Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2153-2162
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212231

次线性算子的多线性交换子在变指标Herz Triebel-Lizorkin空间的有界性

张婉婧，程　鑫

伊犁师范大学数学与统计学院，新疆　伊宁

收稿日期：2022年11月25日；录用日期：2022年12月21日；发布日期：2022年12月30日

摘　要

本文考虑次线性算子的多线性交换子在变指标Herz Triebel-Lizorkin空间的有界性问题。通过利用变指标Herz Triebel-Lizorkin空间的等价刻画，极大算子控制法及Lipschitz函数的相关性质，证明了次线性算子与Lipschitz函数生成的多线性交换子是从变指标Herz空间到变指标Herz Triebel-Lizorkin空间有界的。

关键词

次线性算子，多线性交换子，极大算子，变指标Herz Triebel-Lizorkin空间

Boundedness of Multilinear Commutators for Sublinear Operators on the Herz Triebel-Lizorkin Spaces with Variable Exponent

Wanjing Zhang, Xin Cheng

College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Nov. 25th, 2022; accepted: Dec. 21st, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

This paper is concerned with a boundedness problem for the multilinear commutators of sublinear operators on the Herz Triebel-Lizorkin spaces with variable exponent. By means of the

文章引用: 张婉婧, 程鑫. 次线性算子的多线性交换子在变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2153-2162. DOI: 10.12677/pm.2022.1212231

maximum operator control method, the equivalent characterized of Herz Triebel-Lizorkin spaces with variable exponent and related properties of Lipschitz functions, it proved the boundedness of multilinear commutators for sublinear operators with Lipschitz functions from variable exponent Herz spaces to variable exponent Herz Triebel-Lizorkin spaces.

Keywords

Sublinear Operators, Multilinear Commutators, Maximum Operator, Herz Triebel-Lizorkin Spaces with Variable Exponent

1. 引言

近年来，自 1991 年 Kováčik 和 Rákosník [1]给出了变指标 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间的完备性，连续性及等价范数后，变指标函数空间得到了迅速的发展。众所周知，Herz 空间是 Lebesgue 空间的加幂权形式。随着 2010 年 Izuki [2]引入了变指标 Herz 空间并研究了该空间的性质，建立了次线性算子在该空间的有界性之后，越来越多的学者开始关注并研究变指标 Herz 型空间。先后定义了变指标 Herz-Morrey 空间[3]、变指标 Herz-Hardy 空间[4]、变指标 Herz-Besov 空间[5]和变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间[5]。最近，韦营营等[6]，Fang 等[7]利用 Peetre 极大算子和 Hardy-Littlewood 极大算子在向量值空间的有界性，建立了变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的等价范数刻画。

另一方面，关于交换子的研究也取得了很大进展。如 2015 年，王洪斌[8]证明了次线性算子的交换子在变指标 Herz-Hardy 空间的有界性。2017 年，王立伟等[9]得到了次线性算子的多线性交换子在变指标 Herz 空间的有界性结果。2022 年，彭珊珊等[10]证明了 Calderón-Zygmund 算子的多线性交换子在极大变指标 Herz 空间的有界性。受文献[6]和文献[9]研究结果的启发，本文主要讨论次线性算子与 Lipschitz 函数生成的多线性交换子在变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的有界性问题，对变指标函数空间理论做了进一步的推广。

本文结构安排如下：将在第二节给出与本文相关的定义、引理，在第三节给出本文的主要结果与相关证明。

2. 预备知识

在这篇文章中，我们引入次线性算子 T 和 T_λ 与局部可积函数 $\boldsymbol{b}$ 构成的多线性交换子 $T^{\boldsymbol{b}}$ 和 $T_\lambda^{\boldsymbol{b}}$，$T^{\boldsymbol{b}}$ 和 $T_\lambda^{\boldsymbol{b}}$ 分别定义如下：

$$T^{\boldsymbol{b}}(f)(x)=\left\|F_t^{\boldsymbol{b}}(f)(x)\right\|,\quad T_\lambda^{\boldsymbol{b}}(f)(x)=\left\|E_t^{\boldsymbol{b}}(f)(x)\right\|,$$

