Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(11), 1918-1924
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1211206

Hans汉斯

状态依赖时滞跳跃扩散系统的随机输入–状态稳定性分析

袁香凝，韩金越，高铱钒，任院红*

河北农业大学理学院，河北 保定

收稿日期：2022年10月12日；录用日期：2022年11月11日；发布日期：2022年11月21日

摘 要

随机系统在众多领域中有着广泛的应用，因此许多学者对随机系统进行了研究，其中稳定性是研究随机系统的核心内容。本文利用增量Lyapunov函数方法给出了状态依赖时滞跳跃扩散系统的随机输入–状态稳定性的充分条件，并基于该条件运用反证法与Markov不等式证明了状态依赖时滞跳跃扩散系统的随机稳定性，从而丰富了随机系统稳定性的研究结果。

关键词

状态依赖时滞，跳跃扩散系统，随机输入–状态稳定性

Stochastic Input-to-State Stability Analysis for State-Dependent Delayed Jump-Diffusion Systems

Xiangning Yuan, Jinyue Han, Yifan Gao, Yuanhong Ren*

College of Science, Hebei Agricultural University, Baoding Hebei

Received: Oct. 12th, 2022; accepted: Nov. 11th, 2022; published: Nov. 21st, 2022

Abstract

Stochastic systems have a wide range of applications in many fields, so many scholars have studied stochastic systems, of which stability is the core content of studying stochastic systems. In this paper, the incremental Lyapunov function method is used to give sufficient conditions for the sto-

*通讯作者。

文章引用: 袁香凝, 韩金越, 高铱钒, 任院红. 状态依赖时滞跳跃扩散系统的随机输入-状态稳定性分析[J]. 理论数学, 2022, 12(11): 1918-1924. DOI: 10.12677/pm.2022.1211206

chastic input-to-state stability of the state-dependent delayed jump-diffusion systems, and based on this condition, the stochastic stability of the state-dependent delayed jump-diffusion systems is proved by using the contradictory method and Markov's inequality, thereby enriching the results of the stochastic system stability.

Keywords

State-Dependent Delayed, Jump-Diffusion Systems, Stochastic Input-to-State Stability

1. 引言

随机现象广泛地存在于自然界和实际动态系统中，随机现象的存在会使得系统的性能发生较大的变化，甚至还会引起不稳定性，故越来越多的学者开始研究随机系统。在过去的几年中，由于需要对许多应用程序进行严格建模，随机系统已经被广泛应用在数学、经济和控制工程等领域[1]。然而，实际的随机系统会受到跳跃噪声和扩散噪声的随机扰动。Jagtap 等人在文献[2]中研究了具有跳跃结构的随机哈密顿系统，而对于同时包含了跳跃过程和扩散过程的跳跃扩散系统的相关研究并不多见。

在许多实际应用中，状态依赖时滞无处不在，如自动控制系统、网络控制系统、转向过程、移动机器人控制等[3]。时滞会引起不稳定和振荡，但是当时滞与状态无关时，即使滞后时间很长也不会破坏系统的稳定性。然而，当时滞依赖于系统状态时，由于系统的状态可能会因各种不确定的情况而改变，因此，很有必要研究状态依赖时滞的稳定性问题，学者们[4] [5]在研究状态依赖时滞的稳定性方面做出了许多贡献。

随机输入－状态稳定性这一概念由于其在非线性系统研究中的潜在应用而引起了广泛的关注。这类应用的例子包括循环反馈系统的同步[6]、建立符号模型[7]、非线性模拟电路的建模[8]以及互连振荡器的同步[9]等。Zamani 研究了使用增量 Lyapunov 函数和收缩度量定义的非概率动力学系统的输入－状态稳定性[2]。在控制理论中，Lyapunov 函数方法不仅是研究控制系统理论问题的一种基本工具，还是分析控制系统稳定性的一种常用方法，因此本文基于增量 Lyapunov 函数方法，研究了状态依赖时滞跳跃扩散系统的随机输入－状态稳定性。

