Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1327-1332
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128145

Hans汉斯

带等级约束的多重任务半在线调度问题

代兵飞，吴建丽

楚雄师范学院数学与计算机科学学院，云南 楚雄

收稿日期：2022年7月12日；录用日期：2022年8月11日；发布日期：2022年8月22日

摘 要

在本文，我们研究两台平行机上带等级约束的多重任务调度问题，每个客户提交多个加工时间和等级相同的任务给机器加工。当低等级和高等级任务的加工时间之和分别已知时，本文提出了一个半在线算法，算法的竞争比为3/2。当低等级任务的加工时间之和已知时，本文也提出了一个半在线算法，算法的竞争比为3/2。

关键词

多重任务，半在线算法，竞争比，等级约束

Multiple Tasks Semi-Online Scheduling Problem under a Grade of Service Provision

Bingfei Dai, Jianli Wu

School of Mathematics and Computer Science, Chuxiong Normal University, Chuxiong Yunnan

Received: Jul. 12th, 2022; accepted: Aug. 11th, 2022; published: Aug. 22nd, 2022

Abstract

In this paper, we study the multiple tasks semi-online scheduling problem with hierarchical constraints on two parallel machines. Each customer submits multiple tasks with the same processing time and level to the machine. When the sum of processing time of low-level and high-level tasks is known respectively, this paper designs a semi-online algorithm with a competition ratio of 3/2. When the sum of processing time of low-level tasks is known, this paper also designs a semi-online algorithm with a competition ratio of 3/2.

Keywords

Multiple Tasks, Semi-Online Algorithm, The Competitive Ratio, Grade of Service Provision

文章引用: 代兵飞, 吴建丽. 带等级约束的多重任务半在线调度问题[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1327-1332.
DOI: 10.12677/pm.2022.128145

1. 引言

带等级的调度问题由 Hang 等人在文[1]首次提出，由于在生产计划、工业设计、航班安排等中的广泛应用，等级调度问题得到了广泛的研究，并针对不同的目标设计了许多在线和半在线算法。等级约束在第三产业服务业应用较为广泛，服务机构将顾客分成不同的级别，例如级别较高的顾客被标记为金牌客户，级别较低的顾客被标记为银牌客户，等级越高的顾客享受越高的服务，并且服务机构只为服务等级不低于自己的顾客提供服务。

由于在实际生活中的广泛应用，半在线调度问题已经得到深入的研究。对于半在线算法，一般通过竞争比来衡量算法的性能。对于一个最小化问题，给定一个实例 I，算法 A 的竞争比定义为最小的 γ，以满足 $C_{SEMI} \le \gamma C_{OPT}$，$C_{SEMI}$，表示半在线算法的输出值，$C_{OPT}$ 表示离线最优值。对于一个半在线问题，如果没有算法的竞争比小于 γ，则 γ 是该问题的一个下界。如果一个算法的竞争比等于 γ，则该算法是一个最优半在线算法。

对于带等级约束的离线调度问题，Hang 等人在文[1]设计了一个 LG-LPT 算法。当机器的台数 $m = 2$ 时，他们设计了一个近似算法，算法的近似为 5/4；当机器的台数 $m \ge 3$ 时，设计了一个 $2-1/(m-1)$-近似算法。对于带等级约束的离线调度问题，Ou 等人在文[2]设计了一个完全多项式时间近似方案(FPTAS)。Woeginger 在文[3]也设计了两个类似的完全多项式时间近似方案。

对于带等级约束的在线调度问题，Park 等人在[4]设计了一个竞争比为 5/3 的最优在线算法。Jiang 等人在[5]也设计了一个竞争比为 5/3 的最优在线算法。当提前已知任务的加工时间之和时，Park 等人在文[4]设计了一个竞争比为 3/2 的半在线算法。