在这里，假设 $b_j\,(j=1,\cdots,m)$ 是固定在 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数，$F_t(x,y), E_t(x,y)$ 都定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times[0,+\infty)$ 上，

$$F_t(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}F_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\quad E_t(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}E_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

且

$$F_t^b(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m\left(b_j(x)-b_j(y)\right)F_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\quad E_t^b(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m\left(b_j(x)-b_j(y)\right)E_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y。$$

F_t，E_t 分别满足以下条件：对给定的 $\varepsilon>0$，$0<\lambda<n$

$$\|F_t(x,y)\|\le C|x-y|^{-n}, \tag{1}$$

$$\|E_t(x,y)\|\le C|x-y|^{-n+\lambda}, \tag{2}$$

和当 $2|y-z|\le|x-z|$ 时，

$$\|F_t(y,x)-F_t(z,x)\|+\|F_t(x,y)-F_t(x,z)\|\le C|y-z|^{\varepsilon}|x-z|^{-n-\varepsilon},$$

$$\|E_t(y,x)-E_t(z,x)\|\le C|y-z|^{\varepsilon}|x-z|^{-n-\varepsilon+\lambda}。$$

同样的，也可以定义 $T(f)(x)=\|F_t(f)(x)\|$，$T_\lambda(f)(x)=\|E_t(f)(x)\|$。

对于变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间，有如下重要性质：

对 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$，$0<\beta<1$，$\alpha\in\mathbb{R}$，$0<q\le\infty$，齐次变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的等价范数刻画如下：

$$\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}\dot{F}_\infty^\beta(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|f-f_Q|\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)},$$

非齐次变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的等价范数刻画如下：

$$\|f\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}\dot{F}_\infty^\beta(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|f-f_Q|\right\|_{K_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x$。

下面介绍一些定义、引理：

定义 1 [6] 设 Ω 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个可测子集且 $|\Omega|>0$。令 $p(\cdot):\Omega\to[1,\infty)$ 是可测函数。变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 定义为：对于某个 $\lambda>0$，使得

$$\int_\Omega\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|\mathrm{d}x<\infty,$$

成立的 Ω 上的可测函数 f 全体。其范数可以表示为：

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\le1\right\}。$$

设 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上所有局部可积函数的集合，给定一个函数 $f\in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$，则 Hardy-Littlewood 极大算子 M 被定义为：

$$Mf(x):=\sup_{r>0}r^{-n}\int_{B(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n,$$

这里 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<r\}$。

令 $p_-:=\operatorname{ess\,inf}\{p(x):x\in\mathbb{R}^n\}>0$，$p_+:=\operatorname{ess\,sup}\{p(x):x\in\mathbb{R}^n\}<\infty$，记 $\mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$ 是满足

$0<p_-\le p(x)<p_+<\infty$ 的所有 $p(x)$ 的全体，$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是满足 $1<p_-\le p(x)<p_+<\infty$ 的所有 $p(x)$ 的全体。$p'(\cdot)$ 是 $p(\cdot)$ 的共轭指数，即 $p'(\cdot)=\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-1}$。用 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 表示满足 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 且使得 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的全体。若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{-C}{\log(|x-y|)}，\quad |x-y|\le\frac{1}{2},$$

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{\log(e+|x|)}，\quad |y|\ge|x|,$$

