将严格凸平面曲线两点间的弧称为拱。例如图 1 曲线  $L$  上的点  $M, M_1$  之间的弧就是一个拱。拱的两个端点间的连线称为拱的弦, 与弦平行的切线到弦的距离称为拱的高。曲线  $L$  在  $O$  点关于  $y$  轴是否对称, 显然是曲线在  $O$  点的一个重要的局部性质。曲线  $L$  在  $O$  点关于  $y$  轴是否对称, 与点  $M$  到  $y$  轴的距离  $x$  与弦  $MM_1$  长度的一半  $\frac{x-x_1}{2}$  的差  $\frac{x+x_1}{2}$  是否为零有关,  $\frac{x+x_1}{2y(x)}$  表示拱高为  $y(x)$  时曲线  $L$  在  $O$  点的不对称程度, 于是有:

**定义 1.1**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x_1}{2y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x_1'}{2y'(x)} = \frac{x_1'(0)}{2y''(0)} = -\frac{y'''(0)}{3y''^2(0)}$  称为曲线  $L$  在点  $O$  的非对称度。

因为在  $O$  点  $-\frac{y'''(0)}{3y''^2(0)} = \frac{R_1(0,0)}{3}$ , 所以

**定义 1.2**  $\frac{R_1(x,y)}{3}$  称为曲线上点  $(x,y)$  处的非对称度。

这样平面曲线重要的局部性质——对称性就有数值表示:  $\frac{R_1(x,y)}{3}$ 。除了对称性, 曲线的凹凸度是平面曲线另一个重要的局部性质。为了讨论这种性质, 我们作曲线  $L$  在点  $O$  的密切圆:

$$f(x) = R_0 - \sqrt{R_0^2 - x^2} \quad \text{其中 } R_0 = \frac{1}{y''(0)}。$$

在区间  $[x_1, x]$  上曲线  $L$  上拱  $MM_1$  的弦长为  $x-x_1$ , 拱高为  $y(x)$ 。在区间  $\left[-\frac{x-x_1}{2}, \frac{x-x_1}{2}\right]$  上曲线  $L$  的密切圆上的拱弦长也是  $x-x_1$ , 但圆拱的高为  $f\left(\frac{x-x_1}{2}\right)$ , 两拱高的差为  $y(x)-f\left(\frac{x-x_1}{2}\right)$ , 对此我们有:

### 定义 1.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - f\left(\frac{x-x_1}{2}\right)}{x^2 y(x)} = \frac{3y''(0)y^{(4)}(0) - 9y'''^2(0) - 5y''^2(0)}{36y''^2(0)} \quad (1)$$

称为曲线  $L$  在  $O$  点(相对于圆弧)的盈度。因为

$$\frac{3y''(0)y^{(4)}(0) - 9y'''^2(0) - 5y''^2(0)}{36y''^2(0)} = \frac{1}{12} \left[ \frac{R_1^2(0,0)}{3} - R(0,0)R_2(0,0) \right], \quad (2)$$

所以称  $\frac{1}{12} \left[ \frac{R_1^2(x,y)}{3} - R(x,y)R_2(x,y) \right]$  为曲线  $L$  在  $(x,y)$  点的盈度。盈度是平面曲线的另一重要局部性质——凹凸性的数值表示。

过点  $(x,y)$  作斜率为:

$$K(x,y) = \frac{y' - \left(\frac{-3}{R_1}\right)}{1 + y' \left(\frac{-3}{R_1}\right)} = \frac{y'y''' - 3y''^2}{y''}$$

的直线  $J: \frac{\bar{y}-y}{\bar{x}-x} = K(x,y)$ , 则直线  $J$  与曲线  $L$  在点  $(x,y)$  的夹角  $\alpha = \arctan\left(-\frac{3}{R_1}\right)$ 。角  $\alpha$  正是文[7]中所说的曲线  $L$  的密切角。因此我们称  $K(x,y)$  为曲线  $L$  在点  $(x,y)$  的密切斜率, 密切角  $\alpha$  给出非对称度  $\frac{R_1}{3}$  的一个新的几何意义。

