Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(3), 464-472
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.123052

Hans汉斯

# 带粗糙核的奇异积分算子及其交换子在新型加权广义Morrey空间上的有界性

锁清莉[1]，刘建明[2]

[1]东华理工大学理学院，江西 南昌
[2]吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2022年2月19日；录用日期：2022年3月21日；发布日期：2022年3月28日

## 摘 要

本文利用 $A_p$ 权函数类的一些性质和调和分析中处理奇异积分及其交换子的若干方法，得到了带粗糙核的奇异积分算子 $T_\Omega$ 及其交换子 $T_\Omega^b$ 在一类新型加权广义Morrey空间 $M^{p,\theta}(\omega)$ 上的有界性。

## 关键词

奇异积分算子，交换子，粗糙核，Morrey空间，$A_p$ 权

# The Boundedness of Singular Integral Operators and Commutators with Rough Kernel on the Weighted Generalized Morrey-Type Spaces

**Qingli Suo[1], Jianming Liu[2]**

[1]School of Science, East China University of Technology, Nanchang Jiangxi
[2]School of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Feb. 19th, 2022; accepted: Mar. 21st, 2022; published: Mar. 28th, 2022

## Abstract

**In this paper, by using some properties of the $A_p$ weight function class and the methods to solve**

文章引用: 锁清莉, 刘建明. 带粗糙核的奇异积分算子及其交换子在新型加权广义 Morrey 空间上的有界性[J]. 理论数学, 2022, 12(3): 464-472. DOI: 10.12677/pm.2022.123052

**with the singular integral and its commutator in harmonic analysis, we get the boundedness of the singular integral operator $T_\Omega$ its commutator $T_\Omega^b$ with a rough kernel on a class of new weighted generalized Morrey space $M^{p,\theta}(\omega)$.**

## Keywords

**Singular Integral Operators, Commutators, Rough Kernel, Morrey Spaces, $A_p$ Weighted**



## 1. 引言及主要结论

经典的奇异积分算子 $T$ 在调和分析领域扮演着重要的角色，其定义为

$$T_\Omega(f)(x)=p.v.\int_{R^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

这里核函数 $K(x)$ 满足一定的尺寸条件和光滑性条件，具体内容可以参见文献[1]。

假设 $b$ 是一个非负局部可积函数，则奇异积分算子交换子定义如下

$$T_b(f)(x)=b(x)T(f)(x)-T(bf)(x).$$

奇异积分算子及其交换子在函数空间中的有界性得到了数学工作者的极大重视，读者可以参见[2] [3]等文献。

与此同时，积分算子的加权理论也得到了极大的发展。上世纪七十年代，Muckenhoup 在文献[4]中研究 Hardy-Littlewood 极大函数的加权 $L^p$ 有界性时引入了著名的 $A_p$ 权理论。

设 $\omega(x)$ 是 $R^n$ 中大于 0 的非负局部可积函数，$B=B(x_0,r)$ 表示以 $x_0$ 为中心，$r$ 为半径的球体。当 $1<p<\infty$ 时，若 $\omega(x)$ 满足以下不等式

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\le C,$$

则记 $\omega\in A_p$。

当 $p=1$ 时，若 $\omega(x)$ 满足以下不等式

$$\frac{1}{|B|}\int_B\omega(x)\mathrm{d}x\le C\operatorname*{essinf}_{x\in B}\omega(x),$$

则记 $\omega(x)\in A_1$。

其中，$C$ 是一个与 $B$、$\omega(x)$ 无关的正常数。当 $p=\infty$ 时，我们定义 $A_\infty=\bigcup\limits_{1\le p<\infty}A_p$。根据文献[4]，我们有 $A_p\subset A_q\subset A_\infty\ (1\le p\le q<\infty)$。