则 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$。

接下来给出一些记号以及 Lipschitz 函数的相关性质：

对 $1\le l\le m$，C_l^m 表示由 $\{1,2,\cdots,m\}$ 中 l 个不同元素构成的有限子集族 $\sigma=\{\sigma(1),\cdots,\sigma(l)\}$。对任意 $\sigma\in C_l^m$，用 $\sigma^c=\{1,\cdots,m\}\setminus\sigma$ 表示 σ 的补序列。如果 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，$b_l\in\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 及 $\sigma=\{\sigma(1),\cdots,\sigma(l)\}\in C_l^m$，$1\le l\le m$，记 $\boldsymbol{b}_\sigma=b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(l)}$，$(b(x)-b_B)_\sigma:=\prod_{i=1}^{l}\left(\left(b_{\sigma(i)}\right)(x)-\left(b_{\sigma(i)}\right)_B\right)$。并记 $\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}:=\prod_{i=1}^{l}\|b_{\sigma(i)}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}$。特别地，$\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}:=\prod_{l=1}^{m}\|b_l\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}$。

引理 1 [11] 对 $0<\beta<1$，$1<q\le\infty$，有

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}=\sup_Q\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|f(y)-f_Q|\mathrm{d}y\approx\sup_Q\frac{1}{|Q|^{\beta/n}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-f_Q|^q\,\mathrm{d}y\right)^{1/q},$$

当 $q=\infty$ 时，上式做相应修改。

引理 2 [12] 设 $Q^*\subset Q$，则 $\left|f_{Q^*}-f_Q\right|\le\|f\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\beta/n}$。

目前，关于极大算子和次线性算子在变指标 Herz 空间的有界性结果有：

引理 3 [5] 令 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$，$0<q<\infty$，$1<r<\infty$。若 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$ 且 $-n\delta_1<\alpha<n\delta_2$。则存在一个正常数 C 使得对 $\mathbb{R}^n$ 上所有局部可积的函数序列 $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$，有

$$\left\|\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|Mf_k|^r\right)^{1/r}\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}\le C\left\|\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f_k|^r\right)^{1/r}\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}。$$

引理 4 [2] 令 $\alpha\in\mathbb{R}$，$0<q<\infty$ 且 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$。若 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$ 且 $-n\delta_1<\alpha<n\delta_2$。假设 T 是一个次线性算子，满足尺寸条件(1)。若 T 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界，那么 T 在变指标 Herz 空间有界。

引理 5 [7] 令 $\alpha\in\mathbb{R}$，$0<\lambda<n$，$0<q_1<q_2\le\infty$，$p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\frac{1}{p_2(\cdot)}=\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{\lambda}{n}$。若 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$ 且 $-n\delta_1<\alpha<n\delta_2$。假设 T_λ 是一个次线性算子，满足尺寸条件(2)。若 T_λ 从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 有界，那么 T_λ 是从齐次变指标 Herz 空间 $\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha,q_1}(\mathbb{R}^n)$ 到齐次变指标 Herz 空间 $\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha,q_2}(\mathbb{R}^n)$ 有界的，并且 T_λ 在非齐次变指标 Herz 空间的有界性也同样成立。

引理 6 [7] 令 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}=\frac{\lambda}{n}$。若 h^Q 是固定在方体 Q 上的函数，那么对于

$0 \le \beta$，有

$$\left\|\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_{Q}\left|h^{Q}\right|\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q}_{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\left\|\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n+\lambda/n}}\int_{Q}\left|h^{Q}\right|\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

且

$$\left\|\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_{Q}\left|h^{Q}\right|\right\|_{K^{\alpha,q}_{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\left\|\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n+\lambda/n}}\int_{Q}\left|h^{Q}\right|\right\|_{K^{\alpha,q}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

这里的常数 C 仅仅与 $p_1(\cdot),p_2(\cdot),q,\alpha$ 和 n 有关。

3. 主要结果及证明

本文的主要结论如下：

定理 1 令 $\alpha\in\mathbb{R}$，$0<q\le\infty$ 且 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$。假设 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$，$-n\delta_1<\alpha<n\delta_2$ 且 $0<\beta<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{m}\right)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)$，$b_j\in\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$，$1\le j\le m$。对任意的具有紧支集的局部可积函数 f，若次线性算子 T 满足尺寸条件(1)且 T 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界，那么

