**Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 764-775**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125087

Hans汉斯

# Heisenberg群上与Schrödinger算子有关的交换子的紧性

**杨　丽，代甜甜**

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2022年4月14日；录用日期：2022年5月16日；发布日期：2022年5月23日

## 摘　要

让$L$表示一个Schrödinger算子。本文研究了Heisenberg群上与$L$有关的交换子的紧性问题。通过光滑截断技术，证明了Heisenberg群上分数Schrödinger热半群生成的积分算子关于消失平均震荡型空间$CMO(\rho)(H^n)$中函数的交换子是紧算子。作为应用，讨论了与$L$有关的极大函数交换子的紧性。

## 关键词

紧性，交换子，Heisenberg群，Schrödinger算子

# Compactness of Commutators Related with Schrödinger Operators on Heisenberg Groups

**Li Yang, Tiantian Dai**

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Apr. 14th, 2022; accepted: May 16th, 2022; published: May 23rd, 2022

## Abstract

**Let $L$ denote the Schrödinger operator. In this paper, we study the result of compactness of commutators related to $L$ on Heisenberg groups. By smooth truncation technique, we show that commutators of the maximal operators generated by fractional Schrödinger heat semi groups with the function in the vanishing mean oscillation type space $CMO(\rho)(H^n)$ are compact operators. As an application, we investigate compactness of commutators of maximal functions associated with $L$.**

文章引用: 杨丽, 代甜甜. Heisenberg 群上与 Schrödinger 算子有关的交换子的紧性[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 764-775.
DOI: 10.12677/pm.2022.125087

**Keywords**

**Compactness, Commutator, Heisenberg Group, Schrödinger Operator**



## 1. 引言

若存在常数 $C>0$，使得一个非负局部 $L^q$ 可积的函数 $V$ 满足逆 Hölder 不等式

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V^q(h)\mathrm{d}h\right)^{1/q}\le\frac{C}{|B|}\int_B V(h)\mathrm{d}h.$$

则称 $V$ 属于逆 Hölder 类 $B_q, q>(2n+2)/2$。我们用符号 $\vartheta=2n+2$ 表示海森堡群的齐次维数。令 $L=-\Delta_{H^n}+V$ 是 Heisenberg 群上的一个 Schrödinger 算子，其中 $\Delta_{H^n}$ 是次 Laplace 算子，也就是 $\Delta_{H^n}:=\sum_{j=1}^{2n}\left(X_j^2\right)$。且非负势 $V\in B_q, q>\vartheta/2$。积分算子 $T$ 关于局部可积的函数 $b$ 的交换子 $[b,T]$ 被定义为 $[b,T]f=bT(f)-T(bf)$，其中 $f$ 为任意光滑函数。

在泛函分析中，一个重要的分支是紧算子理论。设 $T$ 是从一个 Banach 空间 $X$ 到另一个 Banach 空间 $Y$ 的线性算子。如果 $X$ 的任意有界子集在算子 $T$ 作用下的像是 $Y$ 中的紧子集，我们称 $T$ 为紧算子。紧算子的一个经典例子是 Sobolev 空间的紧嵌入。通过这种嵌入，可以将椭圆型边值问题转化为 Fredholm 积分方程。有关紧算子的更多信息可以参考[1]和[2]。近年来，与 Schrödinger 算子 $L$ 相关的交换子紧性的研究引起了越来越多的注意。具体地，P.T. Li 和 L.Z. Peng 在[3]中给出了与 $L$ 相关的 Riesz 变换的一些交换子的紧性问题。P.T. Li，Y. M 和 C.Y. Zhang 在[4]中建立了一个紧性准则，并应用于与 $L$ 有关的 Riesz 变换的交换子。在[5]中，Q. He 和 P. Li 讨论了与 $L$ 有关的标准 Calderón-Zygmund 算子、Riesz 变换和 Littlewood-Paley 函数等的交换子的加权紧性问题。对于更多的紧性问题和相关结果，参考文献[6]和[7]。

本文不同于[3] [4] [5]中的研究对象，主要研究了分数 Schrödinger 热半群生成的极大算子交换子的紧性。首先，定义了一族满足新的核估计与 $L$ 有关的算子 $\left\{\Phi_{t,\gamma_1,\gamma_2}^{L}\right\}_{t\ge0}$，再定义其极大算子 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}$ 及其交换子 $\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right]$，其中 $b\in CMO(\rho)(H^n)$。先讨论极大算子及其交换子的 $L^p$ 有界性，进一步地，通过光滑截断技术方法和 Frechet-Kolomogorv 定理来得到 Heisenberg 群上 $\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right]$ 的 $L^p$ 紧性。光滑截断技术方法的基本思想是给出一族截断算子并借助一些算子的核估计和一些新的极大算子的 $L^p$ 有界性来证明交换子的紧性问题。值得指出的是，我们在定理 4.1 中得到的 $\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right]$ 的 $L^p$ 紧性涵盖了很多与 $L$ 有关的极大函数。作为应用，我们选取了与分数次热半群算子核和广义的泊松算子有关的积分核 $t^m\partial_t^m K_{\alpha,t}^{L}(\cdot,\cdot)$ 和 $t^\nu\partial_t^\nu p_{t,\sigma}^{L,\alpha}(\cdot,\cdot)$，通过分数阶热核的正则性估计可以验证这些积分核满足所定义的新核估计，从而得出这两种核所对应的极大函数对于 $b\in CMO(\rho)(H^n)$ 的交换子 $\left[b,T_i^{L,*}\right], i=1,2$ 是 $L^p$ 紧算子。下面，将介绍 Heisenberg 群的一些基本性质。

$2n+1$ 维 Heisenberg 群 $H^n$ 是具有基本流形 $R^{2n}\times R^n$ 和如下乘法的 Lie 群：

$$(x,t)(y,s):=\left(x+y,t+s+2\sum_{j=1}^{n}\left(x_{n+j}y_j-x_jy_{n+j}\right)\right).$$

$H^n$ 上的左不变向量场的 Lie 代数由下式给出：

$$X_{2n+1}=\frac{\partial}{\partial_t},X_j=\frac{\partial}{\partial_{x_j}}+2x_{n+j}\frac{\partial}{\partial_t},X_{n+j}=\frac{\partial}{\partial_{x_{n+j}}}+2x_j\frac{\partial}{\partial_t},j=1,2,\cdots,n.$$

