Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(7), 1205-1216
Published Online July 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.127132

一类带非线性边界条件的微分方程正解的存在性及多解性

雷想兵

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年6月14日；录用日期：2022年7月15日；发布日期：2022年7月22日

摘 要

本文研究了二阶非线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + h(t) f(u(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0,\ u'(1) - g(u(1)) = b \end{cases} \tag{$\mathbf{P}$}$$

正解的存在性及多解性, 其中 b 是正参数, $k > 0$, $a \in C([0,1],(0,\infty))$, $f, g \in C([0,\infty),(0,\infty))$. 在 f, g 满足适当条件下证得存在一个正数 b^*, 使得当 $0 < b < b^*$ 时, $(\mathbf{P})$ 至少存在两个正解; 当 $b = b^*$ 时, $(\mathbf{P})$ 存在一个正解, 当 $b > b^*$ 时, $(\mathbf{P})$ 不存在正解. 主要结果的证明基于拓扑度理论和上下解方法。

关键词

非线性边界条件，正解，拓扑度，上下解

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Differential Equations with Nonlinear Boundary Conditions

Xiangbing Lei

文章引用: 雷想兵. 一类带非线性边界条件的微分方程正解的存在性及多解性[J]. 理论数学, 2022, 12(7): 1205-1216.
DOI: 10.12677/pm.2022.127132

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 14^{th}, 2022; accepted: Jul. 15^{th}, 2022; published: Jul. 22^{nd}, 2022

Abstract

In this paper, we are concerned with the existence and multiplicity of positive solutions for second order nonlinear differential equations boundary value problems

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + h(t) f(u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0,\ u'(1) - g(u(1)) = b, \end{cases} \tag{P}$$

where b **is a positive parameter,** $k > 0$**,** $a \in C([0,1],(0,\infty)), f, g \in C([0,\infty),(0,\infty))$**. When** f **and** g **satisfy the proper conditions, we prove that there exists a positive number** b^***, such that (P) has zero, exactly one and at least two positive solutions according to** $b > b^*, b = b^*$ **and** $0 < b < b^*$**, respectively. The proof of the main results is based on topological theory and the method of upper and lower solutions.**

Keywords

Nonlinear Boundary Conditions, Positive Solutions, Topological Degree, Upper and Lower Solutions

1. 引言及主要结果

本文考察带非线性边界条件的二阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) + h(t) f(u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0,\ u'(1) - g(u(1)) = b \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性及多解性, 其中 $k > 0$, b 是正参数, h、f 和 g 满足:

(H1) $h \in [0,1] \to (0,\infty)$ 是连续函数, 并且在 [0,1] 的任何子区间上不恒为零;

(H2) $f,\ g : [0,\infty) \to (0,\infty)$ 是连续函数;

(H3) $f_0 = \lim\limits_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0,\ f_\infty = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty,\ g_0 = \lim\limits_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = 0.$

近年来, 二阶常微分方程两点边值问题的研究受到众多学者的关注, 其正解的存在性也获得了许多较好的结果 [1–8]. 特别地, 文献 [1] 运用锥拉伸与压缩不动点定理研究了二阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + a(t)f(u(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性, 并获得如下结果:

定理 A [1]　假设

(A1) $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$,

(A2) $a \in C([0,1],[0,\infty))$ 且在 [0,1] 的任何子区间上不恒为零,

(A3) $f_0 = \lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = \infty,\ f_\infty = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$

成立, 则问题 (2) 至少存在一个正解.

文献 [2]运用不动点指数理论研究了边值问题

$$\begin{cases} u''(t) - Mu(t) + f(t,u(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

正解的存在性, 其中 $f \in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty)),\ M > 0$ 是常数. 在非线性项 f 满足适当增长条件时, 得到了问题 (3) 至少存在一个正解.

值得注意的是, 文献 [1,2]所研究问题的边界条件都是线性且是齐次的, 自然要问: 在非线性且非齐次边界条件下, 是否能获得正解的存在性结果, 正解的个数是否受参数 b 的影响? 据我们所知, 还未见到对此类问题的研究. 我们拟在非齐次边界条件下建立问题 (1) 正解的存在性结果, 具体地, 本文的主要结果是:

定理 1　假定 (H1)-(H3) 成立, 则存在一个正数 b^*, 使得当 $0 < b < b^*$ 时, 问题 (1) 至少存在两个正解, $b = b^*$ 时, 问题 (1) 至少存在一个正解, $b > b^*$ 时, 问题 (1) 不存在正解.