(a) $T^{\boldsymbol{b}}$ 是从 $\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\dot{K}^{\alpha,q}_{p(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界的；

(b) $T^{\boldsymbol{b}}$ 是从 $K^{\alpha,q}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $K^{\alpha,q}_{p(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有界的。

定理 2 令 $\alpha\in\mathbb{R}$，$0<\lambda<n$，$0<q_1,q_2<\infty$，$p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\frac{1}{p_2(\cdot)}=\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{\lambda}{n}$。假设 $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$，$-n\delta_1<\alpha<n\delta_2$ 且 $0<\beta<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{m}\right)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)$，$b_j\in\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$，$1\le j\le m$。对任意的具有紧支集的局部可积函数 f，若次线性算子 T_λ 满足尺寸条件(2)且 T_λ 从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 有界，那么

(a) $T^{\boldsymbol{b}}_\lambda$ 是从 $\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$；

(b) $T^{\boldsymbol{b}}_\lambda$ 是从 $K^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $K^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$。

定理 1 的证明：令 $Q=Q(x_0,l)$，$x_0\in Q$，$l>0$。对 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 做如下分解：$f_1=f\chi_{2Q}$，$f_2=f-f_1$。有：

$$\begin{aligned}
F_t^{\boldsymbol{b}}(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{m}\left(b_j(x)-b_j(y)\right)F_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{m}\left(b_j(x)-(b_j)_Q+(b_j)_Q-b_j(y)\right)F_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y\\
&= \sum_{j=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}\left(b_j(x)-(b_j)_Q\right)_\sigma\int_{\mathbb{R}^n}\left(b_j(y)-(b_j)_Q\right)_{\sigma^c}F_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y\\
&= \left(b_1(x)-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m(x)-(b_m)_Q\right)F_t(f)(x)\\
&\quad+(-1)^m F_t\left(\left(b_1-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m-(b_m)_Q\right)f\right)(x)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma\int_{\mathbb{R}^n}\left(b(y)-b_Q\right)_{\sigma^c}F_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(b_1(x)-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m(x)-(b_m)_Q\right)F_t(f)(x)\\
&\quad+(-1)^m F_t\left(\left(b_1-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m-(b_m)_Q\right)f_1\right)(x)\\
&\quad+(-1)^m F_t\left(\left(b_1-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m-(b_m)_Q\right)f_2\right)(x)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}(-1)^{m-j}\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma F_t\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left|T^{\boldsymbol{b}}(f)(x)-T\left(\left((b_1)_Q-b_1\right)\cdots\left((b_m)_Q-b_m\right)f_2\right)(x_0)\right|\\
&\le\left\|F_t^b(f)(x)-F_t\left(\left((b_1)_Q-b_1\right)\cdots\left((b_m)_Q-b_m\right)f_2\right)(x_0)\right\|\\
&\le\left\|\left(b_1(x)-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m(x)-(b_m)_Q\right)F_t(f)(x)\right\|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\left\|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma F_t\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right\|\\
&\quad+\left\|F_t\left(\left(b_1-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m-(b_m)_Q\right)f_1\right)(x)\right\|\\
&\quad+\left\|F_t\left(\prod_{j=1}^m\left(b_j-(b_j)_Q\right)f_2\right)(x)-F_t\left(\prod_{j=1}^m\left(b_j-(b_j)_Q\right)f_2\right)(x_0)\right\|\\
&:=E_1(x)+E_2(x)+E_3(x)+E_4(x).
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q\left|T^{\boldsymbol{b}}(f)(x)-T\left(\left((b_1)_Q-b_1\right)\cdots\left((b_m)_Q-b_m\right)f_2\right)(x_0)\right|\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q E_1(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q E_2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q E_3(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q E_4(x)\mathrm{d}x\\
&:=N_1+N_2+N_3+N_4.
\end{aligned}
$$