$H^n$ 上的梯度定义为 $\nabla_{H^n}:=(X_1,\cdots,X_{2n})$。其左不变距离为：$d(h,g):=|h^{-1}g|$。以 $g$ 为中心，半径 $r$ 的球表示为 $B(g,r)=\{h:|h^{-1}g|<r\}$。该球的体积为：$|B(g,r)|=c_nr^n$，其中 $c_n$ 表示 $H^n$ 上单位球的体积。

本文内容如下：第 2 节叙述了一些与 $L$ 有关的核估计。第 3 节给出了与 $L$ 有关的极大函数 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}$ 及其交换子 $[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}]$ 的有界性的证明，这对后续的紧性证明非常重要。作为本文的主要结果，在第 4 节中通过光滑截断技术建立了 $H^n$ 上 $[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}]$ 的 $L^p$ 紧性，其中 $b\in CMO(\rho)(H^n)$。作为应用，进一步得出 $T_i^{L,*},i=1,2$，对于 $b\in CMO(\rho)(H^n)$ 的极大交换子是 $L^p$ 紧算子。

## 2. 一些核估计

Z.W. Shen 在[8]中首次引入了辅助函数 $\rho(\cdot)$。$H^n$ 上的辅助函数 $\rho(\cdot)$ 可以类似地如下定义。

**定义 2.1** 函数 $\rho(\cdot)$ 被定义为 $\rho(g):=\sup_{r>0}\left\{r:r^{-(\vartheta-2)}\int_{B(g,r)}V(h)\mathrm{d}h\le 1\right\},g\in H^n$。

**引理 2.2** [9]假设 $V\in B_q$，其中 $q>\vartheta/2$，则存在常数 $k_0>0$，$C_0>1$ 和 $C>0$ 使得

$$\frac{\rho(g)}{C_0}\left(1+|g^{-1}h|/\rho(g)\right)^{-k_0}\le\rho(h)\le C_0\rho(g)\left(1+|g^{-1}h|/\rho(g)\right)^{k_0/(k_0+1)}. \tag{1}$$

特别地，当 $|g^{-1}h|\le C\rho(g)$ 时，有 $\rho(g)\sim\rho(h)$ 成立。

本文中，定义 $\Psi_\theta(B)=(1+r/\rho(g))^\theta$，其中 $B=B(g,r)$ 是中心为 $g$，半径为 $r$ 的一个球，且 $\theta>0$。特别地，对于给定的 $\theta>0$，用符号 $\Psi(B)$ 来代替 $\Psi_\theta(B)$。下面分别给出空间 $BMO(\rho)(H^n)$ 和 $CMO(\rho)(H^n)$ 的定义。

**定义 2.3** 1) 对 $\theta>0$，$BMO(\rho)(H^n)$ 空间被定义为满足下列条件的局部可积函数 $f$ 的集合。对所有的 $g\in H^n$ 和 $r>0$，有 $\frac{1}{|B|}\int_B|f(h)-f_B|\mathrm{d}h\le C\Psi_\theta(B)$，其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B|f(h)|\mathrm{d}h$。

$BMO(\rho)(H^n)$ 空间中函数的范数被定义为 $\|f\|_{BMO(\rho)}:=\sup_{B\subset H^n}\frac{1}{\Psi_\theta(B)|B|}\int_B|f(g)-f_B|\mathrm{d}g<\infty$。

2) $CMO(\rho)(H^n)$ 表示为 $C_c^\infty$ 在 $BMO(\rho)(H^n)$ 的拓扑空间中的闭包，其中 $C_c^\infty$ 是 $H^n$ 上具有紧支撑的无穷次可微函数的集合。

特殊的极大算子 $M_{V,\eta}\,(0<p<\infty)$ 被定义为 $M_{V,\eta}f(g):=\sup_{g\in B}\frac{1}{\Psi_\theta(B)^\eta|B|}\int_B|f(h)|\mathrm{d}h$。

因为 $M_{V,\eta}f$ 比经典的 Hardy-Littlewood 极大函数要小，所以下面的结论是显然成立的。

**引理 2.4** 让 $1<p<\infty$ 而且 $p'=p/(p+1)$，则存在一个常数 $C>0$ 使得 $\|M_{V,p'}f\|_{L^p(H^n)}\le C\|f\|_{L^p(H^n)}$。

$M_{V,\eta}$ 的交换子被定义为 $[b,M_{V,\eta}](f)(g):=\sup_{g\in B}\frac{1}{\Psi_\theta(B)^\eta|B|}\int_B|b(g)-b(h)||f(h)|\mathrm{d}h$。

让 $p_{t,\sigma}^{L,\alpha}$ 表示与 $L$ 相关广义的泊松算子，即 $p_{t,\sigma}^{L,\alpha}(g,h):=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r}K_{\alpha,t^{2\alpha}/(4r)}^L(g,h)\frac{\mathrm{d}r}{r^{1-\sigma}},0<\sigma<1$。

与 $L$ 有关的分数次热半群表示为 $\left\{\mathrm{e}^{-tL^\alpha}\right\}_{t\ge0},\alpha\in(0,1)$。通过从属公式(参考[10])，其分式热核 $K_{\alpha,t}^L(\cdot,\cdot)$ 为 $K_{\alpha,t}^L(g,h)=\int_0^\infty\eta_t^\alpha(s)K_s^L(g,h)\mathrm{d}s$，其中 $K_s^L(\cdot,\cdot)$ 是热半群 $\left\{\mathrm{e}^{-sL}\right\}_{s\ge0}$ 的积分核，$\eta_t^\alpha(\cdot)$ 是 $(0,\infty)$ 上的连续函数，

DOI: 10.12677/pm.2022.125087

且满足

$$\begin{cases}\eta_t^\alpha(s)=t^{-1/\alpha}\eta_1^\alpha\left(s/t^{1/\alpha}\right);\\ \eta_t^\alpha(s)\le Ct/\left(s^{1+\alpha}\right)\quad \forall s,t>0;\\ \int_0^\infty s^{-\gamma}\eta_t^\alpha(s)\mathrm{d}s<\infty,\ \gamma>0;\\ \eta_t^\alpha(s)\simeq t/\left(s^{1+\alpha}\right)\quad \forall s\ge t^{1/\alpha}>0.\end{cases}$$

**定义 2.5** 算子 $T_{i,t}^L$ 被定义为 $T_{i,t}^L(f)(g):=\int_{H^n}K_i^L(g,h)f(h)\mathrm{d}h, i=1,2$，其中

$$\begin{cases}K_1^L(g,h):=t^m\partial_t^m K_{\alpha,t}^L(g,h), m>0;\\ K_2^L(g,h):=t^\nu\partial_t^\nu p_{t,\sigma}^{L,\alpha}(g,h), \nu>0.\end{cases}$$