设点  $(x_1, y_1)$  是曲线  $L$  上另外一点, 过点  $(x_1, y_1)$  作斜率为  $K(x_1, y_1)$  的直线  $J_1: \frac{\bar{y}-y_1}{\bar{x}-x_1} = K(x_1, y_1)$ 。求直线  $J, J_1$  的交点  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 并令  $(x_1, y_1)$  沿曲线  $L$  趋于  $(x, y)$  得:

$$X = \lim \bar{x} = x + \frac{K - y'}{K'} = x - \frac{3y''y'''}{3y''y^{(4)} - 5y''^2} = x + \frac{3R(R_1 - 3y')}{(1+y')^{\frac{1}{2}}(R_1^2 + 9 - 3RR_2)} \quad (3)$$

$$Y = \lim \bar{y} = y + K \frac{K - y'}{K'} = y - \frac{3y''(y'y''' - 3y''^2)}{3y''y^{(4)} - 5y''^2} = y + \frac{3R(y'R_1 + 3)}{(1+y')^{\frac{1}{2}}(R_1^2 + 9 - 3RR_2)} \quad (4)$$

**定义 1.4** 由(3), (4)两式确定的点  $(X, Y)$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的密切中心, 向量  $\vec{r} = (x - X, y - Y)$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的密切向量,  $r = |\vec{r}| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2} = \frac{3R\sqrt{R_1^2 + 9}}{\sqrt{R_1^2 + 9 - 3RR_2}}$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的密切半径。

定义 1.4 中三个定义分别与文[7]的密切中心, 密切向径, 密切半径是等价的。

**定义 1.5**  $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{R}$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的标准密切向量。点  $(x, y)$  的标准密切向量在法线上的投影长

度  $\frac{r|\sin\alpha|}{R}$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的拱度。标准密切向量在切线上的投影长度  $\frac{r\cos\alpha}{R}$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的拱偏度。 $\cos\alpha$  称为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  的偏度。对于抛物线在实际应用时取其焦点代替无穷远点作为密切中心，计算抛物线的拱度  $\frac{r|\sin\alpha|}{R}$  与拱偏度  $\frac{r\cos\alpha}{R}$ 。

曲线的拱度是曲线局部性质——凹凸性的另一数值表示，相对盈度，拱度应用起来更方便。

至此，平面曲线局部性质的数值化问题就解决了，曲线的对称性有三种数值表示：非对称度  $\frac{R_1}{3}$ ，拱偏度  $\frac{r}{R}\cos\alpha$ ，偏度  $\cos\alpha$ ；曲线的凹凸性有两种数值表示：盈度  $\frac{1}{12}\left(\frac{R_1^2}{3}-RR_2\right)$ ，拱度  $\frac{r}{R}|\sin\alpha|$ 。

因为曲线的拱度与偏度确定了除度量性质以外的曲线的基本性质，所以我们称  $G = \left(\frac{r}{R}\sin\alpha, \frac{r}{R}\cos\alpha\right)$  为平面曲线上点  $(x, y)$  处的基因。下面我们应用曲线局部性质的数值化，讨论平面微分系统极限环的求解问题。

### 3. 基本理论

平面曲线的分类是平面曲线研究的一个基本问题。本节在文[7]的基础上继续讨论这一问题。首先我们分析平面曲线的曲率半径  $R$ ，密切角  $\alpha$ ，密切半径  $r$  之间的关系。

设  $\theta = \arctan y'$  为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  处切线的倾角，点  $(x, y)$  处的切线与密切向量  $\bar{r}$  的夹角  $\alpha = \arctan\left(-\frac{3}{R_1}\right)$  为曲线  $L$  在点  $(x, y)$  处密切角，则  $\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{3RR_2}{R_1^2+9}$ 。另外  $r = \frac{3R\sqrt{R_1^2+9}}{R_1^2+9-3RR_2}$ ， $|\sin\alpha| = \frac{3}{\sqrt{R_1^2+9}}$ ，所以有

$$r\left|\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right| = R|\sin\alpha|. \quad (5)$$

我们在文[7]中定义曲线的特征函数

$$W = 3\left(1 + \frac{R_1^2}{9}\right) - RR_2 = \frac{3}{\sin^2\alpha}\left(1 - \frac{d\alpha}{d\theta}\right) \quad (6)$$

当  $L$  为椭圆型曲线时， $W > 0$ ，即  $\frac{d\alpha}{d\theta} < 1$ ，此时密切中心  $(X, Y)$  在  $L$  的内部，所以  $\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{R_1^2+9}}$ 。

从(5)式有  $r\left(\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right) = R\sin\alpha$ 。

