

超球面上多元Lagrange插值问题研究

王心蕊, 马亚茹, 崔利宏*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年10月15日; 录用日期: 2023年11月16日; 发布日期: 2023年11月24日

摘要

以三元函数Lagrange插值研究结果为基础, 对 n 元函数Lagrange插值结点组的适定性问题进行了研究。提出了超球面上的Lagrange插值适定结点组的基本概念, 研究了超球面上的Lagrange插值适定结点组的某些基本理论和拓扑结构, 得到了构造超球面上的Lagrange插值适定结点组的添加超平面法。这些方法都是以迭加方式完成的, 因此便于在计算机上实现其构造过程。最后给出了具体实验算例。

关键词

多元Lagrange插值, 唯一可解结点组, 超球面, 迭加插值法

Research on Multivariate Lagrange Interpolation Problems on Hyperspheres

Xinrui Wang, Yaru Ma, Lihong Cui*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 15th, 2023; accepted: Nov. 16th, 2023; published: Nov. 24th, 2023

Abstract

Based on the research results of three-variable Lagrange interpolation, an investigation into the suitability of node sets for n -variable Lagrange interpolation was conducted. The fundamental concept of well-suited node sets for Lagrange interpolation on hyperspheres was proposed. Certain fundamental theories and topological structures of well-suited node sets for Lagrange interpolation on hyperspheres were studied, leading to the development of the method of adding hyperplanes for constructing well-suited node sets for Lagrange interpolation on hyperspheres. These methods are accomplished in an iterative manner, making them suitable for implementa-

*通讯作者。

tion on a computer. Finally, specific experimental examples are provided.

Keywords

Multivariate Lagrange Interpolation, The Only Solution Node Group, Hypersphere, Superposition Interpolation Method

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多元函数插值一直是计算数学领域一个重要的研究内容，有关多元函数插值的一个基本问题是多元插值函数唯一存在问题。国内外对这一问题研究主要有两个类别：一种是通过已知的结点组，构造次数尽可能低的插值适定多项式空间，另一种是给定插值空间构造唯一可解的插值适定结点组。目前有关在整个三维空间进行插值及关于定义于三维空间中代数流形的插值结果较系统，但对于在更高维空间进行插值以及高维空间中代数流形上插值结果相对较少。

超球面是指高于 2 维的球面，有关超球面数据插值与逼近在许多科学领域都有着广泛的应用，例如在物理建模中，超球面插值可以用于估计不同空间点之间的物理量，如温度、压力、密度等。在机器学习中，超球面插值可以用于处理高维特征数据，以改进模型的性能。天文学和宇宙学中的数据通常是高维的，例如星体的特性和坐标。医学图像处理中，超球面插值可用于脑部成像和心脏成像等领域。以往的学者研究出了许多在三维空间中球面插值的方法，如[1] [2]，但有关在超球面上插值逼近方法却很少。梁学章等人[3]讨论了代数超曲面上添加超平面选取唯一可解结点组的方法。徐艳等人[4]讨论了超球面上的切触有理插值。本文在以往研究球面上 Lagrange 插值适定性问题[5] [6]的基础上，进一步探讨了在超球面上的 Lagrange 插值适定性问题。

2. 基本定义和定理

本文主要研究 n 维球面 S_n 上唯一可解结点组(又叫插值适定结点组)的选取,为此本文引入以下基本定义。

设 m 为任意整数, n 为非负整数, 首先定义组合数

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} 0 & \text{当 } m < n \text{ 时} \\ \frac{m!}{n!(m-n)!} & \text{当 } m \geq n \text{ 时} \end{cases}$$

并且定义符号 $e_m^{(n)} = \binom{m+n}{n}$ 。再定义符号

$$e_m^{(n)}(2) = \binom{m+n}{n} - \binom{m+n-2}{n} = \frac{(m+n)!}{n!m!} - \frac{(n+m-2)!}{n!(m-2)!}$$

$P_m^{(n)}$ 代表所有次数不超过 m 的 n 元复系数多项式空间。

定义 1 ($P_m^{(n)}$ 上的插值适定结点组)

设 $A = \{Q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}}$ 是 n 维复数空间 C^n 中 $e_m^{(n)}$ 个互不相同的点。对于任意给定的复数组 $\{q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}}$ 寻找一个

多项式 $f(X) \in P_m^{(n)}$, 使之满足如下插值条件

$$f(Q^{(i)}) = q_i, i = 1, \dots, e_m^{(n)} \tag{1}$$

如果对于每一个任意给定的复数组 $\{q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}}$, 方程组(1)总存在唯一一组解, 则称该插值问题是关于多项式空间 $P_m^{(n)}$ 的适定插值问题, 并称相应的结点组 $A = \{Q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}}$ 为 $P_m^{(n)}$ 上的一个插值适定结点组。