$T_{i,t}^L$ 的极大算子 $T_i^{L,*}$ 被定义为 $T_i^{L,*}(f)(g):=\sup\limits_{t>0}\left|T_{i,t}^L(f)(g)\right|, i=1,2$。

$T_i^{L,*}$ 关于 $b\in BMO(\rho)(H^n)$ 的交换子被定义为

$$\left[b,T_i^{L,*}\right](f)(g):=\sup_{t>0}\left|\int_{H^n}K_i^L(g,h)\big(b(g)-b(h)\big)f(h)\mathrm{d}h\right|, i=1,2.$$

**定义 2.6** 假设 $\gamma_1>0$ 且 $\gamma_2\in(0,2)$。让 $\left\{\Phi_{t,\gamma_1,\gamma_2}^L\right\}_{t\ge0}$ 是与 $L$ 相关的积分核为 $K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(\cdot,\cdot)$ 的一族算子。即：$\Phi_{t,\gamma_1,\gamma_2}^L(f)(g):=\int_{H^n}K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)f(h)\mathrm{d}h$，其中 $K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(\cdot,\cdot)$ 满足下面两个条件：

1) 对任意的 $N>0$，存在一个常数 $C_N>0$ 使得

$$\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\le\frac{C_N t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+\left|g^{-1}h\right|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(h)}\right)^{-N}. \tag{2}$$

2) 对任意的 $N>0$，存在一个常数 $C_N>0$ 使得对每个 $0<\delta<\min\{\gamma_2,1-Q/q\}$ 和所有 $|u|\le t^{1/\gamma_2}$ 有

$$\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(gu,h)-K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\le\frac{C_N t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+\left|g^{-1}h\right|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\delta}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(h)}\right)^{-N}. \tag{3}$$

$\Phi_{t,\gamma_1,\gamma_2}^L$ 的极大算子 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}$ 被定义为 $\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}(f)(g):=\sup\limits_{t>0}\left|\Phi_{t,\gamma_1,\gamma_2}^L(f)(g)\right|$。

$\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}$ 关于 $b\in BMO(\rho)(H^n)$ 的交换子被定义为

$$\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right](f)(g):=\sup_{t>0}\left|\int_{H^n}K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\big(b(g)-b(h)\big)f(h)\mathrm{d}h\right|.$$

**引理 2.7** [11]让 $\alpha\in(0,1)$， $m>0$ 且 $V\in B_q, q>\vartheta/2$。

1) 对任意的 $N>0$，存在一个常数 $C_N>0$ 使得

$$\left|t^m\partial_t^m K_{\alpha,t}^L(g,h)\right|\le\frac{C_N t^m}{\left(t^{1/(2\alpha)}+\left|g^{-1}h\right|\right)^{\vartheta+2\alpha m}}\left(1+\frac{t^{1/(2\alpha)}}{\rho(g)}+\frac{t^{1/(2\alpha)}}{\rho(h)}\right)^{-N}.$$

2) 让 $0<\delta\le\min\{2\alpha,\delta_0\}$。对每个 $N>0$，这存在一个常数 $C_N>0$ 使得对所有的 $|u|\le t^{1/(2\alpha)}$，

$$\left|t^m\partial_t^m K_{\alpha,t}^L(gu,h)-t^m\partial_t^m K_{\alpha,t}^L(g,h)\right|\le\frac{C_N t^m}{\left(t^{1/(2\alpha)}+\left|g^{-1}h\right|\right)^{\vartheta+2\alpha m}}\left(\frac{|u|}{t^{1/(2\alpha)}}\right)^{\delta}\left(1+\frac{t^{1/(2\alpha)}}{\rho(g)}+\frac{t^{1/(2\alpha)}}{\rho(h)}\right)^{-N}.$$

**引理 2.8** [12]让一列紧算子序列$\{T_n\}$一致拓扑收敛到一个算子 $T$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$。则 $T$ 也是紧算子。

**引理 2.9** [12]假设$0<p<\infty$且$\mathbb{F}$是$L^p\left(H^n\right)$中的一个子集。若下面(1)~(3)成立，则$\mathbb{F}$在$L^p\left(H^n\right)$中是列紧的。

1) $\mathbb{F}$是有界的，即$\sup\limits_{f\in\mathbb{F}}\|f\|_{L^p\left(H^n\right)}<\infty$；

2) $\mathbb{F}$在无穷远处一致收敛到 0，即$\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{f\in\mathbb{F}}\int_{|g|>N}|f(g)|^p\,\mathrm{d}g=0$；

3) $\mathbb{F}$是一致等连续的，即$\lim\limits_{|u|\to\infty}\sup\limits_{f\in\mathbb{F}}\int_{H^n}|f(gu)-f(g)|^p\,\mathrm{d}g=0$。

## 3. 与 $L$ 相关的极大函数及其交换子的有界性

**定理 3.1** 令$1<p<\infty$且$\gamma_1\gamma_2>\theta\eta$。则存在一个常数 $C$ 使得$\left\|\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}(f)\right\|_{L^p\left(H^n\right)}\le C\|f\|_{L^p\left(H^n\right)}$。

**证明**首先，把$\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}(f)$划分成两部分：$\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}(f)(g)\le\sup\limits_{t>0}\left\{\int_{H^n}\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le I(g)+II(g)$，其中

$$\begin{cases}I(g):=\sup\limits_{t>0}\left\{\int_{\left|g^{-1}h\right|<\rho(g)}\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\};\\ II(g):=\sup\limits_{t>0}\left\{\int_{\left|g^{-1}h\right|\ge\rho(g)}\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}.\end{cases}$$

对于$I(g)$，有$I(g)\le I_1(g)+I_2(g)+I_3(g)$，其中

$$\begin{cases}I_1(g):=\sup\limits_{\rho(g)>t^{1/\gamma_2}>0}\left\{\int_{\left|g^{-1}h\right|<t^{1/\gamma_2}}\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\};\\ I_2(g):=\sup\limits_{\rho(g)>t^{1/\gamma_2}>0}\left\{\int_{t^{1/\gamma_2}\le\left|g^{-1}h\right|<\rho(g)}\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\};\\ I_3(g):=\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}\ge\rho(g)}\left\{\int_{\left|g^{-1}h\right|<\rho(g)}\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}.\end{cases}$$

通过(2)，对于$I_1(g)$，有$I_1(g)\le C\sup\limits_{\rho(g)>t^{1/\gamma_2}>0}\left\{\int_{\left|g^{-1}h\right|<t^{1/\gamma_2}}\frac{t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}(f)(g)$。