积分算子的加权模不等式引起了数学工作者的极大重视也得到了很多重要的研究成果，读者可以参见文献[5] [6]等。

经典的 Morrey 空间是由 Morrey [7]在研究二阶椭圆型偏微分方程解的局部性质时所引进的，其定义为

$$L^{p,\lambda}=\left\{f\in L^{p,\lambda}:\|f\|_{L^{p,\lambda}}:=\sup_{x\in R^n,t>0}\left(\frac{1}{t^{\lambda}}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

其中 $0<\lambda<n$，$1\le p<\infty$，$B(x,t)$ 为 $R^n$ 中任意一个以 $x$ 为中心，$t$ 为半径的球体。

Morrey 空间在调和分析以及 PDE 领域有着重要的应用，数学工作者也对此类空间做了深入的研究并且得到了一些较有意义的结论，举例如下。

在文献[8]中，Mizuhara 定义了广义 Morrey 空间，其定义为

$$L^{p,\theta}=\left\{f\in L^{p,\theta}:\|f\|_{L^{p,\theta}(\omega)}:=\sup_{B}\left(\frac{1}{\theta(B)}\int_B|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

其中 $1\le p<\infty$，$\theta$ 满足一类二倍条件，具体可以参见文献[8]。Mizuhara 证明了奇异积分算子、极大算子等这些经典算子在此空间上的有界性，并且这些结果推广了积分算子在经典 Morrey 空间中的有界性。

在文献[9]中，Komori 和 Shirai 定义了加权 Morry 空间，定义如下

$$L^{p,k}(w)=\left\{f\in L^{p,k}:\|f\|_{L^{p,k}}:=\sup_{B}\left(\frac{1}{\omega(B)^k}\int_B|f(y)|^p\,\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

其中 $0<k<1$，$1\le p<\infty$，$B\subset R^n$ 且 $\omega$ 为定义在 $R^n$ 上的非负局部可积函数。

其次，Komori 和 Shirai 在文献[9]中证明了奇异积分算子及其交换子在空间 $L^{p,k}(w)$ 中的有界性，他们的结果可以看作是积分算子在经典 Morrey 空间中有界性的推广。

在文献[10]中，Wang 定义了一类新型的加权广义 Morrey 空间，在给出此类空间定义之前，我们先介绍如下定义。

设 $0\le k<1$，$\theta(\cdot)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的非负增函数并且满足以下一类 $D_k$ 条件：

$$\frac{\theta(\xi)}{\xi^k}\le C\frac{\theta(\xi')}{(\xi')^k},(0<\xi'<\xi<+\infty),$$

其中 $C$ 是一个不依赖于 $\xi,\xi'$ 的常数。

接下来介绍新型加权广义 Morrey 空间。

**定义 1** [10]设 $1\le p<\infty$，$\theta$ 满足 $D_K$ 条件 $(0\le k<1)$，新型加权广义 Morrey 空间 $M^{p,\theta}(\omega)$ 定义为

$$M^{p,\theta}(\omega)=\left\{f\in L^p_{loc}(\omega):\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}=\sup_B\left(\frac{1}{\theta(\omega(B))}\int_B|f(x)|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\le C<\infty.$$

显然加权 $L^p$ 空间、加权 Morrey 空间及广义 Morrey 空间是 $M^{p,\theta}(\omega)$ 的特例，如下：

1) 当 $\theta(x)=1$ 时，$M^{p,\theta}(\omega)$ 为加权 $L^p$ 空间。

2) 当 $\theta(x)=x^k$ 时，$M^{p,\theta}(\omega)$ 为加权 Morrey 空间。

3) 当 $\omega(x)=1$ 时，$M^{p,\theta}(\omega)$ 为广义 Morrey 空间。

因此研究积分算子在 $M^{p,\theta}(\omega)$ 的有界性就显得尤为有意义。Wang 在文献[10]中证明了奇异积分算子及其交换子在 $M^{p,\theta}(\omega)$ 中的有界性，他的结论推广了文献[8] [9]中的若干结果。