对于半在线调度问题，Chen 等人在文[6]设计了三个半在线算法：当低等级任务的加工时间之和已知时，设计了一个竞争比为 3/2 的最优半在线算法；当每个等级任务的加工时间之和已知时，设计了一个竞争比为 4/3 的半在线算法；当低等级任务的加工时间之和已知而且存在一个容量为 K = 1 的缓冲器时，设计了一个竞争比为 4/3 的最优半在线算法。Luo 等人在[7]也设计了三个半在线算法：当低等级任务的加工时间之和已知时，设计了一个竞争比为 3/2 的最优半在线算法；当高等级任务的加工时间之和已知时，设计了一个竞争比为 20/13 的最优半在线算法；当每个等级任务的加工时间之和已知时，设计了一个竞争比为 4/3 的最优半在线算法。

在一般的调度中，任务总是一个接一个地到达，然后分配给机器加工。但在一些云计算问题中[8] [9]，每个服务器提交一些要处理的相同任务给主机加工。这些工作启发我们研究两台平行机上带等级约束的多重任务调度问题。在本文，我们思考两台平行机上带等级约束的多重任务调度问题，设计了两个半在线算法。

文章剩余部分被组织如下：在第二部分，介绍预备知识及问题的具体内容；在第三部分，当提前分别已知低等级任务和高等级任务的加工时间之和时，本文设计了一个竞争比为 3/2 的半在线算法；在第四部分，当提前已知低等级任务的加工时间之和时，本文设计了一个竞争比为 3/2 的半在线算法；在最后一部分，本文总结得到结论以及对未来研究方向的设想。

2. 预备知识

两台平行机上带等级约束的多重任务调度问题叙述如下：存在一个问题实例 $I = (M, N, J, a)$，集合 M

包含两台机器 M_1, M_2，集合 N 包含 n 个客户 $1,2,\cdots,n$。客户 j 有 a_j 个相同的任务，客户 j 的任务集可以表示成 $J_j=\left\{J_{j1},\cdots,J_{ja_j}\right\}$。所有客户的任务集可以表示成 $J=\bigcup_{j=1}^{n}J_j$。在这里，p_j 表示客户 j 的每一个任务的加工时间。我们把客户分成金牌客户和银牌客户，金牌客户的任务等级较高，银牌客户的任务等级较低。对于 $j=1,2,\cdots,n$，若客户 j 为银牌客户，则客户 j 的每一个任务只能在机器 M_1 上加工；若客户 j 为金牌客户，则客户 j 的每一个任务可以在两台机器中的任意一台加工。$S_i\left(i=1,2\right)$ 表示算法结束后分配给机器 M_i 的任务集。$t\left(S_i^j\right)\left(i=1,2\right)$ 表示分配完客户 j 的任务后机器 M_i 的负载。$t\left(S_i^n\right)$ 表示机器 M_i 的完工时间，简记为 $t\left(S_n\right)$。T_1 表示银牌客户的任务加工时间之和，T_2 表示金牌客户的任务加工时间之和。L_i^j 表示客户 j 的任务被调度后，分配给机器 M_i 的金牌客户的任务加工时间之和。目标是寻找一个调度方案，使得机器的最大完工时间尽可能小。

为了便于理解两台平行机上的 HSBT 问题，下面给出一个实例。假设给定两个客户，两台机器 M_1, M_2，表 1 给出了每个客户包含的任务数量 a 以及每项任务的完工时间 p 和等级 g。最优分配方案：客户 1 的 1 个任务分配给机器 M_1，2 个任务分配给机器 M_2；客户 2 的所有任务分配给机器 M_2。可知该问题的最优目标值为 8。

Table 1. Examples of multiple scheduling problems
表 1. 多重调度问题实例

	客户 1	客户 2
a	3	2
p	4	2
g	2	1

3. 半在线算法 $Semi-online-T_1-T_2$

在这一部分，假定已知银牌客户的任务加工时间总和为 T_1，金牌客户的任务加工时间总和为 T_2，本文设计了一个竞争比为 3/2 的半在线算法。。C_{SEMI} 表示半在线算法的输出值，C_{OPT} 表示最优离线值。