对于$I_2(g)$，注意到$\gamma_1\gamma_2>\theta\eta$，则有

$$I_2(g)\le C\sup_{\rho(g)>t^{1/\gamma_2}>0}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{\gamma_1}}{\left(2^jt^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\int_{\left|g^{-1}h\right|\sim 2^jt^{1/\gamma_2}}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}(f)(g).$$

对于$I_3(g)$，则有

$$I_3(g)\le\sup_{\rho(g)\le t^{1/\gamma_2}}\left\{\int_{\left|g^{-1}h\right|<\rho(g)}\frac{Ct^{\gamma_1}|f(h)|}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\mathrm{d}h\right\}\le\sup_{\rho(g)\le t^{1/\gamma_2}}\left\{\frac{C}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta}}\int_{\left|g^{-1}h\right|<\rho(g)}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}(f)(g).$$

对于$II(g)$，再次通过(2)，取足够大的 $N$，则有

$$
\begin{aligned}
II(g) &\le C\sup_{t>0}\left\{\int_{|g^{-1}h|\ge\rho(g)}\frac{t^{\gamma_1}}{|g^{-1}h|^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\\
&\le C\sup_{t>0}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(t^{\gamma_2})^{\gamma_1\gamma_2}\left(1+t^{\gamma_2}/\rho(g)\right)^{-N}}{(2^j)^{\gamma_1\gamma_2}(\rho(g))^{\gamma_1\gamma_2}(2^j\rho(g))^{\vartheta}}\int_{|g^{-1}h|\sim 2^j\rho(g)}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\\
&\le CM_{V,\eta}(f)(g).
\end{aligned}
$$

由引理 2.4，其中 $p'\le\eta<\infty$，$I(g)$ 和 $II(g)$ 的估计表明了

$$
\left\|\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}(f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\left\|M_{V,\eta}(f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\|f\|_{L^p(H^n)}.
$$

**定理 3.2** 令 $1<p<\infty$ 且 $\gamma_1\gamma_2>\theta\eta$。对 $b\in CMO(\rho)(H^n)$，存在一个常数 $C$ 使得

$$
\left\|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right](f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\|b\|_{BMO(\rho)}\|f\|_{L^p(H^n)}.
$$

**证明**重复定理 3.1 的证明过程，能得到 $\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right](f)\right|\le C\left[b,M_{V,\eta}\right](f)(g)$。然后通过类似于[13]中定理 1.1 的证明，得出定理 3.2 成立。

## 4. 热半群极大函数的交换子的紧性

**定理 4.1** 让 $1<p<\infty$，$\gamma_1\gamma_2>(1+k_0)\theta\eta$ 且 $b\in CMO(\rho)(H^n)$，则交换子 $\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right]$ 是 $L^p(H^n)$ 上的紧算子。

**证明**我们将用光滑截断技术来证明该定理。取函数 $\phi\in C^\infty([0,\infty])$ 且满足 $0\le\phi\le1$ 且对于 $0\le g\le1$ 有 $\phi(g)=1$；对于 $g\ge2$ 有 $\phi(g)=0$。对任意的 $\gamma>0$，定义 $K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h):=K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\left(1-\phi\left(\gamma^{-1}|g^{-1}h|\right)\right)$。令

$$
\begin{cases}
\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}(g,h):=\sup\limits_{t>0}\left\{\left|\int_{H^n}K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)f(h)\mathrm{d}h\right|\right\};\\
\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](g,h):=\sup\limits_{t>0}\left\{\left|\int_{H^n}K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\left(b(g)-b(h)\right)f(h)\mathrm{d}h\right|\right\}.
\end{cases}
\tag{4}
$$

对所有的 $b\in C_c^\infty(H^n)$，$N=\theta\eta$ 和 $\gamma,\eta,\theta>0$，结合(2)和(4)，则有

$$
\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right]f(g)-\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right]f(g)\right|\le C_N\left\{L_1(g)+L_2(g)\right\},
$$

其中

$$
\begin{cases}
L_1(g):=\sup\limits_{t>0}\left\{\int_{|g^{-1}h|<2\gamma}\frac{t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|g^{-1}h||f(h)|\left|\phi\left(\gamma^{-1}|g^{-1}h|\right)\right|\mathrm{d}h\right\};\\
L_2(g):=\sup\limits_{t>0}\left\{\int_{|g^{-1}h|\ge2\gamma}\frac{t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|g^{-1}h||f(h)|\left|\phi\left(\gamma^{-1}|g^{-1}h|\right)\right|\mathrm{d}h\right\}.
\end{cases}
$$

对 $L_2(g)$ 来说，因为 $|g^{-1}h|\ge2\gamma$，所以 $\phi\left(\gamma^{-1}|g^{-1}h|\right)=0$。故而有

$$
\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2}^{L,*}\right]f(g)-\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right]f(g)\right|\le C\gamma\left\{J_1(g)+J_2(g)+J_3(g)\right\},
$$

其中

$$\begin{cases} J_1(g) := \sup\limits_{t^{1/\gamma_2}<2\gamma}\left\{\int_{|g^{-1}h|<t^{1/\gamma_2}} \dfrac{t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\dfrac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}; \\ J_2(g) := \sup\limits_{t^{1/\gamma_2}<2\gamma}\left\{\int_{t^{1/\gamma_2}\le|g^{-1}h|<2\gamma} \dfrac{t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\dfrac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}; \\ J_3(g) := \sup\limits_{t^{1/\gamma_2}\ge2\gamma}\left\{\int_{|g^{-1}h|<2\gamma} \dfrac{t^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\dfrac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}. \end{cases}$$

对于 $J_1(g)$，有 $J_1(g)\le C\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}<2\gamma}\left\{\dfrac{1}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta}}\left(1+\dfrac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\int_{|g^{-1}h|<t^{1/\gamma_2}}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}f(g)$。

对于 $J_2(g)$，有 $J_2(g)\le C\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}<2\gamma}\left\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{t^{\gamma_1}}{\left(2^j t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\dfrac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\int_{|g^{-1}h|\sim 2^j t^{1/\gamma_2}}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}f(g)$。

对于 $J_3(g)$，有 $J_3(g)\le C\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}\ge2\gamma}\left\{\dfrac{1}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta}}\left(1+\dfrac{2\gamma}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\int_{|g^{-1}h|<2\gamma}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}f(g)$。