当  $L$  为双曲线型曲线时， $W < 0$ ，即  $\frac{d\alpha}{d\theta} > 1$ ，此时密切中心  $(X, Y)$  在  $L$  的外部，所以  $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{R_1^2+9}}$ 。

根据(5)式也有  $r\left(\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right) = R\sin\alpha$ 。

当  $L$  为抛物型曲线时， $W = 0$ ，即  $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$ ，此时密切半径  $r = \infty$ ， $\frac{d\alpha}{d\theta}-1 = 0$ ， $r\left(\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right)$  为不定式，

我们定义  $r\left(\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right) = R\sin\alpha$ 。因此在平面曲线上公式

$$r\left(\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right) = R\sin\alpha \quad (7)$$

总是成立的,我们称公式(7)为平面曲线的基本方程,并称曲线上点 $(x,y)$ 处的 $\frac{d\alpha}{d\theta}$ 为点 $(x,y)$ 的特征。

对于抛物线,比如 $y^2=2px$  ( $p>0$ ),如果以焦点 $(\frac{p}{2},0)$ 代替无穷远点作为抛物线的密切中心,那么有 $\alpha=-\theta$ ,  $\frac{d\alpha}{d\theta}=-1$ ,于是 $r(\frac{d\alpha}{d\theta}-1)=R\sin\alpha$ 也是成立的。根据(6)式,我们将文[7]的定理1,2,3,4综合为:

**定理 2.1** 平面曲线上点的特征 $\frac{d\alpha}{d\theta}$ 将平面曲线分为三类:

- 1) 若 $\frac{d\alpha}{d\theta}<1$ ,则平面曲线为椭圆型曲线;
- 2) 若 $\frac{d\alpha}{d\theta}=1$ ,则平面曲线为抛物型曲线;
- 3) 若 $\frac{d\alpha}{d\theta}>1$ ,则平面曲线为双曲型曲线。

除了通过曲线点的特征进行平面曲线的分类,我们还有平面曲线的另一类分类方法。设点 $(X,Y)$ 是曲线 $L$ 上点 $(x,y)$ 的密切中心,当点 $(x,y)$ 沿曲线 $L$ 运动时,对应的密切中心 $(X,Y)$ 运动所产生的曲线记为 $L_1$ ,曲线 $L_1$ 就是文[7]中所定义的曲线 $L$ 的密切渐屈线。

**定义 2.1** 曲线 $L$ 上点 $(x,y)$ 与其密切中心 $(X,Y)$ 的对应 $\phi:(x,y)\mapsto(X,Y)$ 称为聚焦映射。

**定义 2.2** 设 $\Delta L$ 是曲线 $L$ 上两点 $(x,y)$ ,  $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 之间弧长,密切渐屈线 $L_1$ 上对应弧段的弧长为 $\Delta L_1$ ,称 $V=\lim_{\Delta L\rightarrow 0}\frac{\Delta L_1}{\Delta L}=\lim_{\Delta L\rightarrow 0}\frac{\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\left|\frac{dX}{dx}\right|\frac{\sqrt{1+K^2}}{\sqrt{1+y'^2}}$ 为曲线 $L$ 在点 $(x,y)$ 聚焦的散度,其中

$$\frac{dX}{dx}=\frac{y'''(40y'''-45y''y^{(4)}+9y''^2y^{(5)})}{(3y''y^{(4)}-5y''^2)^2}。$$

**定义 2.3** 若在曲线 $L$ 点 $(x,y)$ 处, $V=0$ 则称点 $(x,y)$ 为曲线 $L$ 的聚焦点;若在曲线 $L$ 上 $V=0$ ,则称曲线 $L$ 为有心曲线。此时曲线 $L$ 唯一的密切中心 $(X,Y)$ 称为曲线 $L$ 的中心。不是有心曲线的曲线称为无心曲线。

下面我们讨论有心曲线,设曲线 $L$ 是有心曲线,则曲线 $L$ 有唯一的密切中心 $(X,Y)$ 。

1) 若 $(X,Y)$ 为有限点,则适当选取坐标系后,可使 $X=Y=0$ ,从(3),(4)两式可得有心曲线 $L$ 的方程:

$$\frac{y}{x}=y'-\frac{3y''^2}{y'''}。 \quad (8)$$

三阶微分方程(8)所有的解曲线,都是有心曲线,其中包括椭圆,双曲线。

2) 若 $(X,Y)$ 为无穷远点,此时有 $3y''y^{(4)}-5y''^2=0$ ,当 $y''\neq 0$ 时,可得: $\frac{y'''^3}{y''^5}=C$