为便于分析，令 $HT=\frac{1}{2}\left(T_1+T_2\right)$ 表示所有任务加工时间之和的一半。其中有，

$$q_j=\left\lfloor\frac{\frac{3}{2}HT-T_1-L_1^{j-1}}{p_j}\right\rfloor。$$

算法 1： $Semi-online-T_1-T_2$

步骤 1：如果 $T_2\le T_1$，分配银牌客户的任务给机器 M_1，分配金牌客户的任务给机器 M_2，算法结束。

步骤 2：如果 $T_2>T_1$，令 $j=1$，$L_1^{j-1}=L_2^{j-1}=0$。

步骤 2.1：如果客户 j 为银牌客户，分配客户 j 的 a_j 个任务给机器 M_1；

步骤 2.2：否则，分配客户 j 的 q_j 个任务给机器 M_1，分配 a_j-q_j 个任务给机器 M_2；

步骤 3：如果有其他客户，令 $j=j+1$，转到步骤 2.1。否则，结束算法。

引理 1 由算法 $Semi-online-T_1-T_2$ 可知，若客户 j 是金牌客户而且有 $q_j<a_j$，可得 $\left(a_j-q_j\right)p_j\le HT$。

证明： 若客户 j 只包含一个任务，即 $a_j=1$，则有 $q_j=0$，因此 $\left(a_j-q_j\right)p_j\le HT$。如果 $a_j\ge 2$，我们下面分两种情况讨论 a_j-q_j 的值：

第一种情况： $a_i-q_i\ge 2$

按照算法 $Semi-online-T_1-T_2$，则有

$$t\left(S_1^j\right)=L_1^{j-1}+T_1+\left(q_j+1\right)p_j>\frac{3}{2}HT \tag{1}$$

$$t\left(S_1^j\right)+t\left(S_2^j\right)=L_1^{j-1}+T_1+L_2^{j-1}+a_jp_j\le 2HT \tag{2}$$

由(2)式-(1)式，则有

$$L_2^{j-1}+\left(a_j-q_j-1\right)p_j<\frac{1}{2}HT \tag{3}$$

因为 $a_j-q_j\ge 2$，所以 $a_j-q_j-1\ge 1$，再结合(3)式，则有

$$p_j\le L_2^{j-1}+\left(a_j-q_j-1\right)p_j<\frac{1}{2}HT \tag{4}$$

结合(3)式和(4)式，则有

$$\left(a_j-q_j\right)p_j\le L_2^{j-1}+\left(a_j-q_j\right)p_j<HT\text{。}$$

第二种情况： $a_j-q_j=1$

根据此时 $a_j\ge 2$，则有

$$\left(a_j-q_j\right)p_j=p_j\le\frac{a_jp_j}{2}=HT\text{。}$$

由上面的推导过程可知，引理 1 成立。

定理 1 $Semi-online-T_1-T_2$ 是一个竞争比为 3/2 的半在线算法。

证明：下面我们用反证法证明定理不成立，假设存在极小反例。对于极小反例(客户数最少的反例)，机器的最大完工时间在加工完最后一个客户(客户 n)的任务后被确定，则有

$$C_{SEMI}=\max\left\{t\left(S_1^n\right),t\left(S_2^n\right)\right\}>\frac{3}{2}C_{OPT}$$

$$\max\left\{t\left(S_1^{n-1}\right),t\left(S_2^{n-1}\right)\right\}\le\frac{3}{2}C_{OPT} \tag{5}$$

下面我们分两种情况讨论客户 n 是金牌客户还是银牌客户：

第一种情况：客户 n 是金牌客户。

如果客户 n 的所有任务分配给机器 M_1 加工，则有 $t\left(S_1^{n-1}\right)+a_np_n\le\frac{3}{2}HT\le\frac{3}{2}C_{OPT}$。根据极小反例，则有 $C_{SEMI}=t\left(S_2^n\right)>\frac{3}{2}C_{OPT}$。又因为 $t\left(S_2^n\right)=t\left(S_2^{n-1}\right)$，这与(5)式矛盾。

