Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1655-1660
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210179

Hans汉斯

探究斐波那契数列的通项公式及简单性质

邸贺璇[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年9月13日；录用日期：2022年10月12日；发布日期：2022年10月20日

摘 要

本文介绍了人教A版《普通高中课程标准实验教科书·选择性必修二》中斐波那契数列的呈现内容，为解决如何从递推公式推导出斐波那契数列的通项公式，采用在数学归纳法的基础上证明通项公式，从结论出发分别采用构造等比数列、通过找特解和通解以及矩阵的特征值和特征向量的方式分别探求出斐波那契数列的通项公式，并根据研究数列的一般方法进一步探究斐波那契数列的简单性质，为开展数学探究活动提供范式。

关键词

斐波那契数列，通项公式，性质

To Explore the General Term Formula and Simple Properties of Fibonacci Sequence

Hexuan Di[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yili Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yili Xinjiang

Received: Sep. 13th, 2022; accepted: Oct. 12th, 2022; published: Oct. 20th, 2022

Abstract

This paper introduces the presentation content of Fibonacci sequence in the *Curriculum Standard*

文章引用: 邸贺璇. 探究斐波那契数列的通项公式及简单性质[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1655-1660.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210179

Experiment Textbook for General Senior High School · Selective Compulsory II **published in Human Education A edition. In order to solve the problem of how to derive the general term formula of Fibonacci sequence from the recursion formula, the general term formula is proved on the basis of mathematical induction. In the conclusion, the general term formula of Fibonacci sequence is explored by constructing equal ratio sequence, finding specific and general solutions and eigenvalues and eigenvectors of matrix, and the simple properties of Fibonacci sequence are further explored according to the general method of studying sequence, which provides a paradigm for carrying out mathematical inquiry.**

Keywords

Fibonacci Sequence, General Term Formula, Properties

1. 引言

数学探究活动是研究数学内部问题的一类综合实践活动，是综合提升学生的数学核心素养的有效载体[1]。参与数学建模与数学探究活动的学生需要自己主动地发现、提出、分析、解决问题，这正是时代所需要的问题意识、创新精神和实践能力。为了更好地在开展数学探究的活动，教科书通过设置观察、思考探究、归纳等多种栏目，使学生掌握类比、归纳、演绎等数学研究的方法。教科书结合具体的数学问题将探究的学习方式应用到新知识的获取中，同时也设计了一些小型的探究活动，这些都为学生完整地经历数学探究活动作好了准备[2]。在教学中，教师应注重挖掘教材中蕴含的探究素材，在各阶段穿插设计小型的探究活动。本文将以斐波那契数列为例，探究其通项公式及简单的性质。

2. 斐波那契数列在人教 A 版教科书中的呈现

1202 年，在意大利数学家斐波那契的出版了他的《算盘全书》，他的书中收录了一些有意思的问题，其中一个是关于兔子繁殖问题：如果一对刚出生的小兔子一个月后能长成大兔子，再过一个月便能生下一对小兔子(一雌一雄)，此后每个月生一对小兔子。如果不发生死亡，一年内逐月的小兔子对数是一组非常特殊的数字：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，……不难发现，从第三个数起，每个数都是前两个数之和，这个数列称为斐波那契数列[3]。

人教 A 版《普通高中课程标准实验教科书 • 选择性必修二》中，在学习了数列的定义后、等差数列之前，以阅读形式呈现了斐波那契数列。主要内容有：1) 介绍《算盘全书》中兔子繁殖问题，并以表格形式呈现兔子的数对，并给出斐波那契数列的递推公式；2) 介绍斐波那契数列有趣的性质，重点介绍了 $F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$ 及“斐波那契螺旋”；3) 举例，树木的生长模式(每年的幼枝数)、向日葵的种子排列形式、蒲公英的种子和松塔的鳞片的排列等三个生活中的斐波那契数列实例；4) 斐波那契数列的广泛应用性。在学习完数列这一章，在复习参考题 4 拓广探索的第 16 题又再次出现了斐波那契数列的题目，若数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1=1,F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\left(n\geq 3,n\in N^*\right)$，则称 $\{F_n\}$ 为斐波那契数列，试用数学归纳法证明其通项公式为 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