通过对 $J_1(g)$， $J_2(g)$ 和 $J_3(g)$ 的估计，有 $\left|\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right]f(g)-\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right]f(g)\right|\le CM_{V,\eta}(f)(g)$ 成立。由引理 2.4，其中 $p'\le\eta<\infty$，我们能得到

$$\left\|\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right](f)-\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right](f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\gamma\left\|M_{V,\eta}(f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\gamma\|f\|_{L^p(H^n)},$$

这表明

$$\lim_{\gamma\to0}\left\|\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right](f)-\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right](f)\right\|_{L^p(H^n)}=0. \tag{5}$$

另一方面，若 $b\in CMO(\rho)(H^n)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $b_\varepsilon\in C_c^\infty(H^n)$ 使得 $\|b-b_\varepsilon\|_{BMO(\rho)}<\varepsilon$。通过定理 3.2，有 $\left\|\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right](f)-\left[b_\varepsilon,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right](f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\|b-b_\varepsilon\|_{BMO(\rho)}\left\|\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}(f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\varepsilon$。因此，为了证明对任意的 $b\in CMO(\rho)(H^n)$，有 $\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right]$ 是 $L^p(H^n)$ 上的紧算子，只需证对所有的 $b\in C_c^\infty(H^n)$，有 $\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right]$ 是 $L^p(H^n)$ 上的紧算子。通过(5)和引理 2.9，只需证当 $\gamma>0$ 充分小时，对所有的 $b\in C_c^\infty(H^n)$，有 $\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right]$ 是紧的。为了这个目的，对 $L^p(H^n)$ 中的任意有界集 $F$，取 $\mathbb{F}=\left\{\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2}\right](f): f\in F\right\}$。接下来，只需证对 $b\in C_c^\infty(H^n)$， $\mathbb{F}$ 满足引理 2.10 的(1)~(3)。

先证 $\mathbb{F}$ 满足(1)。根据 $K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t,\gamma}$ 的定义，有 $0<\left|K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t,\gamma}(g,h)\right|\le\left|K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t}(g,h)\right|$。因此，

$$\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}(f)(g)\le C\sup_{t>0}\left\{\sum_{j=j_0}^{\infty}\int_{|g^{-1}h|\sim2^j t^{1/\gamma_2}}\frac{t^{\gamma_1}}{|g^{-1}h|^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le CM_{V,\eta}(f)(g), \tag{6}$$

其中整数 $j_0$ 满足 $2^{j_0}t^{1/\gamma_2}\le\gamma\le2^{j_0+1}t^{1/\gamma_2}$。通过这种方式，可以得到
$\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right](f)(g)\le C\left[b,M_{V,\eta}\right](f)(g)$。

从定理 3.1 和 3.2，可以推出 $\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}$ 和 $\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right]$ 在 $L^p(H^n)$ 上是有界的。故有

$\sup_{f\in F}\left\|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)\right\|_{L^p(H^n)} \le C\sup_{f\in F}\|f\|_{L^p(H^n)} \le C_F$。这表明集合 $\mathbb{F}$ 是有界的。

再证 $\mathbb{F}$ 满足(2)。假设 $b\in C_c^\infty(H^n)$ 且 $b$ 的支集属于 $B(0,R)$，其中 $B(0,R)$ 是一个半径为 $R$，中心为原点的一个球。对任意 $|g|>A>2R$，$1<p<\infty$ 和 $f\in F$，应用(2)，能得到

$$\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(g)\right| \le C\|b\|_{L^\infty(H^n)}\sup_{t>0}\left\{\int_{|h|<R}\frac{t^{\gamma_1}|f(h)|\mathrm{d}h}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\gamma_1\gamma_2}\left|g^{-1}h\right|^{\vartheta}}\right\} \le C|g|^{-\vartheta}\int_{|h|<R}|f(h)|\mathrm{d}h \le C\big/|g|^{\vartheta},$$

其中 $1/p'+1/p=1$。因此，$\int_{|g|>A}\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(g)\right|^p\mathrm{d}g \le C\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^jA<|g|\le 2^{j+1}A}\left(2^jA\right)^{-\vartheta p}\mathrm{d}g \le C\big/|A|^{\vartheta(p-1)}$。从而有 $\lim_{A\to\infty}\int_{|g|>A}\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(g)\right|^p\mathrm{d}g=0$。

最后证 $\mathbb{F}$ 满足(3)。仅需验证对任意的 $\varepsilon>0$，若 $|u|$ 是充分小的且仅取决于 $\varepsilon$，对任意的 $f\in F$ 有

$$\lim_{|u|\to 0}\left\|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(\cdot u)-\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(\cdot)\right\|_{L^p(H^n)}=C\varepsilon \tag{7}$$

成立。下面我们取 $\gamma\in(0,1)$ 和 $|u|\le\gamma/4$，则有 $\left|\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(gu)-\left[b,\Phi_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}^{L,*}\right](f)(g)\right|\le I(g)+II(g)$，

其中 $\begin{cases} I(g):=\sup_{t>0}\left\{\int_{H^n}\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)-K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\left|b(gu)-b(h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}; \\ II(g):=\sup_{t>0}\left\{\int_{H^n}\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\left|b(gu)-b(g)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}. \end{cases}$

事实上，

$$\begin{aligned}&\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)\left(b(gu)-b(h)\right)f(h)-K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\left(b(g)-b(h)\right)f(h)\right|\\ &\le\left|\left(K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)-K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right)\left(b(gu)-b(h)\right)f(h)\right|+\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\left(b(gu)-b(g)\right)f(h)\right|.\end{aligned}$$

先考虑 $II(g)$，通过(6)，能得到 $II(g)\le\|b\|_{L^\infty(H^n)}|u|\sup_{t>0}\left\{\int_{H^n}\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}\le C|u|M_{V,\eta}(f)(g)$。

通过引理 2.4，其中 $p'\le\eta<\infty$，有 $\|II\|_{L^p(H^n)}\le C|u|\left\|M_{V,\eta}(f)\right\|_{L^p(H^n)}\le C|u|\|f\|_{L^p(H^n)}$。

接下来，对 $I(g)$，有 $I(g)\le I_1(g)+I_2(g)$，其中

$$\begin{cases} I_1(g):=\sup_{t^{1/\gamma_2}\ge|u|}\left\{\int_{H^n}\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)-K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\left|b(gu)-b(h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}; \\ I_2(g):=\sup_{t^{1/\gamma_2}<|u|}\left\{\int_{H^n}\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)-K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\left|b(gu)-b(h)\right||f(h)|\mathrm{d}h\right\}. \end{cases}$$