本文结构如下：第 2 部分给出预备知识，主要介绍函数符号表示和重要的定义，第 3 部分给出主要结果并对定理进行证明。

2. 预备知识

$\mathbb{N}$ (或 $\mathbb{R}^+$)表示自然数(或非自然数)的集合，设 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 表示 n 行 m 列实矩阵的向量空间。给定矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$， A^{T} 表示矩阵 A 的转置。$Tr(\cdot)$ 表示矩阵的迹。对角线集 $\Delta\subset\mathbb{R}^{2n}$ 被定义为 $\Delta=\left\{(x,x)\middle|x\in\mathbb{R}^n\right\}$。$E(x)$ 表示随机变量 x 的期望。符号 $e_i\in\mathbb{R}^n$ 表示除第 i 个元素为 1 外，其余元素都为零的向量。用 $\mathbb{C}_\tau$ 表示由所有连续有界函数 $\varphi:[-\tau,0]\to\mathbb{R}^n$ 构成的空间 $\mathcal{C}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ 中的一个范数 $\|\varphi\|_{[-\tau,0]}=\sup\limits_{-\tau\le\theta\le0}\|\varphi(\theta)\|$，其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的欧式范数。

如果函数 $\alpha:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续且单调递增，并且 $\alpha(0)=0$，则该函数属于 $\mathcal{K}$ 类函数；如果 $\alpha\in\mathcal{K}$ 且当 $s\to\infty$ 时 $\alpha(s)\to\infty$，则函数 α 属于 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数。函数 $\beta:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，如果 $\beta(\cdot,t)\in\mathcal{K}$，

对于每个给定的 $t\ge 0$ 和 $s\ge 0$，当 $t\to+\infty$ 时 $\beta(s,t)$ 趋于 0，则函数 β 属于 $\mathcal{KL}$ 类函数。其中 $\mathcal{CK}=\{\alpha\mid\alpha\in\mathcal{K}_\infty\}$ 是一个凹函数，$\mathcal{VK}=\{\alpha\mid\alpha\in\mathcal{K}_\infty\}$ 是一个凸函数。

设 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}\right)$ 表示一个具有样本空间 Ω，σ-域 $\mathcal{F}$ 和概率测度 $\mathbb{P}$ 的完全概率空间，其中 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$ 满足通常的条件(即当 $\mathcal{F}_0$ 包含所有 $\mathbb{P}$ 空集时，它是递增和右连续的)。设 $(B_t)_{t\ge0}$ 是一个 r 维 $\mathbb{F}$ 的布朗运动且 $(P_t)_{t\ge0}$ 是一个 $\tilde{r}$ 维 $\mathbb{F}$ 的泊松过程。泊松过程 $P_t=\left[P_T^1,\cdots,P_T^{\tilde{r}}\right]$ 包含了 $\tilde{r}$ 种事件，假设这些事件和上述布朗运动以及泊松过程均是相互独立的。

定义 1 [10]状态依赖时滞跳跃扩散系统是一个元组 $\sum_S=\left(\mathbb{R}^n,\Omega_1,\Omega_2,U,\mathcal{U},f,g,h\right)$，其中：

1) $\mathbb{R}^n$ 是欧式空间；

2) Ω_1 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集，Ω_2 是 $\mathcal{C}\left([-\tau,0];\mathbb{R}^n\right)$ 的一个紧子集，其中 $\tau\in\mathbb{R}^+$；