首先估计 N_1，根据引理 1，可以得到

$$
\begin{aligned}
N_1&\le\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\sup_{x\in Q}\left|b_1(x)-(b_1)_Q\right|\cdots\left|b_m(x)-(b_m)_Q\right|\int_Q\left|T(f)(x)\right|\mathrm{d}x\\
&\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}|Q|^{m\beta/n}\int_Q\left|T(f)(x)\right|\mathrm{d}x\\
&\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}M\left(T(f)\right)(x).
\end{aligned}
$$

对于 N_2，选取 $1<r<p$ 并令 μ，μ' 为整数，使得 $\mu+\mu'=m$，$0\le\mu<m$，$0<\mu'\le m$。根据 Hölder 不等式，次线性算子 T 在 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性以及引理 1，可以得到

$$
\begin{aligned}
N_2&\le\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q\left|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma\right|\left|T\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right|\mathrm{d}x\\
&\le\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\left(\int_Q\left|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma\right|^{r/(r-1)}\mathrm{d}x\right)^{1-1/r}\left(\int_Q\left|T\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}
\end{aligned}
$$

$$\le C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\left(\int_Q\left|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma\right|^{r/(r-1)}\mathrm{d}x\right)^{1-1/r}\left(\int_Q\left|\left(b(x)-b_Q\right)_{\sigma^c}f(x)\right|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$\le C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}|Q|^{\mu\beta/n}\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{1-1/r}|Q|^{\mu'\beta/n}\|\boldsymbol{b}_{\sigma^c}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{1/r}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left(M\left(|f|^r\right)\right)^{1/r}(x).$$

接下来，继续估计 N_3。 N_3 的估计与 N_2 的估计类似，通过 Hölder 不等式，有

$$N_3\le C\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\left(\int_{2Q}\left|T\left(\prod_{j=1}^m\left(b_j-\left(b_j\right)_Q\right)f_1\right)(x)\right|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}|Q|^{1-1/r}$$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}|Q|^{1-1/r}\left(\int_{2Q}\left|\prod_{j=1}^m\left(\left(b_j-\left(b_j\right)_Q\right)f\right)(x)\right|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$\le C\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}|Q|^{1-1/r}\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{m\beta/n}\left(\int_{2Q}|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left(M\left(|f|^r\right)\right)^{1/r}(x).$$

对于 N_4，因为 $y\in(2Q)^c$， $|x_0-y|\approx|x-y|$。根据引理 1，引理 2，可以得到

$$E_4(x)\le\int_{(2Q)^c}\left|F_t(x,y)-F_t(x_0,y)\right||f(y)|\left|\prod_{j=1}^m\left(b_j(y)-\left(b_j\right)_Q\right)\right|\mathrm{d}y$$

$$\le C\int_{(2Q)^c}\frac{|x_0-x|^\varepsilon}{|x_0-y|^{n+\varepsilon}}|f(y)|\left|\prod_{j=1}^m\left(b_j(y)-\left(b_j\right)_Q\right)\right|\mathrm{d}y$$

$$\le C\sum_{k=1}^\infty\int_{2^kQ\backslash2^{k-1}Q}|x_0-x|^\varepsilon|x_0-y|^{-(n+\varepsilon)}|f(y)|\left|\prod_{j=1}^m\left(b_j(y)-\left(b_j\right)_Q\right)\right|\mathrm{d}y$$

$$\le C\sum_{k=1}^\infty2^{-k\varepsilon}\left|2^kQ\right|^{-1}\int_{2^kQ}|f(y)|\prod_{j=1}^m\left(\left|b_j(y)-\left(b_j\right)_{2^kQ}\right|+\left|\left(b_j\right)_{2^kQ}-\left(b_j\right)_Q\right|\right)\mathrm{d}y$$

$$\le C\sum_{k=1}^\infty2^{-k\varepsilon}\left|2^kQ\right|^{-1}\left(\left(b_j\right)_{2^kQ}-\left(b_j\right)_Q\right)_\sigma\int_{2^kQ}|f(y)|\left|b_j(y)-\left(b_j\right)_{2^kQ}\right|_{\sigma^c}\mathrm{d}y$$