对于 $I_1(g)$，若 $t^{1/\gamma_2}\ge|u|$，注意到 $\gamma\in(0,1)$ 和 $|u|\le\gamma/4$，通过(2)和(3)，则有

$$\begin{aligned}&\left|K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)-K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\\ &\le\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)-K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(gu,h)\right|\left|1+\varphi\left(\gamma^{-1}\left|(gu)^{-1}h\right|\right)\right|+\left|K_{\gamma_2,t}^{L,\gamma_1}(g,h)\right|\left|\varphi\left(\gamma^{-1}\left|g^{-1}h\right|\right)-\varphi\left(\gamma^{-1}\left|(gu)^{-1}h\right|\right)\right|\\ &\le\frac{C_Nt^{\gamma_1}}{\left(t^{1/\gamma_2}+\left|g^{-1}h\right|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\delta}+\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)\right)\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(h)}\right)^{-N},\end{aligned}$$

其中 $\left|\varphi\left(\gamma^{-1}\left|g^{-1}h\right|\right)-\varphi\left(\gamma^{-1}\left|(gu)^{-1}h\right|\right)\right|\le C|u|/\gamma$。因此，$|I_1(g)|\le C\left\{I_{1,1}(g)+I_{1,2}(g)+I_{1,3}(g)+I_{1,4}(g)\right\}$，

其中

$$
\begin{cases}
I_{1,1}(g):=\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}\geq 1}\left\{\int_{|g^{-1}h|<t^{1/\gamma_2}}\left(\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\delta}+\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)\frac{t^{\gamma_1}|b(gu)-b(h)||f(h)|}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}\mathrm{d}h\right\}; \\
I_{1,2}(g):=\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}\geq 1}\left\{\int_{|g^{-1}h|\geq t^{1/\gamma_2}}\left(\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\delta}+\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)\frac{t^{\gamma_1}|b(gu)-b(h)||f(h)|}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}\mathrm{d}h\right\}; \\
I_{1,3}(g):=\sup\limits_{|u|\leq t^{1/\gamma_2}<1}\left\{\int_{|g^{-1}h|<t^{1/\gamma_2}}\left(\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\delta}+\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)\frac{t^{\gamma_1}|b(gu)-b(h)||f(h)|}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}\mathrm{d}h\right\}; \\
I_{1,4}(g):=\sup\limits_{|u|\leq t^{1/\gamma_2}<1}\left\{\int_{|g^{-1}h|\geq t^{1/\gamma_2}}\left(\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\delta}+\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)\frac{t^{\gamma_1}|b(gu)-b(h)||f(h)|}{\left(t^{1/\gamma_2}+|g^{-1}h|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}\mathrm{d}h\right\}.
\end{cases}
$$

若 $t^{1/\gamma_2}\geq 1$，有 $\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{-\delta}\leq 1$。对 $I_{1,1}(g)$，选取 $N=\theta\eta$，则有

$$I_{1,1}(g)\leq 2\|b\|_{L^{\infty}(H^n)}\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}\geq 1}\left\{\frac{\left(|u|^{\delta}+|u|\right)}{\gamma\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta}}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\int_{|g^{-1}h|<t^{1/\gamma_2}}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\leq C\gamma^{-1}\left(|u|^{\delta}+|u|\right)M_{V,\eta}(f)(g).$$

注意到 $\gamma_1\gamma_2-\theta\eta>1>0$，类似于 $I_{1,1}(g)$ 能得到 $I_{1,2}(g)\leq C\gamma^{-1}\left(|u|^{\delta}+|u|\right)M_{V,\eta}(f)(g)$。

若 $t^{1/\gamma_2}<1$，有 $\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{-\delta}\leq\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{-(1-\vartheta/q)}\leq t^{-1/\gamma_2}$。对 $I_{1,3}(g)$，选取 $N=\theta\eta$，若 $|u|\leq t^{1/\gamma_2}$，$|g^{-1}h|\leq t^{1/\gamma_2}$ 且 $b\in C_c^{\infty}(H^n)$，则有 $|b(gu)-b(h)|\leq C\left\{|g^{-1}h|+|u|\right\}\leq Ct^{1/\gamma_2}$。由 $\gamma\in(0,1)$ 能得到

$$I_{1,3}(g)\leq C\sup\limits_{|u|\leq t^{1/\gamma_2}<1}\left\{\left(|u|^{\delta}+\frac{|u|t^{1/\gamma_2}}{\gamma}\right)\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\frac{1}{\left(t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta}}\int_{|g^{-1}h|<t^{1/\gamma_2}}|f(h)|\mathrm{d}h\right\}\leq C\gamma^{-1}\left(|u|^{\delta}+|u|\right)M_{V,\eta}(f)(g).$$

对 $I_{1,4}(g)$，由于 $b\in C_c^{\infty}(H^n)$，若 $|g^{-1}h|\sim 2^j t^{1/\gamma_2},j=1,2,\cdots$ 且 $|u|\leq t^{1/\gamma_2}$，则有 $|b(gu)-b(h)|\leq C\left\{|g^{-1}h|+|u|\right\}\leq C2^j t^{1/\gamma_2}$。故而有

$$
\begin{aligned}
I_{1,4}(g)&\leq C\sup\limits_{|u|\leq t^{1/\gamma_2}<1}\left\{\left(|u|^{\delta}+\frac{|u|t^{1/\gamma_2}}{\gamma}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\int_{|g^{-1}h|\sim 2^j t^{1/\gamma_2}}\frac{t^{\gamma_1}2^j|f(h)|}{\left(2^j t^{1/\gamma_2}\right)^{\gamma_1\gamma_2}\left(2^j t^{1/\gamma_2}\right)^{\vartheta}}\mathrm{d}h\right\}\\
&\leq C\gamma^{-1}\left(|u|^{\delta}+|u|\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2^j\right)^{\gamma_1\gamma_2-1-\theta\eta}}M_{V,\eta}(f)(g)\\
&\leq C\gamma^{-1}\left(|u|^{\delta}+|u|\right)M_{V,\eta}(f)(g),
\end{aligned}
$$

其中 $\gamma_1\gamma_2-(\theta\eta+1)>0$。这些 $I_{1,i}(\cdot),i=1,2,3,4$ 的估计表明 $I_1(g)\leq C\gamma^{-1}\left(|u|^{\delta}+|u|\right)M_{V,\eta}(f)(g)$。