3. 斐波那契数列的探究

3.1. 用数学归纳法证明其通项公式

证明：1) 当$n=1$时，$F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=1$显然成立；

2) 假设当$n=k$时，$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$成立，那么当$n=k+1$时，

$$
\begin{aligned}
F_{k+1}=F_k+F_{k-1}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right].
\end{aligned}
$$

所以，当$n=k+1$时，猜想成立。

由(1) (2)可知，对于任何$n\in N^*$猜想都成立。

教师在处理上述题目后，可以进一步提出问题：

如果已知$F_1=1,F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\left(n\geq 3,n\in N^*\right)$，如何求得斐波那契数列的通项公式呢？让学生探究学生其所以然。

3.2. 构造等比数列求解通项公式

从斐波那契数列通项公式的结果来看，该数列是由两个等比数列的和构成。可以先求满足递推关系$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\left(n\geq 3,n\in N^*\right)$的等比数列，进而求其通项公式[4] [5]。

设$u_n+xu_{n-1}=y\left(u_{n-1}+xu_{n-2}\right)(x>0)$

整理的，$u_n=(y-x)u_{n-1}+xyu_{n-2}$.满足递推关系式，可得：

$\begin{cases}xy=1\\ y-x=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{cases}$

于是有，$u_n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}u_{n-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(u_{n-1}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}u_{n-2}\right)$。

即数列$\left\{u_n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}u_{n-1}\right\}$是首项为$1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，公比为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$的等比数列。

$$u_n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}u_{n-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}.$$

设 $u_n+p\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=q\left[u_{n-1}+p\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}\right]$

此式满足等式 $u_n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}u_{n-1}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}$

可得：$\begin{cases} q=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ pq-\frac{\sqrt{5}+1}{2}p=1 \end{cases}$ 　解得：$\begin{cases} q=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ p=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

于是有 $u_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left[u_{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}\right]$

即数列 $\left\{u_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right\}$ 是首项为 $1-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$，公比为 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的等比数列。

$$u_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

得 $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

3.3. 通过特解找满足方程的解空间，进而获得通项公式

设等比数列 $1,a,a^2,\cdots(a\neq 1)$ 满足方程 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，即对于所有的 n，都有 $a^{n-2}+a^{n-1}=a^n$

化简得，$1+a=a^2$

解得，$a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。

这样得到等比数列 $1,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,\cdots$ 和等比数列 $1,\frac{1-\sqrt{5}}{2},\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2,\cdots$ 它们都是方程 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 的解，当 $c_1,c_2\in R$ 时，$c_1+c_2,c_1a_1+c_2a_2,c_1a_1^2+c_2a_2^2,\cdots$ 可表示方程的所有解。由斐波那契数列的前两项，利用待定系数法可求得通项。

$\begin{cases} c_1+c_2=u_1 \\ c_1a_1+c_2a_2=u_2 \end{cases}$ 　即 $\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases}$ 　解得：$\begin{cases} c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$。

由此 $u_n=c_1a_1^{n-1}+c_2a_2^{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

故有，$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

3.4. 利用矩阵的特征值、特征向量求解通项公式

已知斐波那契数列 $\{u_n\}$，$u_1=1,u_2=1,u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$，设数列 $\{v_n\}$，有 $v_n=u_{n-1}\left(n\geq 2,n\in N^*\right),v_1=0$。

则有 $\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} \end{cases}$

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$

A 的特征值为 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。

当 $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，对应的特征方程为 $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}E - A\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\begin{pmatrix} \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$。

当 $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时，对应的特征方程为 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}E - A\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$。