3) $U\subseteq\mathbb{R}^m$ 是有界输入集；

4) $\mathcal{U}:\mathbb{R}^+\to U$ 是所有可测量局部有界的时间函数集合的子集；

5) $f\in\mathcal{C}\left(\Omega_1\times\Omega_2\times U;\mathbb{R}^n\right)$ 是局部 Lipschitz 连续的，即存在常数 $L_f=L_f(\Omega_1,\Omega_2)>0$ 和 $L_u>0$，使得 $\left\|f(\zeta,\eta,u)-f\left(\hat{\zeta},\hat{\eta},\hat{u}\right)\right\|\le L_f\left(\left\|\zeta-\hat{\zeta}\right\|+\|\eta-\hat{\eta}\|_{[-\tau,0]}\right)+L_u\|u-\hat{u}\|$，其中所有的 $\zeta,\hat{\zeta}\in\Omega_1$，$\eta,\hat{\eta}\in\Omega_2$ 和 $u,\hat{u}\in U$；

6) $g\in\mathcal{C}\left(\Omega_1\times\Omega_2;\mathbb{R}^{n\times r}\right)$ 是局部 Lipschitz 连续的，即存在一个常数 $L_g=L_g(\Omega_1,\Omega_2)>0$，使得 $\left\|g(\zeta,\eta)-g\left(\hat{\zeta},\hat{\eta}\right)\right\|\le L_g\left(\left\|\zeta-\hat{\zeta}\right\|+\|\eta-\hat{\eta}\|_{[-\tau,0]}\right)$，其中所有的 $\zeta,\hat{\zeta}\in\Omega_1$，$\eta,\hat{\eta}\in\Omega_2$；

7) $h\in\mathcal{C}\left(\Omega_1\times\Omega_2;\mathbb{R}^{n\times\tilde{r}}\right)$ 是局部 Lipschitz 连续的，即存在一个常数 $L_h=L_h(\Omega_1,\Omega_2)>0$，使得 $\left\|h(\zeta,\eta)-h\left(\hat{\zeta},\hat{\eta}\right)\right\|\le L_h\left(\left\|\zeta-\hat{\zeta}\right\|+\|\eta-\hat{\eta}\|_{[-\tau,0]}\right)$，其中所有的 $\zeta,\hat{\zeta}\in\Omega_1$，$\eta,\hat{\eta}\in\Omega_2$；

8) 状态时滞 $\tau_i\in\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n;[0,\tau]\right)$ 是局部 Lipschitz 连续的，即对于每个紧子集 $\Omega_3\subset\mathbb{R}^n$，存在一个常数 $L_{\tau_i}>0$，使得 $\|\tau_i(t,\zeta)-\tau_i\left(t,\tilde{\zeta}\right)\le L_{\tau_i}\left(\left\|\zeta-\hat{\zeta}\right\|\right)\|$，其中 $t\in\mathbb{R}^+$ 并且 $\zeta,\hat{\zeta}\in\Omega_3$，$i=1,2,3$；

R^n 值的连续时间过程 x 被认为是 $\sum_S$ 的一个解过程，如果存在 $u\in\mathcal{U}$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=f\left(x(t),x\left(t-\tau_1(t,x(t))\right),u(t)\right)\mathrm{d}t+g\left(x(t),x\left(t-\tau_2(t,x(t))\right)\right)\mathrm{d}B_t+h\left(x(t),x\left(t-\tau_3(t,x(t))\right)\right)\mathrm{d}P_t\\ x(t_0)=\phi\in\mathbb{C}_\tau,t\ge t_0\ge0\end{cases}\tag{1}$$