最后，估计 $I_2(g)$。若 $|g^{-1}h|<\gamma/2$ 和 $|u|<\gamma/4$，有 $\left|(gu)^{-1}h\right|<3\gamma/4$。因此 $\varphi\left(\gamma^{-1}\left|(gu)^{-1}h\right|\right)=\varphi\left(\gamma^{-1}|g^{-1}h|\right)=1$。这表明 $K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(gu,h)=K_{\gamma_2,t,\gamma}^{L,\gamma_1}(g,h)=0$，进而有 $I_2(g)=0$。故只需考虑 $|g^{-1}h|\geq\gamma/2$。

此时，有 $I_2(g)\le I_{2,1}(g)+I_{2,2}(g)$，其中

$$\begin{cases} I_{2,1}(g):=\sup\limits_{t^{1/\gamma_2}<|u|<\rho(g)}\left\{\int_{|g^{-1}h|\ge\gamma/2}\left|K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t,\gamma}(gu,h)-K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t,\gamma}(g,h)\right|\left|b(gu)-b(h)\right|\left|f(h)\right|\mathrm{d}h\right\}; \\ I_{2,2}(g):=\sup\limits_{\substack{t^{1/\gamma_2}<|u| \\ \rho(g)\le|u|}}\left\{\int_{|g^{-1}h|<\gamma/2}\left|K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t,\gamma}(gu,h)-K^{L,\gamma_1}_{\gamma_2,t,\gamma}(g,h)\right|\left|b(gu)-b(h)\right|\left|f(h)\right|\mathrm{d}h\right\}. \end{cases}$$

对 $I_{2,1}(g)$，由 $|g^{-1}h|>2|u|$，知 $\left|(gu)^{-1}h\right|\sim|g^{-1}h|$。由 $t^{1/\gamma_2}<\rho(g)$ 推出 $\rho(g)\sim\rho(gu)$，$|u|/\rho(g)<1$ 和 $|u|/t^{1/\gamma_2}>1$。进而有 $|u|/t^{1/\gamma_2}<\left(|u|/t^{1/\gamma_2}\right)^{\gamma_1\gamma_2}$。可得

$$\begin{aligned} I_{2,1}(g)&\le C\sup_{t^{1/\gamma_2}<|u|<\rho(g)}\left\{\int_{|g^{-1}h|\ge2|u|}\frac{t^{\gamma_1}}{|g^{-1}h|^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2-1}}\left(\frac{|u|}{t^{1/\gamma_2}}\right)^{\gamma_1\gamma_2}|f(h)|\mathrm{d}h\right\} \\ &\le C\sup_{t^{1/\gamma_2}<|u|<\rho(g)}\left\{\sum_{j=2}^{\infty}\int_{|g^{-1}h|\sim2^j|u|}\frac{|u|^{\gamma_1\gamma_2}}{\left(2^j|u|\right)^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2-1}}\left(1+\frac{2^j|u|}{\rho(g)}\right)^{\theta\eta}\left(1+\frac{2^j|u|}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}|f(h)|\mathrm{d}h\right\} \\ &\le C\sum_{j=2}^{\infty}\frac{|u|}{\left(2^j\right)^{\gamma_1\gamma_2-1-\theta\eta}}M_{V,\eta}(f)(g)\le C|u|M_{V,\eta}(f)(g), \end{aligned}$$

其中 $\gamma_1\gamma_2>\theta\eta+1>0$。接下来，只剩估计 $I_{2,2}(g)$。由 $b\in C_c^{\infty}(H^n)$ 和 $|g^{-1}h|\ge\gamma/2>2|u|$，有 $|b(gu)-b(h)|\le C|g^{-1}h|$ 和 $\left|(gu)^{-1}h\right|\sim|g^{-1}h|$。另外，若 $|g^{-1}h|<2^l\rho(g),l=1,2,\cdots$，通过(1)，有 $\rho(g)\le C\left(1+|g^{-1}h|/\rho(g)\right)^{k_0/(k_0+1)}\rho(g)\le C2^{k_0l/(k_0+1)}\rho(g)$。从而有

$$\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(gu)}+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(h)}\right)^{-N}+\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(h)}\right)^{-N}\le2\left(1+\frac{t^{1/\gamma_2}}{\rho(h)}\right)^{-N}\le C\left(1+\frac{2^{-k_0l/(k_0+1)}t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}.$$

取 $N=\gamma_1\gamma_2-1$ 并应用(2)，则有

$$\begin{aligned} I_{2,2}(g)&\le C\sup_{\substack{t^{1/\gamma_2}<|u| \\ \rho(g)\le|u|}}\left\{\int_{|g^{-1}h|\ge2\rho(g)}\frac{t^{\gamma_1}|u|/t^{1/\gamma_2}}{|g^{-1}h|^{\vartheta+\gamma_1\gamma_2-1}}\left(1+\frac{2^{-k_0l/(k_0+1)}t^{1/\gamma_2}}{\rho(g)}\right)^{-N}|f(h)|\mathrm{d}h\right\} \\ &\le C\sup_{\substack{t^{1/\gamma_2}<|u| \\ \rho(g)\le|u|}}\left\{\sum_{l=2}^{\infty}\frac{|u|\left(2^{-k_0l/(k_0+1)}\right)^{1-\gamma_1\gamma_2}}{\left(2^l\right)^{\gamma_1\gamma_2-1-\theta\eta}\left(2^l\rho(g)\right)^{\vartheta}}\left(1+\frac{2^l\rho(g)}{\rho(g)}\right)^{-\theta\eta}\int_{|g^{-1}h|\sim2^l\rho(g)}|f(h)|\mathrm{d}h\right\} \\ &\le C|u|\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{\left(2^l\right)^{(\gamma_1\gamma_2-1)/(k_0+1)-\theta\eta}}M_{V,\eta}(f)(g)\le C|u|M_{V,\eta}(f)(g), \end{aligned}$$

其中 $\gamma_1\gamma_2-1>(1+k_0)\theta\eta$。$I_{2,1}(g)$ 和 $I_{2,2}(g)$ 的估计表明 $I_2(g)\le C|u|M_{V,\eta}(f)(g)$。结合 $I_1(g)$ 和 $I_2(g)$ 的估计，能得到 $I(g)\le C\left(|u|^{\delta}+|u|\right)M_{V,\eta}(f)(g)$。由引理 2.4，其中 $p'\le\eta<\infty$，有

$$\|I\|_{L^p(H^n)}\le C\left(|u|^{\delta}+|u|\right)\|M_{V,\eta}(f)\|_{L^p(H^n)}\le C\left(|u|^{\delta}+|u|\right)\|f\|_{L^p(H^n)}.$$