注 1　如果问题 (1) 中 $g \equiv 0,\ b = 0,\ k = 0$, 则问题 (1) 退化为问题 (2), 自然这是对文献 [1]工作的延伸与发展.

2. 预备知识

令 $X = C[0,1]$, 在其范数 $\|u\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$ 下构成 Banach 空间.

注意到, 问题 (1) 等价于积分方程

$$u(t)=\varphi(t)(b+g(u(1)))+\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))ds,\quad t\in[0,1], \tag{4}$$

其中 $\varphi(t)=\frac{\sinh kt}{k\cosh k}$, $G(t,s)$ 是相应的 Green 函数

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{\sinh kt\cosh k(1-s)}{k\cosh k}, & 0\le t\le s\le 1,\\ \frac{\sinh ks\cosh k(1-t)}{k\cosh k}, & 0\le s\le t\le 1,\end{cases}$$

这里 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, 记

$$m:=\min_{(t,s)\in[\frac14,\frac34]\times[\frac14,\frac34]}G(t,s),\quad M:=\max_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}G(t,s),$$

$$\zeta:=\min_{t\in[\frac14,\frac34]}\varphi(t)=\frac{\sinh\frac{k}{4}}{k\cosh k},\qquad \xi:=\max_{t\in[0,1]}\varphi(t)=\frac{\tanh k}{k}.$$

定义算子 $T:X\to X$

$$Tu(t)=\varphi(t)(b+g(u(1)))+\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))ds,\quad t\in[0,1]. \tag{5}$$

记

$$K=\{u\in X\,|\,u(t)\ge 0\text{ 且 }\min_{t\in[\frac14,\frac34]}u(t)\ge\sigma\|u\|\},$$

其中 $\sigma=\min\{\frac{m}{M},\frac{\zeta}{\xi}\}$, 则 K 是 X 中的一个锥.

引理 1 假定 (H1)-(H3) 成立, T 如式 (5) 所定义, 则 T 是全连续算子, 并且 $T(K)\subset K$.

证明 对任意的 $u\in K$, 则有

$$\begin{aligned}\min_{t\in[\frac14,\frac34]}Tu(t)&\ge\min_{t\in[\frac14,\frac34]}\varphi(t)(b+g(u(1)))+\min_{t\in[\frac14,\frac34]}\int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))ds\\&\ge\zeta(b+g(u(1)))+m\int_0^1 h(s)f(u(s))ds\\&\ge\frac{\zeta}{\xi}\xi(b+g(u(1)))+\frac{m}{M}\int_0^1 Mh(s)f(u(s))ds\\&\ge\sigma(\xi(b+g(u(1)))+\int_0^1 Mh(s)f(u(s))ds)\\&=\sigma\|Tu\|,\end{aligned}$$

因此 $T(K)\subset K$. 再根据 Arzela-Ascoli 定理容易得到 T 是全连续算子.

引理 2 [9] 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 中的一个锥, 对任意的 $r>0$, 定义 $K_r=\{x\in K:\|x\|<r\}$. 假设 $T:\overline{K_r}\to K$ 是全连续算子, 使得对 $x\in\partial K_r$, 有 $Tx\neq x$, 则以下结论成立:

(1) 如果 $\|Tx\| \geq \|x\|$, $x \in \partial K_r$, 那么 $i(T, K_r, K) = 0$;

(2) 如果 $\|Tx\| \leq \|x\|$, $x \in \partial K_r$, 那么 $i(T, K_r, K) = 1$.

3. 正解的存在性及不存在性

定理 2 假定 (H1)-(H3) 成立, 当 b 充分小时, 问题 (1) 至少存在一个正解, 当 b 充分大时, 问题 (1) 不存在正解.

证明 首先证明 b 充分小时, 问题 (1) 至少存在一个正解. 根据 (H1) 可设, $L := \max\limits_{t\in[0,1]} h(t)$, $l := \min\limits_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} h(t)$. 对任意的 $r_1 > 0$, 令

$$K_{r_1} = \{u \in K : \|u\| < r_1\},$$

由 (H3) 可知, 存在正数 $\rho_1 < r_1$, 使得 $0 \leq u \leq \rho_1$ 时, 有 $f(u) \leq \frac{1}{3ML}u$, 同样地, 存在正数 $\rho_2 < r_1$, 使得 $0 \leq u \leq \rho_2$ 时, 有 $g(u) \leq \frac{k}{3}u$, 取 $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, 当 $0 \leq u \leq \rho$ 且 $b < \frac{k}{3}\rho$ 时, 对任意的 $u \in \partial K_{r_1}$, 则有