如前所述，经典奇异积分算子 $T$ 对核函数有光滑性的要求，因此降低核函数的光滑性也引起了数学

工作者的极大兴趣。接下来介绍带有粗糙核的奇异积分算子。

对任意的 $\lambda \neq 0$，若函数 $\Omega(x)$ 满足 $\Omega(\lambda x)=\Omega(x)$，则称 $\Omega(x)$ 为零次齐次函数。假设 $S^{n-1}$ 为 $R^n$ 上的单位球面，$f$ 是 $R^n$ 上非负局部可积函数，当 $\Omega \in L^s\left(S^{n-1}\right)(1<s<\infty)$ 时，具有粗糙核的奇异积分算子 $T_\Omega$ 定义如下：

$$T_\Omega(f)(x)=p.v.\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y .$$

有界平均震荡函数空间 $BMO$，最初是由 John 与 Nirenberg [11]研究方程问题时所引入的，其定义为

$$BMO=\left\{b\in L^1_{loc}\left(R^n\right):\|b\|_{BMO}<\infty\right\},$$

其中

$$\|b\|_{BMO}=\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|b(x)-b_B\right|\mathrm{d}x\right)<\infty .$$

且 $|B|$ 为球体 B 上的 Lebesgue 测度，$b_B=\frac{1}{|B|}\int_B b(y)\mathrm{d}y$ 表示函数 b 在球体 B 上的平均值。

则由 $BMO$ 函数以及算子 $T_\Omega$ 生成的具有粗糙核的奇异积分算子交换子定义为

$$T^b_\Omega(f)(x)=b(x)T_\Omega(f)(x)-T_\Omega(bf)(x).$$

如前所述，当 $T$ 为经典奇异积分算子时，核函数需要满足一定的光滑性条件，但是当 $\Omega\in L^s\left(S^{n-1}\right)$ $(1<s<\infty)$ 时，算子 $T_\Omega$ 核函数的光滑性大大降低。因此研究算子 $T_\Omega$ 和 $T^b_\Omega$ 在函数空间中的有界性就显得尤为有意义。

在文献[12]中，作者研究了具有粗糙核的奇异积分算子及其交换子在加权中心 Morrey 空间中的有界性，在文献[13]中，作者研究了算子 $T_\Omega$ 和 $T^b_\Omega$ 在加权 Morrey 空间中的有界性，这些结论都可以在某种程度上看做是经典奇异积分算子在这些函数空间中有界性的推广。

在文献[10]中，作者定义了一类新型加权 Morrey 空间 $M^{p,\theta}(\omega)$ 并研究了算子 $T$ 以及 $T_b$ 在 $M^{p,\theta}(\omega)$ 中的有界性。受以上论文的启发，降低核函数的光滑性，继续研究积分算子及其交换子在 $M^{p,\theta}(\omega)$ 中的有界性就显得尤为有意义。因此，本文将研究算子 $T_\Omega$ 和 $T^b_\Omega$ 在 $M^{p,\theta}(\omega)$ 中的有界性。

本文的主要结果如下：

**定理 1** 设 $T_\Omega$ 是带粗糙核 $\Omega(x')$ 的奇异积分算子且 $\Omega(x')$ 属于 $L^s\left(S^{n-1}\right)(1<s<\infty)$，$\omega(x)\in A_{\frac{p}{s'}}(p>s')$，则存在一个不依赖于 $f$ 的正常数 $C$，有

$$\left\|T_\Omega(f)\right\|_{M^{p,\theta}(\omega)}\le C\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)},$$

其中 $1<p<\infty$，$\theta$ 满足 $D_k$ 条件。

**定理 2** 设 $T^b_\Omega$ 是带粗糙核 $\Omega(x')$ 的奇异积分算子的交换子，$\Omega(x')$ 属于 $L^s\left(S^{n-1}\right)(1<s<\infty)$，$\omega(x)\in A_{\frac{p}{s'}}(p>s')$ 以及 $b\in BMO\left(R^n\right)$，则存在一个不依赖于 $f$ 的正常数 $C$，有

$$\left\|T^b_\Omega(f)\right\|_{M^{p,\theta}(\omega)}\le C\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)},$$