$\mathbb{P}$-almost 即($\mathbb{P}$-*a.s.*)，其中 $\tau_1(t,\cdot)$，$\tau_2(t,\cdot)$ 和 $\tau_3(t,\cdot)$ 分别是偏移量 *f*，扩散量 *g* 和重置量 *h* 中的状态依赖时滞，并且 $t>t_0$，$x(t+s)$，$s\in[-\tau,0]$。我们假设 *f*，*g*，*h* 在 $t\ge-\tau$ 上存在唯一解，并且用符号 $x_{\phi,u}(t)$ 表示从初始条件 $\phi=\{x(\theta)\mid-\tau\le\theta\le0\}\in\mathbb{C}_\tau,\mathbb{P}-a.s.$ 在输入 u 后的求解过程。假设初始函数 $\phi\in\mathbb{C}_\tau$ 是 Lipschitz 连续的，即存在一个常数 $L_\phi>0$，使得对于所有 $t,s\in[-\tau,0]$ 时有 $\|\phi(t)-\phi(s)\|\le L_\phi\|t-s\|$ 成立，其中 $\sup\{\tau_i(t,0):t\ge t_0\}=\tau_{0_i}\le\tau$，$i=1,2,3$。在这里，我们假设 P_s^i 泊松过程对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,\tilde{r}\}$ 具有 λ_i 率。另外，设 $x(t)$ 和 $\hat{x}(t)$ 分别为在输入外部干扰 $u(t)$ 和 $\hat{u}(t)$ 下 $t\left(t\in\mathbb{R}^+\right)$ 时刻两个系统的轨迹，其中 $\Delta x(t)=x(t)-\hat{x}(t)$，$\Delta u(t)=u(t)-\hat{u}(t)$。

接下来，我们利用 Itô 的微分给出了状态依赖时滞跳跃扩散系统 $\sum_S$ 的无穷小生成元(用算子 $\mathcal{L}$ 表示)。

设 $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{8n};\mathbb{R}^+\right)$ 是正定函数集合，函数 $V:\mathbb{R}^{8n}\to\mathbb{R}^+$ 连续二次可微。如果 $V\in\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{8n};\mathbb{R}^+\right)$，则定义无穷小算子 $\mathcal{L}V$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V\left(x,\hat{x},y,\hat{y},z,\hat{z},p,\hat{p}\right)=&\begin{pmatrix}\partial_xV & \partial_{\hat{x}}V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x,y,u)\\ f(\hat{x},\hat{y},\hat{u})\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\lambda_i\left[V\left(x+h(x,p)e_i,\hat{x}+h(\hat{x},\hat{p})e_i\right)-V(x,\hat{x})\right]\\&+\frac{1}{2}Tr\left(\begin{pmatrix}g(x,z)\\ g(\hat{x},\hat{z})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^{\mathrm{T}}(x,z) & g^{\mathrm{T}}(\hat{x},\hat{z})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_{x,x}V & \partial_{x,\hat{x}}V\\ \partial_{\hat{x},x}V & \partial_{\hat{x},\hat{x}}V\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

其中 $x,\hat{x},y,\hat{y},z,\hat{z},p,\hat{p}\in\mathbb{R}^n$，$u,\hat{u}\in U$。$\partial_xV=\dfrac{\partial V}{\partial x}$ 是 V 在 x 处的 Fréchet 导数，$\partial_{x,\hat{x}}V=\dfrac{\partial^2V}{\partial x\partial\hat{x}}$ 是 V 在 x 和 $\hat{x}$

处的二阶偏导。

然后采用以下系统$\sum_S$的随机增量稳定性定义，该定义首次出现在[11]。

定义 2 [11]系统$\sum_S$是随机增量－输入状态稳定型，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\beta\in\mathcal{KL}$，$\gamma\in\mathcal{K}_\infty$使得对于任意$t\ge t_0$，$\phi,\hat{\phi}\in\mathbb{C}_\tau$和$u,\hat{u}\in\mathcal{U}$，满足以下条件：

$$\mathbb{P}\left\{\left\|x_{\phi,u}(t)-\hat{x}_{\hat{\phi},\hat{u}}(t)\right\|_{[-\tau,0]}\le\beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]},t-t_0\right)+\gamma\left(\|u-\hat{u}\|\right)\right\}\ge1-\varepsilon. \tag{2}$$

3. 主要结果

这一部分，我们主要讨论系统$\sum_S$的随机增量－输入状态稳定性。在下面的定理中，根据 Lyapunov 稳定性理论，给出了系统$\sum_S$的随机增量输入－状态稳定性的充分条件。