$$\le C\sum_{k=1}^\infty2^{-k\varepsilon}\left|2^kQ\right|^{-1}\left|2^kQ\right|^{\beta\mu/n}\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left|2^kQ\right|^{1+\beta\mu'/n}$$

$$\times\frac{1}{\left|2^kQ\right|^{\beta\mu'/n}}\left(\frac{1}{\left|2^kQ\right|}\int_{2^kQ}|f(y)|\left|b_j(y)-\left(b_j\right)_{2^kQ}\right|_{\sigma^c}\mathrm{d}y\right)$$

$$\le C\sum_{k=1}^\infty2^{-k\varepsilon}\left|2^kQ\right|^{-1}\left|2^kQ\right|^{1+m\beta/n}\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}M(f)(x)$$

$$\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{m\beta/n}M(f)(x)\sum_{k=1}^\infty2^{(m\beta-\varepsilon)k}$$

$$\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{m\beta/n}M(f)(x).$$

所以， $N_4\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}M(f)(x)$。

结合上面对 N_1， N_2， N_3， N_4 的估计，对所有满足 $x\in Q$ 的方体 Q 取上确界，可以得到

$$\left\|T^{\boldsymbol{b}}(f)(x)\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}\dot{F}_{\infty}^{m\beta}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left(\left\|M(f)(x)\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}+\left\|\left(M\left(|f|^r\right)\right)^{1/r}(x)\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}+\left\|M\left(T(f)(x)\right)\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

再根据引理 3，引理 4，可以得出

$$\left\|T^{\boldsymbol{b}}(f)(x)\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}\dot{F}_{\infty}^{m\beta}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left\|f(x)\right\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

对于 $T^{\boldsymbol{b}}$ 在非齐次变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间上有界性的证明与上述方法相似，故此处略去证明。定理 1 至此估计完毕，接下来继续证明定理 2。

定理 2 的证明：定理 2 的证明与定理 1 类似，所以令 $Q=Q(x_0,l)$， $x_0\in Q$， $l>0$。对 $f\in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 做如下分解： $f_1=f\chi_{2Q}$， $f_2=f-f_1$。有：

$$\begin{aligned}
&\left|T_\lambda^{\boldsymbol{b}}(f)(x)-T_\lambda\left(\left((b_1)_Q-b_1\right)\cdots\left((b_m)_Q-b_m\right)f_2\right)(x_0)\right|\\
&\le\left\|E_t^{\boldsymbol{b}}(f)(x)-E_t\left(\left((b_1)_Q-b_1\right)\cdots\left((b_m)_Q-b_m\right)f_2\right)(x_0)\right\|\\
&\le\left\|\left(b_1(x)-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m(x)-(b_m)_Q\right)E_t(f)(x)\right\|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\left\|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma E_t\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right\|\\
&\quad+\left\|E_t\left(\left(b_1-(b_1)_Q\right)\cdots\left(b_m-(b_m)_Q\right)f_1\right)(x)\right\|\\
&\quad+\left\|E_t\left(\prod_{j=1}^m\left(b_j-(b_j)_Q\right)f_2\right)(x)-E_t\left(\prod_{j=1}^m\left(b_j-(b_j)_Q\right)f_2\right)(x_0)\right\|\\
&:=I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)+I_4(x).
\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q\left|T_\lambda^{\boldsymbol{b}}(f)(x)-T_\lambda\left(\left((b_1)_Q-b_1\right)\cdots\left((b_m)_Q-b_m\right)f_2\right)(x_0)\right|\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q I_1(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q I_2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q I_3(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n}}\int_Q I_4(x)\mathrm{d}x\\
&:=G_1+G_2+G_3+G_4.
\end{aligned}$$