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \varphi(t)(b + g(u(1))) + \int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))ds \\
&\leq \frac{1}{k}b + \frac{1}{k}g((u(1)) + ML\int_0^1 f(u(s))ds \\
&\leq \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{3}\rho \\
&\leq r_1,
\end{aligned}$$

根据引理 2 可得,

$$i(T, K_{r_1}, K) = 1.$$

因为 $f_\infty = \infty$, 故存在 $p > 0$, 使得 当 $u \geq p$ 时, $f(u) \geq \eta u$, 并且 η 满足

$$\sigma m \eta l \geq 1.$$

选取 $r_2 \geq \max\{\frac{p}{\sigma}, r_1\}$, 令

$$K_{r_2} = \{u \in K : \|u\| < r_2\},$$

如果 $u \in \partial K_{r_2}$, 则

$$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \geq \sigma\|u\| \geq p,$$

对任意的 $u \in \partial K_{r_2}$, 则有

$$\begin{aligned}
Tu(t) &= \varphi(t)(b + g(u(1))) + \int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))ds \\
&\geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t,s)h(s)f(u(s))ds \\
&\geq m\eta\sigma l\|u\| \\
&\geq \|u\|,
\end{aligned}$$

这意味着 $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in \partial K_{r_2}$, 由引理 2 得

$$i(T, K_{r_2}, K) = 0.$$

根据不动点指数的可加性知

$$i(T, K_{r_2} \setminus \overline{K_{r_1}}, K) = -1.$$

这表明 T 在 $K_{r_2} \setminus \overline{K_{r_1}}$ 中有一个不动点, 即问题 (1) 至少有一个正解.

注意到, φ 是问题

$$\begin{cases} u''(t) - k^2 u(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 1 \end{cases}$$

的解. 而 u 是问题 (1) 的正解当且仅当 $v = u - (b + g(u(1)))\varphi$ 是问题

$$\begin{cases} v'' - k^2 v + hf(v + (b + g(u(1)))\varphi) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ v(0) = 0,\ v'(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

的非负解.

设 u 是问题 (1) 的解, 则 $v = u - (b + g(u(1)))\varphi$ 是问题 (6) 的解, 由引理 1 可得

$$\inf_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} v(t) \geq \sigma\|v\|,$$

而 $\inf\limits_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \varphi(t) \geq \frac{\zeta}{\xi}\|\varphi\| \geq \sigma\|\varphi\|$, 于是

$$\begin{aligned} \inf_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} v + (b + g(u(1)))\varphi &\geq \sigma(\|v\| + (b + g(u(1)))\|\varphi\|) \\ &\geq \sigma\|v + (b + g(u(1)))\varphi\|. \end{aligned}$$

令 $\widetilde{f}(t) = \inf\limits_{t\leq s} f(s)$, 则有

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^1 G(t,s)h(s)f(v + (b + g(u(1)))\varphi(s))ds \\ &\geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t,s)h(s)f(v + (b + g(u(1)))\varphi(s))ds \\ &\geq ml\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(v + (b + g(u(1)))\varphi(s))ds \\ &\geq ml\widetilde{f}(\sigma\|v + (b + g(u(1)))\varphi\|), \end{aligned}$$

进而

$$\frac{\widetilde{f}(\delta\|v + (b + g(u(1)))\varphi\|)}{\|v + (b + g(u(1)))\varphi\|} \leq \frac{\widetilde{f}(\delta\|v + (b + g(u(1)))\varphi\|)}{\|v\|} \leq \frac{1}{ml},$$

由 (H2) 及 $\widetilde{f}$ 的定义知 $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{\widetilde{f}(s)}{s}=\infty$, 因此, 存在 $\kappa>0$, 使得 $\|v+(b+g(u(1)))\varphi\|\le\kappa$, 故 b 是有界的.

4. 上解和下解

本节通过定义问题 (1) 的上下解, 旨在第四节中得到问题 (1) 的多个正解.