三阶微分方程 $\frac{y'''^3}{y''^5}=C$ 的所有解曲线也有心曲线,其中包括抛物线。当 $y''=0$ 时,特解直线 $y=Cx+C_1$ 也是有心曲线。

#### 4. 求解极限环的基本方法

设

$$\frac{dx}{dt} = p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = q(x, y), \quad (9)$$

是足够光滑的平面微分系统, 若系统(9)存在极限环, 那么一定存在极限环相关的三个特殊性质:

- 1) 极限环存在某种异于附近轨线的特殊性质;
- 2) 极限环附近的轨线存在特殊结构, 即极限环附近有特殊局部性质;
- 3) 系统的轨线族存在特殊结构, 即系统轨线族有特殊的整体性质。

针对极限环有关的三种特殊性质, 我们分别有对应的极限环的求解方法。

#### 4.1. 极限环的特殊性质

一般来说, 极限环上点的聚焦性与附近轨线上点的聚焦性是有差异的, 因此有:

**定义 3.1** 系统(9)的极限环  $L$  若是有心曲线, 则称  $L$  为系统(9)的聚焦环。系统(9)中曲线  $R_1 = C$  ( $C$  为常数)上散度  $V$  的极小值点称为系统(9)的保角弱聚焦点。由保角弱聚焦点组成的极限环称为系统(9)的保角弱聚焦环。

**定理 3.1** 系统(9)的极限环  $L$  为聚焦环的充要条件是: 在  $L$  上  $\frac{dX}{dx} \equiv 0$ , 即

$$y'''(40y''' - 45y''y'''' + 9y''^2y''''') = 0 \quad (10)$$

其中  $y' = \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$ 。

从方程(10)可以求到系统(9)的所有聚焦环。

定义 3.1 中的曲线  $R_1 = C$ , 还可换成曲线  $\frac{d\alpha}{d\theta} = C$ , 曲线  $r = C \dots\dots$ , 而得到系统(9)其他类型的弱聚焦环。同聚焦环一样, 弱聚焦环方程都是可以求到的。

除了聚焦性, 一般极限环相对于附近轨线还会有一些其他特殊性质, 这里就不一一讨论了。

#### 4.2. 极限环的特殊局部性质

在系统(9)的极限环附近充满了系统(9)的非闭轨线, 这些非闭轨线越靠近极限环, 就越近似于极限环, 因此我们给出相似映射的定义。

系统(9)的等斜线在点  $(x, y)$  的斜率为  $K_0(x, y) = \frac{Pq_x - qP_x}{Pq_y - qP_y}$ , 设  $(x, y)$ ,  $(x_1, y_1)$  是系统(9)同一轨线上  $L$  上相邻两点, 过点  $(x, y)$  的等斜线的切线为  $\frac{\bar{y} - y}{\bar{x} - x} = K_0(x, y)$ , 过点  $(x_1, y_1)$  的等斜线的切线为  $\frac{\bar{y} - y_1}{\bar{x} - x_1} = K_0(x_1, y_1)$ , 求得两条等斜线的切线交点  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 并令  $(x_1, y_1)$  沿曲线  $L$  趋于  $(x, y)$  得:

$$u = \lim \bar{x} = x + \frac{K_0 - y'}{K_0'} \quad (11)$$

$$v = \lim \bar{y} = y + K_0 \frac{K_0 - y'}{K_0'} \quad (12)$$

其中  $K_0' = K_{0x} + y'K_{0y}$ 。

**定义 3.2** 由(11), (12)两式确定得点  $(u, v)$  为系统(9)在点  $(x, y)$  的几何相似中心。

$(x, y)$   $(x_1, y_1)$  是系统(9)同一轨线上  $L$  上相邻两点, 过点  $(x, y)$  的几何相似中心  $(u, v)$  作斜率为

$y' = \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$  的直线  $\frac{\bar{\eta} - v}{\bar{\xi} - u} = y'$ , 过点  $(x_1, y_1)$  的几何相似中心  $(u_1, v_1)$  作斜率为  $y'_1 = \frac{q(x_1, y_1)}{p(x_1, y_1)}$  的直线

$\frac{\bar{\eta} - v_1}{\bar{\xi} - u_1} = y'_1$ , 求得两条直线的交点  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ , 并令  $(x_1, y_1)$  沿曲线  $L$  趋于  $(x, y)$  得:

$$\xi = \lim \bar{\xi} = u + \frac{(y' - K_0) \frac{du}{dx}}{y''} \tag{13}$$

$$\eta = \lim \bar{\eta} = v + y' \frac{(y' - K_0) \frac{du}{dx}}{y''} \tag{14}$$

其中  $y'' = y'_x + y'y'_y$ ,  $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{(K'_0 - y'')K'_0 - K''_0(K_0 - y')}{K'^2_0}$ ,  $K''_0 = K''_{0x} + y'K'_{0y}$ .