定理考虑状态依赖时滞跳跃扩散系统$\sum_S$和一个在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta$上二次可微的连续函数$V(x,\hat{x})\in\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^+\right)$。如果存在连续函数$\lambda_0(\cdot),\lambda_1(\cdot),\lambda_2(\cdot),\lambda_3(\cdot)\in\mathcal{C}\left([t_0,+\infty);\mathbb{R}^+\right)$，$\varphi(\cdot)\in\mathcal{K}_\infty$，$\alpha_1(\cdot)\in\mathcal{VK}$，$\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{CK}$并且给定$\lambda>0$使得

$$\alpha_1\left(\|x-\hat{x}\|\right)\le V(x,\hat{x})\le\alpha_2\left(\|x-\hat{x}\|\right),\forall x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\|x-\hat{x}\|\ge\varphi\left(\|u-\hat{u}\|\right)\\&\Rightarrow\mathcal{L}V(x,\hat{x})\le-\lambda_0(t)V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)+\lambda_1(t)V\left(x\left(t-\tau_1\left(t,x(t)\right)\right),\hat{x}\left(t-\tau_1\left(t,\hat{x}(t)\right)\right)\right)\\&\qquad+\lambda_2(t)V\left(x\left(t-\tau_2\left(t,x(t)\right)\right),\hat{x}\left(t-\tau_2\left(t,\hat{x}(t)\right)\right)\right)\\&\qquad+\lambda_3(t)V\left(x\left(t-\tau_3\left(t,x(t)\right)\right),\hat{x}\left(t-\tau_3\left(t,\hat{x}(t)\right)\right)\right),\end{aligned} \tag{4}$$

$$2\lambda-\lambda_0(t)+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t)\exp\left\{\lambda\left[\left(L_{\tau_i}+2\right)\alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}\right)\right)+2\tau_{0i}\right]\right\}\le0, \tag{5}$$

这里$t\ge t_0$，$\phi,\hat{\phi}\in\mathbb{C}_\tau$，那么系统$\sum_S$是随机增量－输入状态稳定的。

证明：假设首次逃逸时间$t^*=\inf\left\{s\ge t_0:\left\|x(s)-\hat{x}(s)\right\|\ge\varphi\left(\|u-\hat{u}\|\right)\right\}$是一个停时。设集合$\mathfrak{B}=\left\{(x,\hat{x})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n:\left\|(x-\hat{x})\right\|<\varphi\left(\|u-\hat{u}\|\right)\right\}$，为了使证明更容易理解，我们把它分为两种情况进行讨论。

情况 1：$(\phi,\hat{\phi})\in\mathfrak{B}^c$，对任何的$t\in\left[t_0,t^*\right]$，$\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|\ge\varphi\left(\|u-\hat{u}\|\right)$有$\overline{V_0}=\sup\left\{\mathbb{E}\left[V\left(x(s),\hat{x}(s)\right)\right]:s\in\left[t_0-\tau,t_0\right]\right\}$。选择一个任意小的$\varepsilon_1\in(0,\lambda)$，证明

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t-t_0)\right\}V\left((t),\hat{x}(t)\right)\right]\le\overline{V_0},t\in\left[t_0,t^*\right]. \tag{6}$$

当$t=t_0$时，不等式(6)显然成立。下面，我们证明不等式(6)在区间$\left(t_0,t^*\right]$上成立。$\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t-t_0)\right\}V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right]$在时间$t\in\left[t_0,t^*\right]$上连续，假设不等式(6)不成立，即存在一个常数$t_\alpha\in\left[t_0,t^*\right]$使得$\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t_\alpha-2t_0)\right\}V\left(x(t_\alpha),\hat{x}(t_\alpha)\right)\right]=\overline{V_0}$，并且

$$\mathbb{E}\left[\left(\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t-2t_0)\right\}\vee1\right)V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right]\le\overline{V_0},t\in\left[t_0-\tau,t_\alpha\right]. \tag{7}$$