定义 1 $\alpha\in C^2[0,1]$ 是问题 (1) 的上解, 如果 α 满足

$$\begin{cases}\alpha''(t)-k^2\alpha(t)+h(t)f(\alpha(t))\le 0, & 0<t<1,\\ \alpha(0)\ge 0,\ \alpha'(1)-g(\alpha(1))\ge b.\end{cases}$$

$\beta\in C^2[0,1]$ 是问题 (1) 的下解, 如果 β 满足

$$\begin{cases}\beta''(t)-k^2\beta(t)+h(t)f(\beta(t))\ge 0, & 0<t<1,\\ \beta(0)\le 0,\ \beta'(1)-g(\beta(1))\le b.\end{cases}$$

引理 3 假定 (H1)-(H3) 成立, 设 α 和 β 分别是问题 (1) 的上解和下解, 且有 $\beta(t)\le\alpha(t)$, 则问题 (1) 至少存在一个解 u 满足

$$\beta(t)\le u(t)\le\alpha(t),\qquad t\in[0,1].$$

证明 考虑辅助问题

$$\begin{cases}u''(t)-k^2u+h(t)f^*(u(t))=0, & 0<t<1,\\ u(0)=0,\ u'(1)-g^*(u(1))=b\end{cases}\tag{7}$$

其中

$$f^*(u(t))=\begin{cases}f(\alpha(t)), & u(t)>\alpha(t),\\ f(u(t)), & \alpha(t)\le u(t)\le\beta(t),\\ f(\beta(t)), & u(t)<\beta(t),\end{cases}$$

$$g^*(u(t))=\begin{cases}g(\alpha(t)), & u(t)>\alpha(t),\\ g(u(t)), & \alpha(t)\le u(t)\le\beta(t),\\ g(\beta(t)), & u(t)<\beta(t).\end{cases}$$

事实上, 要证明问题 (1) 存在一个解 u, 且有 $\beta(t)\le u(t)\le\alpha(t)$, $t\in[0,1]$, 只需证明问题 (7) 存在解 u 且满足该条件.

由式 (5) 可得, 问题 (7) 等价于积分方程

$$u(t)=\varphi(t)(b+g^*(u(1)))+\int_0^1 G(t,s)h(s)f^*(u(s))ds,\quad t\in[0,1],$$

定义算子 $T^*: X \to X$

$$T^*u(t) = \varphi(t)(b + g^*(u(1))) + \int_0^1 G(t,s)h(s)f^*(u(s))ds, \quad t \in [0,1],$$

由于 f^*, g^* 是连续函数, 容易验证, T^* 是全连续算子, 设

$$B = \{u \in X : \beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \ \ t \in [0,1]\},$$

显然 B 是 X 中的有界闭集, 则 $| f^*(u(t)) | \leq \max\limits_{u(t)\in B} | f(u(t)) |$, 因此 f^* 有界, 同理, g^* 有界, 从而 T^* 是有界算子, 根据 Schauder 不动点定理, T^* 有不动点 u, 即 u 是问题 (7) 的解.

下证 $u(t) \leq \alpha(t)$. 反设对某些 $t_0 \in [0,1]$, 有 $u(t_0) > \alpha(t_0)$, 令 $\omega(t) = \alpha(t) - u(t)$, 下面分四种情形讨论.

(i) 对任意的 $t \in [0,1]$, 假设都有 $\omega(t) < 0$, 此时,

$$f^*(u(t)) = f(\alpha(t)), \quad g^*(u(t)) = g(\alpha(t)),$$

因此

$$\begin{aligned}\omega''(t) &= \alpha''(t) - u''(t) \\ &\leq k^2\alpha(t) - h(t)f(\alpha(t)) - k^2u(t) - h(t)f^*(u(t)) \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

另一方面

$$\omega(0) = \alpha(0) - u(0) \geq 0,$$

$$\omega'(1) = \alpha'(1) - u'(1) \geq b + g(\alpha(1)) - b - g^*(u(1)) = 0,$$

根据极大值原理, $\omega(t_0) \geq 0, \ t_0 \in [0,1]$, 这与假设矛盾.

(ii) 取 $0 < a < 1$ 满足 $\omega(a) = 0$, 假设 $\omega(t) < 0, \ t \in [a,1]$, 则有

$$\omega''(t) \leq 0, \ \ \omega(a) = 0, \ \ \omega'(1) \geq 0,$$

这与 (i) 类似可得到矛盾, 从而有 $\omega(t) \geq 0$.

(iii) 取 $0 < a < 1$ 满足 $\omega(a) = 0$, 假设 $\omega(t) < 0, \ t \in [0,a)$, 则有

$$\omega''(t) \leq 0, \ \ \omega(0) \geq 0, \ \ \omega'(a) \geq 0,$$

同理, 可得到矛盾.