**定义 3.3** 曲线  $L$  上点  $(x, y)$  到由(13), (14)确定的点  $(\xi, \eta)$  的对应  $\phi_0: (x, y) \mapsto (\xi, \eta)$  称为几何相似映射。

设  $\phi_0(L)$  为系统(9)的轨线  $L$  的几何相似映射像, 轨线  $L$  在点  $(x, y)$  处的斜率为  $y' = \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$ , 轨线  $L$

几何相似映射像  $\phi_0(L)$  在点  $(x, y)$  的对应点  $(\xi, \eta)$  处斜率为  $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{q(x, y)}{p(x, y)} = y'$ , 即在曲线  $L$  与  $\phi_0(L)$  的对应点处斜率是相等的。

设  $\Delta L$  是轨线  $L$  上相邻两点  $(x, y)$ ,  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  间的弧长, 对应的几何相似像的弧长记  $\Delta\phi_0(L)$ 。

**定义 3.4**  $\lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_0(L)}{\Delta L} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{d\xi}{dx}$  称为系统(9)在点  $(x, y)$  处的几何相似比。

**定义 3.5** 若系统(9)的极限环  $L$  上  $\frac{d\xi}{dx} = C$  ( $C$  为常数), 即  $\frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$ , 则称极限环  $L$  为系统(9)的几何相似环。

**例 1** 系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1), \tag{15}$$

有极限环  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  [8]。

系统(15)等斜线斜率  $K_0(x, y) = \frac{y + 2x + xF}{x - 2y - yF}$ , 其中  $F = x^2 + y^2 - 1$ 。根据(11), (12)式, 得到极限环

$F = x^2 + y^2 - 1 = 0$  上点  $(x, y)$  的相似中心  $(u, v)$  的  $u = \frac{4x + 2y}{5}$ ,  $v = \frac{4y - 2x}{5}$ , 根据(13)式, 得  $\xi = \frac{4}{5}x$ ,  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{4}{5}$ 。所以极限环  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  是系统的几何相似环, 在极限环  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  附近系统(15)的轨线近似一族沿等斜线排列得几何相似曲线。在极限环附近, 轨线如此有规律的排列, 这类微分系统是比较少见的。几何相似极限环是平面微分系统中非常强的一类环。

如果将等斜线斜率  $K_0(x, y)$  换成曲线  $R_1 = C$  的斜率  $K_1(x, y) = \frac{-R_{1x}}{R_{1y}}$ , 或换成曲线  $\frac{d\alpha}{d\theta} = C$  的斜率

$K_2(x, y) = -\left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right)_x \bigg/ \left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right)_y$  ……, 我们还可以定义平面微分系统的保角相似环, 同类相似环……这些类

极限环相对于几何相似环来说会常见一些。限于篇幅, 对于微分系统的特殊整体性质的极限环求解方法, 我们另文讨论。



---

## 致 谢

苏淑华老师、吴小英老师和胥靖勇为本文制作电子稿，在此向他们表示衷心的感谢！

## 参考文献

- [1] Poincare, H. (1881) Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **7**, 375-422.
- [2] Poincare, H. (1882) Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **8**, 251-296.
- [3] Poincare, H. (1885) Sur les courbes définies par les équations différentielles (III). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 167-244.
- [4] Poincare, H. (1886) Sur les courbes définies par les équations différentielles (IV). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **2**, 151-217.
- [5] Bendixson, I. (1901) Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, **24**, 1-88.  
<https://doi.org/10.1007/BF02403068>
- [6] Hilbert, D. (1901) *Archiv der Math. u. Phys.*, **1**, 44-63, 213-237.
- [7] 陈金和. 关于平面曲线的分类问题[J]. 南昌大学学报(理科版), 1997(4): 369-373.
- [8] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1982: 428-429.