因此客户 n 的部分任务一定被分配给机器 M_2 加工。

根据 $Semi-online-T_1-T_2$，则有 $t\left(S_1^{n-1}\right)+a_np_n>\frac{3}{2}HT$ 和 $C_{SEMI}=t\left(S_2^n\right)>\frac{3}{2}C_{OPT}$。因此，

$$t\left(S_1^{n-1}\right)+a_np_n+t\left(S_2^n\right)>\frac{3}{2}\left(C_{OPT}+HT\right)\text{。}$$

根据算法 $Semi-online-T_1-T_2$，则有

$$t\left(S_1^n\right)+\left(a_n-q_n\right)p_n+t\left(S_1^n\right)>\frac{3}{2}\left(C_{OPT}+HT\right)\text{。}$$

又根据 $t\left(S_1^n\right)+t\left(S_2^n\right)=2HT$，则有

$$\left(a_n-q_n\right)p_n>\frac{3}{2}C_{OPT}-\frac{1}{2}HT\ge C_{OPT}$$

这与引理 1 矛盾。

第二种情况：客户 n 是银牌客户。

客户 n 是银牌客户，则客户 n 的全部任务都分配 M_1 加工。由 $T_1<T_2$ 及算法可知，$t\left(S_1\right)=L_1^n+T_1\le\frac{3}{2}HT\le\frac{3}{2}C_{OPT}$，因此 $C_{SEMI}=t\left(S_2\right)>\frac{3}{2}C_{OPT}$，又因为 $t\left(S_2\right)=t\left(S_2^n\right)=t\left(S_2^{n-1}\right)$，这与(5)式矛盾。

4. 半在线算法 $Semi-online-T_1$

在这一部分，假定银牌客户的任务加工时间总和 T_1 已知，下面提出一个竞争比为 3/2 的半在线算法。当客户 j 到达时，如果 $g_j=1$，则分配客户 j 的 a_j 个任务给机器 M_1；如果 $g_j=2$，则分配客户 j 的 q_j 个任务给机器 M_1，分配 a_j-q_j 个任务给机器 M_2。其中有

$$q_j=\left\lfloor\frac{L_1^{j-1}+T_1+a_jq_j-L_2^{j-1}}{2p_j}\right\rfloor. \tag{6}$$

算法 2： $Semi-online-T_1$

步骤 1：令 $j=1$；$L_1^{j-1}=L_2^{j-1}=0$；

步骤 2：如果客户 j 为银牌客户，分配客户 j 的 a_j 个任务给机器 M_1；

步骤 3：否则，分配客户 j 的 q_j 个任务给机器 M_2，分配 a_j-q_j 个任务给机器 M_1；

步骤 4：如果有其他客户，令 $j=j+1$，转到步骤 2。否则，结束算法。

引理 2 若金牌客户 j 的部分任务分配给机器 M_1，根据 q_j 的定义可知，则 $t\left(S_2^j\right)\le t\left(S_1^j\right)$。

证明：由公式(6)可知，$q_j\le\frac{L_1^{j-1}+T_1+a_jq_j-L_2^{j-1}}{2p_j}$，因此

$$t\left(S_2^{j-1}\right)+q_jp_j\le L_1^{j-1}+T_1+\left(a_j-q_j\right)p_j$$

即 $t\left(S_2^j\right)\le t\left(S_1^j\right)$。

定理 2 $Semi-online-T_1$ 是一个竞争比为 3/2 的半在线算法。

证明：由引理 2 和算法 $Semi-online-T_1$ 可知，$t\left(S_2\right)\le t\left(S_1\right)$。

假设 $t\left(S_1\right)>\frac{3}{2}C_{OPT}$，则有 $t\left(S_2\right)<\frac{1}{2}C_{OPT}$。

由 $t\left(S_1\right)>\frac{3}{2}C_{OPT}>\frac{3}{2}T_1>T_1$，则有至少一个等级为 2 的任务把任务分配给机器 M_1。