(iv) 取 $0 < a, \, b < 1$ 满足 $\omega(a) = 0, \ \omega(b) = 0$,设 $\omega(t) < 0, \ t \in [a,b]$, 则有

$$\omega''(t) \leq 0, \ \ \omega(a) = 0, \ \ \omega'(b) \geq 0,$$

类似地, 此种情形下亦有 $\omega(t) \geq 0$.

对于 $u(t) \geq \beta(t)$, $t \in [0,1]$, 用同样的方法可证得, 这里不在赘述. 于是问题 (7) 的解 u 满足

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t), \ \ t \in [0,1],$$

根据 f^*, g^* 的定义易知 u 是问题 (1) 的解. □

5. 多解性及主要结果的证明

为了得到问题 (1) 的正解, 方便起见, 本节总假设

(H4) $f(u) = 0, \ g(u) = 0, \ u < 0.$

引理 4 假定 (H1)-(H3) 成立, 设 $I \subset (0, \infty)$ 为紧子区间, 若 $b \in I$, 则存在常数 $\widetilde{m} > 0$, 使得问题 (1) 的所有解 u 满足 $\|u\| \leq \widetilde{m}$.

证明: 设 $\{u_n\}$ 是问题 (1) 的无界解序列, 与其对应的 $\{b_n\} \in I$. 由引理 1 知, $u_n \in K$, 因为 $f_\infty = \infty$, 则存在常数 $q > 0$, 当 $u \geq q$ 时, $f(u) \geq \eta u$, 其中 $\eta > 0$ 满足

$$\eta\sigma \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)ds \geq 2,$$

又因 $n \to \infty$ 时, $\|u_n\| \to \infty$, 则存在 N, 当 $n > N$, 时有

$$\min_{t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} u_n(t) \geq \sigma\|u_n\| \geq q,$$

从而

$$\begin{aligned} u_n(\frac{1}{2}) &\geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)f(u_n(s))ds \\ &\geq \eta \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)u_n(s)ds \\ &\geq \eta\sigma \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2}, s)h(s)\|u_n\| \\ &\geq 2\|u_n\|, \end{aligned}$$

显然这是一个矛盾, 命题得证. □

引理 5 记 $\Gamma = \{\, b > 0 \mid$ 问题 (1) 至少有一个正解 $\}$, 设 $\sup \Gamma = b^*$, 则 Γ 有界, 并且 $b^* \in \Gamma$.

证明 由定理 2 可知, Γ 是有界的. 取 $\{b_n\} \in \Gamma$ 且满足

$$b_n \to b^*, \ n \to \infty,$$

显然 $\{b_n\}$ 是有界的, 由引理 4 知 b_n 对应于问题 (1) 的解 u_n 有界, 结合算子 T 的紧性易知 $b^* \in \Gamma$. □

对 $\varepsilon > 0$, 设 u^* 是对应于 b^* 的问题 (1) 的解. 令

$$\widetilde{f}(u(t)) = \begin{cases} f(u^*(t)+\varepsilon), & u(t) > u^*(t)+\varepsilon, \\ f(u(t)), & -\varepsilon \le u(t) \le u^*(t)+\varepsilon, \\ f(-\varepsilon), & u(t) < -\varepsilon, \end{cases}$$

$$\widetilde{g}(u(t)) = \begin{cases} g(u^*(t)+\varepsilon), & u(t) > u^*(t)+\varepsilon, \\ g(u(t)), & -\varepsilon \le u(t) \le u^*(t)+\varepsilon, \\ g(-\varepsilon), & u(t) < -\varepsilon, \end{cases}$$

定义

$$\widetilde{T}u(t) = \varphi(t)(b+\widetilde{g}(u(1))) + \int_0^1 G(t,s)h(s)\widetilde{f}(u(s))ds, \quad t \in [0,1], \tag{8}$$

设

$$\Omega = \{u \in X : -\varepsilon < u(t) < u^*(t)+\varepsilon,\ t \in [0,1]\}.$$

引理 6 假定 (H1)-(H4) 成立, 取充分小的正数 ε, 使得对任意的 $u \in C[0,1]$ 且满足 $\widetilde{T}u = u$, 当 $0 < b < b^*$ 时, 有 $u \in \overline{\Omega}$.