$1<p<\infty$，$\theta$ 满足 $D_k$ 条件。

**注记 3** 显然，定理 1 和 2 推广了文献[13]的相关结果并且在某些意义上也可以看作是文献[8] [9] [10]中相关结果的改进。

## 2. 预备知识

**引理 1** [2]设 $\omega\in A_p$，$1\le p<\infty$，对任意球体 $B$，$\omega(x)$ 满足 2 倍条件，既存在一个常数 $C>0$，使得

$$\omega(2B)\le C\omega(B).$$

设 $\omega(x)\in A_\infty$，对任意球体 $B$ 和球体 $B$ 的可测子集 $E$，存在一个不依赖于 $B$、$E$ 的常数 $\delta>0$，有

$$\frac{\omega(E)}{\omega(B)}\le C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\delta}.$$

**引理 2** [14] [15]对于任意 $b\in BMO$，有如下结论：

1) 对于在 $R^n$ 中的任意球体 $B$，以及 $j\in Z^+$，有

$$\left|b_{2^{j+1}B}-b_B\right|\le C(j+1)\|b\|_{BMO}.$$

2) 设 $\omega(x)\in A_p$，以及 $1<p<\infty$，对任意 $B\subset R^n$，有

$$\left(\int_B\left|b(x)-b_B\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\le\|b\|_{BMO}\,\omega(B)^{1/p}.$$

**引理 3** [16]设 $S^{n-1}$ 为 $R^n$ 上的单位球面，$\Omega(x)$ 为零次齐次函数且 $\Omega\in L^s\left(S^{n-1}\right)(1<s<\infty)$，$\omega(x)\in A_{p/r'}(r'\le p<\infty)$，则 $T_\Omega$ 在 $L^p_\omega$ 上有界。

## 3. 主要结果的证明

**定理 1 证明：** 设 $f\in M^{p,\theta}(\omega)$ 且 $1<p<\infty$，$\omega(x)\in A_{\frac{p}{s'}}(p>s')$，$\Omega(x')$ 属于 $L^s\left(S^{n-1}\right)(1<s<\infty)$，任取球体 $B=B(x_0,r)\subset R^n$，其中 $B(x_0,r)$ 表示以 $x_0$ 为中心，$r$ 为半径的球体，将 $f$ 分解成 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{2B}$，$f_2=f\chi_{(2B)^c}$，$\chi_{2B}$ 表示球体 $2B$ 的特征函数，则我们可得到如下分解：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|T_\Omega(f(x))\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|T_\Omega(f_1(x))\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|T_\Omega(f_2(x))\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&=I_1+I_2.
\end{aligned}$$

对 $I_1$ 而言，利用引理 1、引理 3 及 $D_k$ 条件可得

$$\begin{aligned}
I_1&\le\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|f(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le\frac{\theta(\omega(2B))^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\frac{1}{\theta(\omega(2B))^{1/p}}\left(\int_B\left|f(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le\frac{\theta(\omega(2B))^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left\|f(x)\right\|_{M^{p,\theta}(\omega)}\\
&\le C\left\|f(x)\right\|_{M^{p,\theta}(\omega)}.
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{\theta(\omega(2B))^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\le\dfrac{\omega(2B)^{k/p}}{\omega(B)^{k/p}}\le\left(\dfrac{|2B|}{|B|}\right)^{k/p}$。

接下来我们对 $I_2$ 进行估计，首先我们注意到当 $x\in B$， $y\in 2B^c$，则有 $|y|<C|x-y|$。因此我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\left|T_\Omega(f_2)(x)\right| &\le \int_{R^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n}|f_2(y)|\mathrm{d}y \le C\int_{|y|>2r}\frac{|\Omega(x-y)|}{|y|^n}|f_2(y)|\mathrm{d}y\\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)||\Omega(x-y)|\mathrm{d}y. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

其次，对于任意 $x\in B$、 $y\in 2^{j+1}B\left(j\in Z^+\right)$，我们有

$$\int_{2^{j+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\le C\left|2^jB\right|. \qquad (2)$$