先估计 G_1。 G_1 的估计与 N_1 类似，并由引理 3，引理 5 可以得到

$$\left\|G_1\right\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha,q_2}\dot{F}_{\infty}^{m\beta}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left\|M\left(T_\lambda(f)\right)(x)\right\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha,q_2}(\mathbb{R}^n)}\le C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left\|f(x)\right\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha,q_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

接下来，继续估计 G_2。选取 $r,\overline{r}$ 并且 $1<r<p_{1-}$， $1/r-1/\overline{r}=\lambda/n$， $r<p_{1-}<n/\lambda$。并令 μ,μ' 为整数，使得 $\mu+\mu'=m$， $0\le\mu<m$， $0<\mu'\le m$。根据 Hölder 不等式以及引理 6、引理 1、引理 5，存在 $\overline{r}$，使得

$$\begin{aligned}
&\left\|G_2\right\|_{\dot{K}_{p_2(\cdot)}^{\alpha,q_2}\dot{F}_{\infty}^{m\beta}(\mathbb{R}^n)}\\
&\le\left\|\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n+\lambda/n}}\int_Q\left|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma\right|\left|T_\lambda\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right|\mathrm{d}x\right\|_{\dot{K}_{p_1(\cdot)}^{\alpha,q_2}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\|\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n+\lambda/n}}\left(\int_Q\left|\left(b(x)-b_Q\right)_\sigma\right|^{\bar{r}/(\bar{r}-1)}\mathrm{d}x\right)^{1-1/\bar{r}}\left(\int_Q\left|T_\lambda\left(\left(b-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right|^{\bar{r}}\mathrm{d}x\right)^{1/\bar{r}}\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left\|\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n+\lambda/n}}\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\mu\beta/n}|Q|^{1-1/\bar{r}}\left\|T_\lambda\left(\left(b(x)-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right\|_{\bar{r}}\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left\|\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n+\lambda/n}}\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\mu\beta/n}|Q|^{1-1/\bar{r}}\left\|\left(\left(b(x)-b_Q\right)_{\sigma^c}f\right)(x)\right\|_{r}\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left\|\frac{1}{|Q|^{1+m\beta/n+\lambda/n}}\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\mu\beta/n}|Q|^{1-1/\bar{r}}\|\boldsymbol{b}_{\sigma^c}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{\mu'\beta/n}|Q|^{1/r}\left(M\left(|f|^r\right)\right)^{1/r}(x)\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(M\left(|f|^r\right)\right)^{1/r}(x)\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

所以 $\|G_2\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f(x)\|_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

对于 G_3， G_3 的估计与 N_3 类似。使用引理 2 能够得出

$$
\|G_3\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\left\|\left(M\left(|f|^r\right)\right)^{1/r}(x)\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f(x)\|_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
$$

最后估计 G_4， G_4 的估计与 N_4 类似。因为 $y\in(2Q)^c$， $|x_0-y|\approx|x-y|$。根据引理 1，引理 2 可以得到

$$
\begin{aligned}
I_4(x)&\leq\int_{(2Q)^c}\left\|E_t(x,y)-E_t(x_0,y)\right\||f(y)|\prod_{j=1}^m\left|b_j(y)-(b_j)_Q\right|\mathrm{d}y\\
&\leq C\int_{(2Q)^c}|x_0-x|^\varepsilon|x_0-y|^{-(n+\varepsilon-\lambda)}|f(y)|\left|\prod_{j=1}^m\left(b_j(y)-(b_j)_Q\right)\right|\mathrm{d}y\\
&\leq C\sum_{k=1}^\infty\int_{2^kQ\backslash2^{k-1}Q}|x_0-x|^\varepsilon|x_0-y|^{-(n+\varepsilon-\lambda)}\left|\prod_{j=1}^m\left(b_j(y)-(b_j)_Q\right)\right|\mathrm{d}y\\
&\leq C\sum_{k=1}^\infty2^{-k\varepsilon}\left|2^kQ\right|^{-1+\lambda/n}\int_{2^kQ}|f(y)|\prod_{j=1}^m\left(\left|b_j(y)-(b_j)_{2^kQ}\right|+\left|(b_j)_{2^kQ}-(b_j)_Q\right|\right)\mathrm{d}y\\
&\leq C\sum_{k=1}^\infty2^{-k\varepsilon}\left|2^kQ\right|^{m\beta/n+\lambda/n}\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}M(f)(x)\\
&\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{m\beta/n+\lambda/n}M(f)(x)\sum_{k=1}^\infty2^{(m\beta-\varepsilon)k}\\
&\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}|Q|^{m\beta/n+\lambda/n}M(f)(x).
\end{aligned}
$$