此外，对于任意小的$\delta>0$，存在$t^\delta\in U_+^0(t_\alpha,\delta)\subset\left(t_\alpha,t^*\right]$使得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left(2t^\delta-2t_0\right)\right\}V\left(x\left(t^\delta\right),\hat{x}\left(t^\delta\right)\right)\right]>\overline{V_0}. \tag{8}$$

但是，由定义 1 和(4)可知

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t-2t_0)\right\}V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right]\right)\Big|_{t=t_\alpha}\\
&=2(\lambda-\varepsilon_1)\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t_\alpha-2t_0)\right\}V\left(x(t_\alpha),\hat{x}(t_\alpha)\right)\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t_\alpha-2t_0)\right\}\mathcal{LV}\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right]\Big|_{t=t_\alpha}\\
&\le\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t_\alpha-2t_0)\right\}V\left(x(t_\alpha),\hat{x}(t_\alpha)\right)\right]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t_\alpha-2t_0)\right\}V\left(x\left(t_\alpha-\tau_i\left(t_\alpha,x(t_\alpha)\right)\right),\hat{x}\left(t_\alpha-\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)\right)\right)\right]\\
&\le\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t_\alpha-2t_0)\right\}V\left(x(t_\alpha),\hat{x}(t_\alpha)\right)\right]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left(2t_\alpha-\tau_i\left(t_\alpha,x(t_\alpha)\right)-\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)-2t_0\right)\right\}\\
&\quad\times\mathbb{E}\left[V\left(x\left(t_\alpha-\tau_i\left(t_\alpha,x(t_\alpha)\right)\right),\hat{x}\left(t_\alpha-\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)\right)\right)\right]\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left[\tau_i\left(t_\alpha,x(t_\alpha)\right)+\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)\right]\right\},
\end{aligned}\tag{9}$$

则可推出

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t-2t_0)\right\}V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right]\right)\Big|_{t=t_\alpha}\\
&\le\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]\overline{V_0}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\overline{V_0}\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left[\tau_i\left(t_\alpha,x(t_\alpha)\right)-\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)+2\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)\right]\right\}\\
&\le\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]\overline{V_0}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\overline{V_0}\\
&\quad\times\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left[L_{\tau_i}\left\|x(t_\alpha)-\hat{x}(t_\alpha)\right\|+2\tau_i\left(t_\alpha,\hat{x}(t_\alpha)\right)-2\tau_i(t_\alpha,0)+2\tau_i(t_\alpha,0)\right]\right\}\\
&\le\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]\overline{V_0}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\overline{V_0}\\
&\quad\times\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left[L_{\tau_i}\left\|x(t_\alpha)-\hat{x}(t_\alpha)\right\|+2\left\|\hat{x}(t_\alpha)\right\|+2\tau_{0i}\right]\right\}\\
&\le\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]\overline{V_0}+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\overline{V_0}\\
&\quad\times\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left[\left(L_{\tau_i}+2\right)\left\|x(t_\alpha)-\hat{x}(t_\alpha)\right\|+2\tau_{0i}\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{10}$$

根据不等式(3)和 t_α 的定义，可得不等式

$$\left\|x(t_\alpha)-\hat{x}(t_\alpha)\right\|\le\alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}\right)\right).\tag{11}$$

根据(3)、(5)、(11)，不等式(10)可改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)(2t-2t_0)\right\}V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right]\right)\Big|_{t=t_\alpha}\\
&\le\left(\left[2(\lambda-\varepsilon_1)-\lambda_0(t_\alpha)\right]+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t_\alpha)\exp\left\{(\lambda-\varepsilon_1)\left[\left(L_{\tau_i}+2\right)\alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}\right)\right)+2\tau_{0i}\right]\right\}\right)\\
&\quad\times\alpha_2\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}\right)\\
&<0,
\end{aligned}\tag{12}$$