下面我们设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{s}+\frac{1}{\mu}=1$，根据 Holder 不等式、$\omega(x)\in A_{\frac{p}{s'}}$ 以及(1) (2)估计我们可以得到

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)||\Omega(x-y)|\mathrm{d}y\\
&\le \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{2^{j+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{1/s}\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu}\\
&\le \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left|2^jB\right|^{1/s}\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu}\\
&\le \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left|2^jB\right|^{1/s}\left\{\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{1-\left(\frac{p}{s'}\right)'}\mathrm{d}y\right)^{p/s'-1}\right\}^{1/p}\\
&\le \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left|2^jB\right|^{1/s}\left(\frac{\left|2^{j+1}B\right|^{p/s'}}{\omega(2^{j+1}B)}\right)^{1/p}\\
&\le C\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\frac{\theta(\omega(2^{j+1}B))^{1/p}}{\omega(2^{j+1}B)^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\theta(\omega(2^{j+1}B))^{1/p}}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\
&\le C\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\delta(1-k)/p}\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}\\
&\le C\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}.
\end{aligned}
$$

综合对 $I_1$、 $I_2$ 的估计，然后对所有的球体 $B\subseteq R^n$ 取上确界可得，定理 1 证毕。

**定理 2 证明：** 设 $f\in M^{p,\theta}(\omega)$ 且 $1<p<\infty$， $\omega(x)\in A_{\frac{p}{s'}}(p>s')$， $\Omega(x')$ 属于 $L^s\left(S^{n-1}\right)(1<s<\infty)$，$b\in BMO\left(R^n\right)$，任取球体 $B=B(x_0,r)\subset R^n$，其中 $B(x_0,r)$ 表示以 $x_0$ 为中心，$r$ 为半径的球体，将 $f$ 分解成 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{2B}$， $f_2=f\chi_{(2B)^c}$， $\chi_{2B}$ 表示球体 $2B$ 的特征函数，则我们可得到如下分解：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|T_\Omega^b(f)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&\le \frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|T_\Omega^b(f_1)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B\left|T_\Omega^b(f_2)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\
&=J_1+J_2.
\end{aligned}
$$

根据文献[17]和大家熟悉的线性算子交换子判别准则，当$\omega(x)\in A_{p/s'}\,(s'<p<\infty)$时，我们可以得到$[b,T_\Omega]$在$L^p_\omega$上有界。即

$$J_1\le C\|b\|_{BMO}\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_{2B}|(f)(x)|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\le C\|b\|_{BMO}\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}.$$

接下来我们对$J_2$进行估计，根据定义，对任意$x\in B$，我们有

$$\left|T^b_\Omega(f_2)(x)\right|\le|b(x)-b_B|\left|T_\Omega(f_2)(x)\right|+\left|T_\Omega([b_B-b]f_2)(x)\right|,$$

其中$T_\Omega(f_2)(x)\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y$在定理1中已给出，然后类似于定理1的估计有

$$\left|T_\Omega([b_B-b]f_2)(x)\right|\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(y)-b_B||f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y.$$

所以对$J_2$，我们有以下分解

$$\begin{aligned}J_2\le&\frac{1}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\left(\int_B|b(x)-b_B|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y\\&+\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b_{2^{j+1}B}-b_B||f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y\\&+\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|b(y)-b_{2^{j+1}B}||f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y\\=&J_3+J_4+J_5.\end{aligned}$$

对$J_3$而言，令$\frac{1}{\mu}=1-\frac{1}{p}-\frac{1}{s}$，$\omega(x)\in A_{\frac{p}{s'}}$，利用引理1、引理2以及Holder不等式可以得到

$$\begin{aligned}J_3\le&C\|b\|_{BMO}\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y\\\le&C\|b\|_{BMO}\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{2^{j+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{1/s}\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu}\\\le&C\|b\|_{BMO}\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^jB|}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}|2^jB|^{1/s}\left(\frac{|2^{j+1}B|^{p/s'}}{\omega(2^{j+1}B)}\right)^{1/p}\\\le&C\|b\|_{BMO}\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\frac{\theta(\omega(2^{j+1}B))^{1/p}}{\omega(2^{j+1}B)^{1/p}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\theta(\omega(2^{j+1}B))^{1/p}}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\\\le&C\|b\|_{BMO}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\delta(1-k)/p}\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}\\\le&C\|b\|_{BMO}\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}.\end{aligned}$$