设 k 是最后一个把部分任务分配给 M_1 等级为 2 的客户。

当客户 k 到达时，有

$$t\left(S_2^k\right)=t\left(S_2^{k-1}\right)+q_kp_k\le t\left(S_2\right)<\frac{1}{2}C_{OPT} \tag{7}$$

根据 q_k 的定义可知，

$$t\left(S_2^{k-1}\right)+q_kp_k+p_k\ge t\left(S_1^{k-1}\right)+T_1+\left(a_k-q_k\right)p_k$$

又因为 $t\left(S_1\right)=t\left(S_1^{k-1}\right)+T_1+\left(a_k-q_k\right)p_k>\frac{3}{2}C_{OPT}$，则有

$$t\left(S_2^{k-1}\right)+q_kp_k+p_k>\frac{3}{2}C_{OPT},$$

又因为 $p_k \le C_{OPT}$，则有

$$t(S_2)=t\left(S_2^{k-1}\right)+q_k p_k > \frac{1}{2}C_{OPT},$$

与公式(7)矛盾。

5. 结束语

本文提出了两台平行机带等级约束的多重调度问题，当分别已知银牌客户和金牌客户的任务加工时间之和时，本文提出了一个竞争比为3/2的半在线算法。当已知银牌客户任务的加工时间之和时，本文提出了一个竞争比为3/2半在线算法。下一步，当已知金牌客户任务的加工时间之和时，我们希望给出一个半在线算法。

基金项目

楚雄师范学院研究项目(XJYB2004)资助。

参考文献

[1] Hwang, H.-C., Chang, S.Y. and Lee, K. (2004) Parallel Machine Scheduling under a Grade of Service Provision. *Computers and Operations Research*, **31**, 2055-2061. https://doi.org/10.1016/S0305-0548(03)00164-3

[2] Ou, J., Leung, J.Y.-T. and Li, C.-L. (2008) Scheduling Parallel Machines with Inclusive Processing Set Restrictions. *Naval Research Logistics*, **55**, 328-338.

[3] Woeginger, G.J. (2009) A Comment on Parallel-Machine Scheduling under a Grade of Service Provision to Minimize Makespan. *Information Processing Letters*, **109**, 341-342. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2008.11.008

[4] Park, J., Chang, S.Y. and Lee, K. (2006) Online and Semi-Online Scheduling of Two Machines under a Grade of Service Provision. *Operations Research Letters*, **34**, 692-696. https://doi.org/10.1016/j.orl.2005.11.004

[5] Jiang, Y. (2008) Online Scheduling on Parallel Machines with Two GoS Levels. *Journal of Combinatorial Optimization*, **16**, 28-38.

[6] Chen, X., Ding, N., Dosa, G., Han, X. and Jiang, H. (2015) Online Hierarchical Scheduling on Two Machines with Known Total Size of Low-Hierarchy Jobs. *International Journal of Computer Mathematics*, **92**, 873-881. https://doi.org/10.1080/00207160.2014.922682

[7] Luo, T.B. and Xu, Y.F. (2014) Semi-Online Scheduling on Two Machines with GoS Levels and Partial Information of Processing Time. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 576234. https://doi.org/10.1155/2014/576234

[8] Li, W., Liu, X., Zhang, X. and Cai, X. (2015) A Task-Type-Based Algorithm for the Energy-Aware Profit Maximizing Scheduling Problem in Heterogeneous Computing Systems. *Proceedings of the* 15*th IEEE/ACM International Symposium on Cluster*, *Cloud and Grid Computing*, Shenzhen, 4-7 May 2015, 1107-1110. https://doi.org/10.1109/CCGrid.2015.63

[9] Tarplee, K.M., Maciejewski, A.A. and Siegel, H.J. (2014) Energy-Aware Profit Maximizing Scheduling Algorithm for Heterogeneous Computing Systems. 14*th IEEE/ACM International Symposium on Cluster*, *Cloud and Grid Computing*, Chicago, 26-29 May 2014, 595-603. https://doi.org/10.1109/CCGrid.2014.43