这与(7)和(8)是矛盾的，因此不等式(6)成立。

令 $\varepsilon_1 \to 0^+$，可得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\left(2t-2t_0\right)\right\}V\left(x(t),\hat{x}(t)\right)\right] \le \overline{V_0}, \forall t \in \left[t_0, t^*\right]. \tag{13}$$

通过(3)、$\alpha_1(\cdot) \in \mathcal{VK}$、$\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{CK}$，可得

$$\mathbb{E}\left[\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|\right] \le \bar{\beta}\left(\mathbb{E}\left[\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}\right], t-t_0\right), \forall t \in \left[t_0, t^*\right], \tag{14}$$

其中 $\bar{\beta}(s,r) = \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2(s)\cdot \mathrm{e}^{-2\lambda r}\right)$。

对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，令 $\tilde{\beta} = \dfrac{\bar{\beta}}{\varepsilon} \in \mathcal{KL}$，由 Markov 不等式和(14)，可得

$$P\left\{\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\| \ge \tilde{\beta}\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}, t-t_0\right)\right\} \le \frac{E\left[\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|\right]}{\tilde{\beta}\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}, t-t_0\right)} < \varepsilon, \tag{15}$$

对于 $\forall t \in \left[t^0, t^*\right]$，则有

$$P\left\{\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\| < \tilde{\beta}\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}, t-t_0\right)\right\} \ge 1-\varepsilon. \tag{16}$$

下面讨论 $t \in \left(t^*, \infty\right)$，由于 t^* 是停时，所以，

$$\left\{(x,\hat{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \left\|x-\hat{x}\right\| \le \varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\} \subseteq \left\{(x,\hat{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, V(x,\hat{x}) \le \alpha_2\left(\varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right)\right\}, \tag{17}$$

于是可得

$$E\left[V(x,\hat{x})\right] \le \alpha_2\left(\varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right), \forall t > t^*, \tag{18}$$

由(2)可得

$$E\left[\left\|x-\hat{x}\right\|\right] \le \alpha_1^{-1}\left(\alpha_2\left(\varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right)\right), \forall t > t^*. \tag{19}$$

对于 $\forall \varepsilon_2 \in (0,1)$，选择合适的 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 $\psi(\cdot)$，由 Markov 不等式，可得

$$P\left\{\sup_{t \in \left[t^*, +\infty\right)} \left\|x-\hat{x}\right\| \ge \psi\left(\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right)\right\} \le \frac{\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)}{\psi\left(\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right)} \le \varepsilon_2. \tag{20}$$

因此，对 $\forall \varepsilon_2 > 0$，存在 $\gamma = \psi \circ \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi$，使得

$$P\left\{\left\|x-\hat{x}\right\| < \gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\} \ge 1-\varepsilon_2, \forall t \in \left[t^*, +\infty\right). \tag{21}$$

由(16)和(21)，可得

$$\begin{aligned} &P\left\{\left\|x_{\phi,u}(t)-\hat{x}_{\hat{\phi},\hat{u}}\right\|_{[-\tau,0]} \le \beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]}, t-t_0\right) + \gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\} \\ &\ge \max\left\{1-\varepsilon, 1-\varepsilon_2\right\} = 1-\min\left\{\varepsilon, \varepsilon_2\right\} = 1-\varepsilon_3, \forall t \ge t_0, \forall \left(\phi, \hat{\phi}\right) \in \mathfrak{B}^c. \end{aligned} \tag{22}$$

情况 2：$\left(\phi, \hat{\phi}\right) \in \mathfrak{B} \setminus (0,0)$，$t^* = t_0$ a.s.