对 $J_4$，运用证明 $J_3$ 的方法以及引理 1、引理 2 显然可得

$$
\begin{aligned}
J_4 &\le C\|b\|_{BMO}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f(y)||\Omega|(x-y)|\mathrm{d}y \\
&\le C\|b\|_{BMO}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}\frac{\theta\left(\omega(2^{j+1}B)\right)^{1/p}}{\omega(2^{j+1}B)^{1/p}}\frac{1}{\theta\left(\omega(2^{j+1}B)\right)^{1/p}}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\
&\le C\|b\|_{BMO}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\delta(1-k)/p}\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)} \\
&\le C\|b\|_{BMO}\|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}.
\end{aligned}
$$

接下来，设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{s}+\frac{1}{\mu}=1$，根据 Holder 不等式可得

$$
\begin{aligned}
J_5 \le{}& \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}}C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|2^{j+1}B|}\left(\int_{2^{j+1}B}\left|b(y)-b_{2^{j+1}B}\right|^{\mu}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu} \\
&\times\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{2^{j+1}B}|\Omega(x-y)|^s\mathrm{d}y\right)^{1/s}.
\end{aligned}
$$

下面我们来处理 $\left(\int_{2^{j+1}B}\left|b(y)-b_{2^{j+1}B}\right|^{\mu}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu}$。

因为 $\omega\in A_{\frac{p}{s'}}$，而根据其条件，有 $\mu=\frac{s'p}{p-s'}$，所以 $\frac{\mu}{s'}=\frac{p}{p-s'}=\left(\frac{p}{s'}\right)'$。因此可得

$$
w^{1-\left(\frac{p}{s'}\right)'}=w^{1-\frac{\mu}{s'}}\in A_{\left(\frac{p}{s'}\right)'}=A_{\frac{r}{s'}}.
$$

而 $1-\left(\frac{p}{s'}\right)'=1-\frac{\mu}{s'}=1-\mu\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{p}\right)=-\frac{\mu}{p}$，所以有

$$
\omega^{-\frac{\mu}{p}}=\omega^{1-\left(\frac{p}{s'}\right)'}\in A_{\mu/s'}\subseteq A_{\mu}.
$$

令 $\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}=\phi(y)$，利用引理 2，显然有

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{2^{j+1}B}\left|b(y)-b_{2^{j+1}B}\right|^{\mu}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu} &\le\left(\int_{2^{j+1}B}\left|b(y)-b_{2^{j+1}B}\right|^{\mu}\phi(y)\mathrm{d}y\right)^{1/\mu} \\
&\le C\|b\|_{BMO}\,\phi\left(2^{j+1}B\right)^{1/\mu}
\end{aligned}.
$$

由于 $\omega\in A_{\frac{p}{s'}}$，且 $1-\left(\frac{p}{s'}\right)'=1-\frac{\mu}{s'}=1-\mu\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{p}\right)=-\frac{\mu}{p}$，再根据 $A_p$ 权函数类的定义可得

$$
\phi\left(2^{j+1}B\right)^{1/\mu}=\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{\mu}{p}}\mathrm{d}y\right)^{1/\mu}\le C\frac{\left|2^{j+1}B\right|^{1/s'}}{\omega\left(2^{j+1}B\right)^{1/p}},
$$