进而，由引理 6，引理 2 及引理 5，可以得到

$$
\|G_4\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|M(f)(x)\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f(x)\|_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
$$

结合上面对 G_1， G_2， G_3， G_4 的估计，对于所有满足 $x\in Q$ 的方体 Q 选取上确界，可以得出

$$
\left\|T_\lambda^{\boldsymbol{b}}(f)(x)\right\|_{\dot{K}^{\alpha,q_2}_{p_2(\cdot)}\dot{F}^{m\beta}_\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\boldsymbol{b}\|_{\mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}\|f(x)\|_{\dot{K}^{\alpha,q_1}_{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
$$

对于 T_{λ}^{b} 在非齐次变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间上有界性的证明与上述方法相似，故此处略去证明。

基金项目

新疆维吾尔自治区自然科学基金(2021D01C463)。

参考文献

[1] Ondrej, K. and Jiří, R. (1991) On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **41**, 592-618. https://doi.org/10.21136/CMJ.1991.102493

[2] Mitsuo, I. (2010) Boundedness of Sublinear Operators on Herz Spaces with Variable Exponent and Application to Wavelet Characterization. *Analysis Mathematica*, **36**, 33-50. https://doi.org/10.1007/s10476-010-0102-8

[3] Mitsuo, I. (2009) Boundedness of Vector-Valued Sublinear Operators on Herz-Morrey Spaces with Variable Exponent. *Mathematical Sciences Research Journal*, **13**, 243-253.

[4] Wang, H.B. and Liu, Z.G. (2012) The Herz-Type Hardy Spaces with Variable Exponent and Their Applications. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **16**, 1363-1389. https://doi.org/10.11650/twjm/1500406739

[5] Shi, C.E. and Xu, J. (2013) Herz Type Besov and Triebel-Lizorkin Spaces with Variable Exponent. *Frontiers of Mathematics in China*, **8**, 904-921. https://doi.org/10.1007/s11464-012-0248-8

[6] 韦营营, 张婧. Marcinkiewicz 积分交换子在变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(12): 55-63.

[7] Fang, C.L., Wei, Y.Y. and Zhang, J. (2022) The Boundedness of Commutators of Sublinear Operators on HerzTriebel-Lizorkin Spaces with Variable Exponent. arxiv: 2210.01289v1.

[8] 王洪彬. 变指标 Herz 型 Hardy 空间上一类交换子的有界性[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2015(3): 27-31.

[9] Wang, L.W. and Shu, L.S. (2017) Multilinear Commutators of Singular Integral Operators in Variable Exponentherz-Type Spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 1413-1432. https://doi.org/10.1007/s40840-017-0554-0

[10] Peng, S.S. and Chen, J.L. (2022) The Boundedness of Multilinear Commutators on Grand Variable Herz Spaces. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **37**, 203-213.

[11] Paluszyński, M. (1995) Characterization of Besov Spaces via the Commutator Operator of Coifman, Rochberg and Weiss. *Indiana University Mathematics Journal*, **44**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1995.44.1976

[12] Devore, R.A. and Sharpley, R.C. (1984) Maximal Functions Measuring Smoothness. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **47**, Article No. 293. https://doi.org/10.1090/memo/0293