通过 $I(g)$ 和 $II(g)$ 的估计，有 $\left\|\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right](f)(\cdot u)-\left[b,\Phi^{L,*}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\right](f)(\cdot)\right\|_{L^p(H^n)}\le C\left(|u|^{\delta}+|u|\right)\|f\|_{L^p(H^n)}$ 成立。

因此，我们得到了(7)并完成了证明。

**定理 4.2** 假设 $V\in B_q, q>\vartheta/2$，$b\in CMO(\rho)(H^n)$ 且 $\theta>0$，则 $\left[b,T_i^{L,*}\right], i=1,2$ 是 $L^p(H^n)$ 上的一个紧算子。

**证明**首先，通过引理 2.8，当 $\gamma_2=2\alpha$ 且 $\gamma_1=m$ 时，有 $t^m\partial_t^m K_{\alpha,t}^L(g,h)$ 满足条件(2)和(3)。因此，通过定理 4.1，得出 $\left[b,T_1^{L,*}\right]$ 是 $L^p(H^n)$ 上的一个紧算子。其次，通过定理 4.1，仅需证 $t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)$ 满足条件(2)和(3)。先证 $t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)$ 满足条件(2)。由于 $t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)=C\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r}t^\upsilon\partial_t^\upsilon K_{\alpha,t^{2\alpha}/(4r)}^L(g,h)\mathrm{d}r/r^{1-\sigma}$，通过

引理 2.8 的(1)，对 $L>\vartheta/(2\alpha)+N/\alpha+\sigma>0$，有

$$\begin{aligned}t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)&\le C\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r}\left(t^{2\alpha}/(4r)\right)^{-\vartheta/(2\alpha)}\left(t^{2\alpha}/(4r)\right)^{-N/\alpha}\rho(g)^N\rho(h)^N\frac{\mathrm{d}r}{r^{1-\sigma}}\\&\le\frac{C}{t^{\vartheta+2N}}\rho(g)^N\rho(h)^N\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)\mathrm{e}^{-r}r^{\vartheta/(2\alpha)+N/\alpha+\sigma-1}\mathrm{d}r\\&\le C\left(\frac{t}{\rho(g)}\right)^{-N}\left(\frac{t}{\rho(h)}\right)^{-N}\frac{1}{t^\vartheta}.\end{aligned}$$

另一方面，选取 $L>\alpha/N-\upsilon+\sigma>0$，有

$$t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)\le C\rho(g)^N\rho(h)^N\frac{t^{2\alpha\upsilon-2N}}{\left|g^{-1}h\right|^{\vartheta+2\alpha\upsilon}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r}r^{\alpha/N-\upsilon+\sigma-1}\mathrm{d}r\le C\left(\frac{t}{\rho(g)}\right)^{-N}\left(\frac{t}{\rho(h)}\right)^{-N}\frac{t^{2\alpha\upsilon}}{\left|g^{-1}h\right|^{\vartheta+2\alpha\upsilon}}.$$

考虑两种情况：$0\le t\le\left|g^{-1}h\right|$ 和 $t>\left|g^{-1}h\right|$。显然地，都能得到

$$\left(\frac{t}{\rho(g)}\right)^N\left(\frac{t}{\rho(h)}\right)^N\left|t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)\right|\le C\frac{t^{2\alpha\upsilon}}{\left(t+\left|g^{-1}h\right|\right)^{\vartheta+2\alpha\upsilon}}.$$

从而有 $t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)$ 满足条件(2)，其中 $\gamma_2=1$ 且 $\gamma_1=2\alpha\upsilon$。$t^\upsilon\partial_t^\upsilon p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)$ 满足条件(3)的证明相似于 $p_{t,\upsilon}^{L,\alpha}(g,h)$，此处省略细节。故得出 $\left[b,T_2^{L,*}\right]$ 是 $L^p(H^n)$ 上的一个紧算子。


## 致　谢

作者衷心感谢李澎涛教授的指导与建议。

## 基金项目

山东省自然科学基金(项目编号：ZR2017JL008)。


## 参考文献


[1] Conway, J. (1985) A Course in Functional Analysis. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3828-5

[2] Kutateladze, S. (1996) Fundamentals of Functional Analysis. Texts in Mathematical Sciences, Vol. 12, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8755-6

[3] Li, P.T. and Peng, L.Z. (2012) Compact Commutators of Riesz Transforms Associated to Schrödinger Operators. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, **8**, 717-739. https://doi.org/10.4310/PAMQ.2012.v8.n3.a7

[4] Li, P.T., Yan, M. and Zhang, C.Y. (2015) A Compactness Criterion and Application to the Commutators Associated with Schrödinger Operators, *Mathematische Nachrichten*, **288**, 235-248. https://doi.org/10.1002/mana.201300286

[5] He, Q.J., Li, P.T. (2021) On Weighted Compactness of Commutators Related with Schrödinger Operators. Mathematics.

[6] Wang, S.F. and Xue, Q.Y. (2020) On Weighted Compactness of Commutators of Bilinear Maximal Calderón-Zygmund Singular Integral Operators. Preprint.

[7] Wang, S. and Xue, Q. (2021) On Weighted Compactness of Commutator of Semi-Group Maximal Function and Frac-

tional Integrals Associated to Schrödinger Operators. *Revista Matemática Complutense*. https://doi.org/10.1007/s13163-021-00409-8

[8] Shen, Z.W. (1995) $L^p$ Estimates for Schrödinger Operators with Certain Potentials. *Annales De L'institut Fourier*, **45**, 513-546. https://doi.org/10.5802/aif.1463

[9] Liu, C.C., Liu, H.P. and Liu, Y. (2011) Hardy Spaces Associated with Schrödinger Operators on the Heisenberg Group. Mathematics.

[10] Auscher, P., Coulhon, T. and Grigor'yan, A. (2002) Heat Kernels and Function Theory on Metric Measure Spaces. *Contemporary Mathematics*, **338**, 143-172. https://doi.org/10.1090/conm/338/06073

[11] Wang, Z.Y., Dai, T.T. and Li, P.T. (2021) Characterizations of Vanishing Campanato Classes Related to Schrödinger Operators via Fraction Semigroups on Stratified Group. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**, 10609-10634. https://doi.org/10.1002/mma.7433

[12] Yosida, K. (1995) Functional Analysis. Reprint of the Sixth (1980) Edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61859-8

[13] Tang, L. (2011) Weighted Norm Inequalities for Commutators of Littlewood-Paley Functions Related to Schrödinger Operators. Preprint.