所以

$$J_5 \le \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}} C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|2^{j+1}B|} \|b\|_{BMO} \frac{|2^{j+1}B|}{\omega(2^{j+1}B)^{1/p}} \left(\int_{2^{j+1}B} |f(y)|^p \omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{2^{j+1}B} |\Omega(x-y)|^s \mathrm{d}y\right)^{1/s}$$

$$\le C\|b\|_{BMO} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega(B)^{1/p}}{\theta(\omega(B))^{1/p}} \frac{\theta(\omega(2^{j+1}B))^{1/p}}{\omega(2^{j+1}B)^{1/p}} \frac{1}{\theta(\omega(2^{j+1}B))^{1/p}} \left(\int_{2^{j+1}B} |f(y)|^p \omega(y)\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

$$\le C\|b\|_{BMO} \|f\|_{M^{p,\theta}(\omega)}.$$

综合 $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$ 的估计，然后和对所有的球体 $B$ 取上确界，可知定理 2 得证。

## 参考文献


[1] Calderón, A.P. and Zygmund, A. (1952) On the Existence of Certain Singular Integral. *Acta Mathematica*, **88**, 85-139. https://doi.org/10.1007/BF02392130

[2] Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. (1976) Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables. *Annals of Mathematics*, **103**, 611-635. https://doi.org/10.2307/1970954.

[3] Jason, S. (1978) Mean Oscillation and Commutators of Singular Integral Operators. *Arkiv för Matematik*, **16**, 263-270. https://doi.org/10.1007/BF02386000

[4] Muckenhoupt, B. (1972) Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function. *Transactions of the American Mathematical Society*, **165**, 207-226. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1972-0293384-6

[5] Coifman, R. and Fefferman, C. (1974) Weighted Norm Inequalities for Maximal Functions and Singular Integrals. *Studia Mathematica*, **51**, 241-250. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-241-250

[6] Ding, Y. and Lu, S. (1998) Weighted Norm Inequalities for Fractional Integral Operators with Rough Kernel. *Canadian Journal of Mathematics*, **50**, 29-39. https://doi.org/10.4153/CJM-1998-003-1

[7] Morrey, C.B. (1938) On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[8] Mizuhara, T. (1991) Boundedness of Some Classical Operators on Generalized Morrey Spaces. In: Igari, S., Ed., *ICM*-90 *Satellite Conference Proceedings*, Springer, Tokyo, 183-189. https://doi.org/10.1007/978-4-431-68168-7_16

[9] Komori, Y. and Shirai, S. (2009) Weighted Morrey Spaces and a Singular Integral Operator. *Mathematische Nachrichten*, **282**, 219-231. https://doi.org/10.1002/mana.200610733

[10] Wang, H. (2016) Boundedness of $\theta$-Zygmund Operators and Commutators in the Generalized Weighted Morrey Spaces. *Journal of Function Spaces*, **2016**, Article ID: 1309348. https://doi.org/10.1155/2016/1309348

[11] John, F. and Nirenberg, L. (1961) On Functions of Bounded Mean Oscillation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **14**, 415-426. https://doi.org/10.1002/cpa.3160140317

[12] Yu, X., Zhang, H. and Zhao, G. (2016) Weighted Boundedness of Some Integral Operators on Weighted $\lambda$-Central Morrey Space. *Applied Mathematics*: *A Journal of Chinese Universities*, **31**, 331-342. https://doi.org/10.1007/s11766-016-3348-5

[13] 王华. 几类具有粗糙核的算子在加权 Morrey 空间上的有界性[J]. 数学学报, 2012, 55(4): 589-600.

[14] García-Cuerva, J. and De Francia, J.L.R. (2011) Weighted Norm Inequalities and Related Topics. Elsevier, Amsterdam.

[15] Stein, E.M. and Murphy, T.S. (1993) Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Vol. 43, Princeton University Press, Princeton. https://doi.org/10.1515/9781400883929

[16] Lu, S., Ding, Y. and Yan, D. (2007) Singular Integrals and Related Topics. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/6428

[17] Álvarez, J., Bagby, R.J., Kurtz, D.S. and Pérez, C. (1993) Weighted Estimates for Commutators of Linear Operators. *Studia Mathematica*, **104**, 195-209. https://doi.org/10.4064/sm-104-2-195-209