证明: 由式 (8) 可知, $u \ge 0$. 下面证明 $u \le u^* + \varepsilon$. 根据 f 的一致连续性, 当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时, 存在正数 c, 使得 $cL \le k^2$, 则有

$$|f(u^*+\varepsilon) - f(u^*)| < c\varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned} (u^*+\varepsilon)'' &= (u^*)'' \\ &= k^2u^* - hf(u^*) \\ &= k^2(u^*+\varepsilon) - hf(u^*+\varepsilon) + h(f(u^*+\varepsilon) - f(u^*)) - k^2\varepsilon \\ &\le k^2(u^*+\varepsilon) - hf(u^*+\varepsilon) + (cL-k^2)\varepsilon \\ &\le k^2(u^*+\varepsilon) - hf(u^*+\varepsilon), \end{aligned}$$

另一方面,

$$(u^*+\varepsilon)'(1) = b^* + g(u^*(1)) \ge b + g(u^*(1)),$$

从而, $u^*+\varepsilon$ 是问题 (1) 的上解, 由引理 3 可得 $u \le u^*+\varepsilon$. □

定理 1 的证明 定理 2 意味着 $b > b^*$ 时, 问题 (1) 不存在正解. 由于 u^* 和 0 分别是问题 (1) 的上解和下解, 根据引理 3 可知, 存在问题 (1) 解 u_b 且满足 $0 \le u_b \le u^*$. 因此, 当 $0 < b \le b^*$ 时, 问题 (1) 存在一个正解, 此外 $u_b \in \Omega$. 下面建立当 $0 < b < b^*$ 时问题 (1) 的第二个正解.

设 $B(u_b, R_1)$ 是 X 中以 u_b 为中心, R_1 为半径的球, 对充分大的 R_1, 由 $\widetilde{T}$ 对 b 在紧区间上时有界知

$$\deg(I-\widetilde{T}, B(u_b, R_1), 0) = 1,$$

如果存在 $u \in \partial\Omega$, 使得 $\widetilde{T}u = u$, 则有 $f = \widetilde{f}$, $g = \widetilde{g}$, 此时, u 是问题 (1) 的第二个解. 反设 $\widetilde{T}u \neq u$, $u \in \partial\Omega$, 则 $\deg(I-\widetilde{T}, \Omega, 0)$ 良定. 引理 6 表明, $\widetilde{T}$ 在 $B(u_b, R_1) \setminus \Omega$ 中没有不动点, 由拓扑度的切除性得

$$\deg(I-T, \Omega, 0) = \deg(I-\widetilde{T}, \Omega, 0) = 1.$$

另一方面, 由引理 4 知, 问题 (1) 的所有解在 b 的紧区间上都有先验界, 故对充分大的 R_2 有

$$\deg(I-T, B(0, R_2), 0) = d, \ (d\,\text{为常数})$$

因为 $b > b^*$ 时, 问题 (1) 不存在解, 从而 $d = 0$, 于是

$$\deg(I-T, B(0, R_2) \setminus \Omega, 0) = -1,$$

这表明 当 $0 < b < b^*$ 时, 问题 (1) 存在第二个正解. □

基金项目

国家自然科学基金资助项目(批准号: 12061064)。

参考文献

[1] Wang, H.Y. (1994) On the Existence of Positive Solutions for Semilinear Elliptic Equations in the Annulus. *Journal of Differential Equations*, **109**, 1-7. https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1042

[2] Li, Y.X. (2003) Positive Solutions of Second-Order Boundary Value Problems with Sign-Changing Nonlinear Terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **282**, 232-240. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00141-0

[3] Benmezaï, A. (2010) Positive Solutions for a Second Order Two Point Boundary Value Problem. *Communications in Applied Analysis*, **14**, 177-190.

[4] Hai, D.D. and Shivaji, R. (2017) Positive Radial Solutions for a Class of Singular Superlinear Problems on the Exterior of a Ball with Nonlinear Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **456**, 872-881. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.06.088

[5] Ma, R.Y. and An, Y.L. (2005) Uniqueness of Positive Solutions of a Class of O.D.E. with Robin Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis*, **63**, 273-281. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.05.012

[6] Lian, W.C., Wong, F.H. and Yeh, C.C. (1996) On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Second Order Differential Equations. *Proceedings of the AMS*, **124**, 1117-1126. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-96-03403-X

[7] Yang, Z.L. (2021) Positive Solutions of a Second-Order Nonlinear Robin Problem Involving the First-Order Derivative. *Advances in Difference Equations*, **2021**, Article No. 313. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03465-y

[8] Lian, X.G. (2008) Existence of Positive Solutions for Robin Boundary Value Problems for a Second-Order O.D.E. *Mathematics in Practice and Theory*, **38**, 184-189.

[9] Guo, D.J. and Lakshmikantham, V. (1988) Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, Cambridge, MA, 1-275.