当 $t > t_0$ 时，$P\left\{t \in \left(t^*, \infty\right)\right\} = P\left\{t \in \left(t_0, \infty\right)\right\} = 1$。

来自情形 1 的证明，可知(21)仍成立，且有

$$P\left\{\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|<\beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]},t-t_0\right)+\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}\geq P\left\{\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|<\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}\geq 1-\varepsilon_2. \tag{23}$$

当 $t=t_0$ 时，通过集合 $\mathfrak{B}$ 的定义和 γ 的定义，可得

$P\left\{\left\|x(t_0)-\hat{x}(t_0)\right\|<\beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]},0\right)+\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}\geq P\left\{\left\|x(t_0)-\hat{x}(t_0)\right\|<\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}=1$，进而有

$$P\left\{\left\|x(t_0)-\hat{x}(t_0)\right\|<\beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]},0\right)+\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}=1, \tag{24}$$

由(23)和(24)可得

$$P\left\{\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|<\beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]},t-t_0\right)+\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}\geq 1-\varepsilon_2,\forall t\geq t_0,\left(\phi,\hat{\phi}\right)\in\mathfrak{B}\setminus(0,0). \tag{25}$$

综上，由(22)和(25)可得

$$P\left\{\left\|x_{\phi,u}(t)-\hat{x}_{\hat{\phi},\hat{u}}\right\|_{[-\tau,0]}\leq\beta\left(\left\|\phi-\hat{\phi}\right\|_{[-\tau,0]},t-t_0\right)+\gamma\left(\left\|u-\hat{u}\right\|\right)\right\}\geq 1-\varepsilon,\forall t\geq t_0,\left(\phi,\hat{\phi}\right)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus(0,0). \tag{26}$$

因此，系统 $\sum_S$ 是随机增量输入－状态稳定的。

基金项目

河北省自然科学基金项目(No. A2021204004; A2022204001)；河北农业大学大学生创新创业训练计划基金项目(No. 2022160)；河北农业大学人才引进项目(No. YJ2020036; PY2021003)。

参考文献

[1] Zamani, M., Rungger, M. and Esfahani, P.M. (2017) Approximations of Stochastic Hybrid Systems: A Compositional Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 2838-2853. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2619419

[2] Jagtap, P. and Zamani, M. (2018) Backstepping Design for Incremental Stability of Stochastic Hamiltonian Systems with Jumps. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **63**, 255-261. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2720592

[3] Li, X. and Yang, X. (2020) Lyapunov Stability Analysis for Nonlinear Systems with State-Dependent State Delay. *Automatica*, **112**, Article ID: 108674. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108674

[4] Li, X. and Peng, D. (2022) Uniform Stability of Nonlinear Systems with State-Dependent Delay. *Automatica*, **137**, Article ID: 110098. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.110098

[5] Bekiaris-Liberis, N. and Krstic, M. (2013) Compensation of State-Dependent Input Delay for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **58**, 275-289. https://doi.org/10.1109/TAC.2012.2208294

[6] Hamadeh, A., Stan, G.B. and Goncalves, J. (2012) Global State Synchronization in Networks of Cyclic Feedback Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 478-483. https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2164015

[7] Pola, G., Girard, A. and Tabuada, P. (2008) Approximately Bisimilar Symbolic Models for Nonlinear Control Systems. *Automatica*, **44**, 2508-2516. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.02.021

[8] Bond, B.N., Mahmood, Z., Li, Y., Sredojevic, R., Megretski, A., Stojanovi, V., Avniel, Y. and Daniel, L. (2010) Compact Modeling of Nonlinear Analog Circuits Using System Identification via Semidefinite Programming and Incremental Stability Certification. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, **29**, 1149-1162. https://doi.org/10.1109/TCAD.2010.2049155

[9] Stan, G.B. and Sepulchre, R. (2007) Analysis of Interconnected Oscillators by Dissipativity Theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 256-270. https://doi.org/10.1109/TAC.2006.890471

[10] Jagtap, P. and Zamani, M. (2020) Symbolic Models for Retarded Jump-Diffusion Systems. *Automatica*, **111**, Article ID: 108666. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108666

[11] Zamani, M., Wouw, N.V.D. and Majumdar, R. (2013) Backstepping Controller Synthesis and Characterizations of Incremental Stability. *Systems & Control Letters*, **62**, 949-962. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2013.07.002