令 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$，则有 $X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，$A = X\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}X^{-1}$，

$$A^2 = X\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}X^{-1}X\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}X^{-1} = X\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}X^{-1}，\cdots，A^{n-1} = X\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}X^{-1}$$

$$A^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix}，\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

故 $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

4. 探究斐波那契数列的性质

根据等差数列和等比数列学习经验，可以归纳出学习新数列的一般方法：具体实例－定义－性质－应用。认识了斐波那契数列，并求得了其通项公式，接下来应该探究斐波那契数列具有哪些性质了。

已知斐波那契数列的递推公式 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\left(n \ge 3, n \in N^*\right)$，可以推出哪些有意思的性质呢？

$$F_1 = F_3 - F_2，F_2 = F_4 - F_3，F_3 = F_5 - F_4，\cdots，F_{n-1} = F_{n+1} - F_n，F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

以上等式累加可得：

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1 \quad ①$$

$$F_1 = F_2，F_3 = F_4 - F_2，F_5 = F_6 - F_4，\cdots，F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

以上等式累加可得：

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} \tag{②}$$

由①~②可得

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \tag{③}$$

由上述三个等式，再利用等式的性质又可以得到其他等式。

对递推公式 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ 两边同时乘以 F_n，又会得到哪些有趣的性质呢？

$F_nF_{n+1} = F_n^2 + F_nF_{n-1}$ 可得 $F_n^2 = F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}$，因此有：$F_1^2 = F_2F$，$F_2^2 = F_2F_3 - F_2F$，$F_3^2 = F_3F_4 - F_2F$，$F_4^2 = F_4F_5 - F_3F_4$，$\cdots$，$F_n^2 = F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}$，

逐项相加可得：

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1} \tag{④}$$

其几何意义是前 n 个正方形的面积和等于第 n 个斐波那契数与第 $n+1$ 个斐波那契数的乘积(如图 1)。

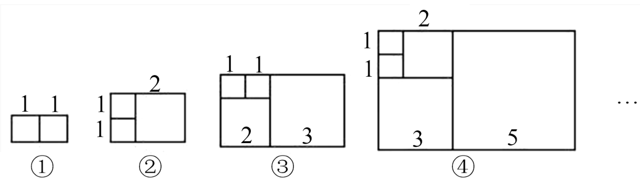

Figure 1. A property of Fibonacci sequence number

图 1. 斐波那契数列的一个性质

斐波那契数列的性质众多，应用广泛。生物学中的“鲁德维格”是斐波那契数列在生物学中的体现，数学家鲁卡斯利用斐波那契数列的性质证明了 $2^{127}-1$ 是一个质数，华罗庚的“优选法”也能找到斐波那契数列的巧妙应用[6]。斐波那契数列理论是初等数学中困难而有趣的问题，它与“高深数学”的历史、问题和方法有紧密的联系，蕴含着丰富的数学文化。在教学中，通过介绍不同时间数学家对斐波那契数列的研究，引导学生了解数学知识的发展历程。探究活动的教学，还有利于激发学生的数学学习兴趣，让学生进一步理解数学，开拓学生视野、提升数学学科核心素养。

基金项目

伊犁师范大学教改项目——基于 STEM 教育理念下线性代数课程的教学改革研究(YSYB2022105)；伊犁师范大学科研项目——基于数学核心素养创新试题的研究(2021YSYB062)。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] 张艳娇. 谈“数学建模活动与数学探究活动”如何在教科书中落实——以人教 A 版高中数学教科书为例[J]. 中学数学杂志(高中版), 2020(5): 1-7.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准实验教科书·选择性必修二(A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.

[4] 徐德均. 深度学习案例: 会意高中数学中的斐波那契数列[J]. 中学数学教育(高中版), 2019(5): 52-55.

[5] 余建国, 谢建金. 斐波那契数列通项公式的探究教学启示[J]. 中学数学教育(高中版), 2014(10): 19-22, 28.

[6] 瓦罗别耶夫. 斐波那契数列[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2009.