定义 2 (超球面上的插值适定结点组)

设 $p(X) = 0$ 为 n 维复数空间 C^n 中一个超球面, $A = \{Q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(2)}$ 为超球面上 $e_m^{(n)}(2)$ 个互不相同的点, 对于任意给定的一个复数组 $\{q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(2)}$, 寻找一个多项式 $f(X) \in P_m^{(n)}$, 使之满足如下插值条件

$$f(Q^{(i)}) = q_i, i = 1, \dots, e_m^{(n)}(2) \tag{2}$$

如果对于每一个任意给定的复数组 $\{q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(2)}$, 方程组(2)总存在一组解, 则称结点组 $A = \{Q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(2)}$ 为沿超球面 $p(X) = 0$ 的一个 m 次插值适定结点组, 并简记为 $A \in I_m^{(n)}(p)$ ($I_m^{(n)}(p)$ 表示位于超球面 $p(X) = 0$ 上 m 次插值适定结点组的集合)。

定义 3 令 $p(X) = 0$ 是 $C^n (n > 2)$ 上次数为 k 的无重复因子的代数超曲面, 在 $p(X) = 0$ 上选取 $e_m^{(n)}(k)$ 不同的点 $\{Q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(k)}$, 如果有

$$g(X) \in P_m^{(n)}, g(Q_i) = 0, i = 1, \dots, e_m^{(n)}(k)$$

且 $g(X)$ 沿代数超曲面 $p(X) = 0$ 恒有 $g(X) \equiv 0$, 则 $\{Q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(k)}$ 为超曲面 $p(X) = 0$ 上的 m 次插值适定结点组。

定义 4 (理想)

一个子集 $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$, 如果其满足下述三个条件:

- 1) $0 \in I$;
- 2) 如果 $f, g \in I$, 则有 $f + g \in I$;

定义 5 (生成理想)

令 f_1, \dots, f_s 为 n 元多项式环中的 s 个多项式, 则定义:

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i, h_1, \dots, h_s \in K[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

显然, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 是一个理想, 称 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 是 f_1, \dots, f_s 的生成理想。

定义 6 (仿射簇、消逝理想)

设 $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 是一个理想, $V(I) = \{X \in C^n \mid f(X) = 0, \forall f \in I\}$ 为理想 I 的仿射簇。对于任意一个仿射簇 $V \in K^n$, 称 $I(V) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(X) = 0, \forall X \in V\}$ 为 V 的消逝理想。

定义 7 (根理想)

设 $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 是一个理想, 用 \sqrt{I} 表示 I 的根理想, 它是集合: $\{f \mid f^m \in I, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1\}$ 。

定理 1 C^n 中互不相同的点 $\{Q_i\}_{i=1}^{\mu}$ 能够做成 $P_m^{(n)}$ 的插值适定结点组的充要条件是 $\{Q_i\}_{i=1}^{\mu}$ 不落在任何一个 m 次代数超曲面上。

定理 2 (Hilbert 零点定理)

设 K 为代数闭域, 如果 $f, f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ 使得 $f \in I(V(\langle f_1, \dots, f_s \rangle))$, 则存在一个整数 $m \geq 1$ 使得 $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 。

定理 3 (强零点定理)

设 K 为代数闭域, $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ 是一个理想, 则 $I(V(I)) = \sqrt{I} \supset I$ 。

命题 1 设 I 为理想, V_1, V_2 是两个仿射簇, 则 $V_1 \subset V_2 \Rightarrow I(V_1) \supset I(V_2)$ 。

命题 2 若 $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, $I = \langle f \rangle$ 是由 f 生成的素理想, 若 $f = f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s}$ 是 f 不可约多项式的分解, 则 $\sqrt{I} = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ 。特别地, 如果 f 是一个没有重复分量的代数多项式, 则 $\sqrt{I} = I$ 。(注: 素理想是由一个元素生成的理想。

本文所获得研究结果如下:

定理 4 设 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{e_m^{(n)}}$ 是 $P_m^{(n)}$ 的一个插值适定结点组, $B = \{Q_i\}_{i=1}^{e_{m+2}^{(n)(2)}}$ 是 n 维球面 $p(X) = 0$ 的 $m + 2$ 次插值适定结点组, 则 $A \cup B$ 组成 $P_{m+2}^{(n)}$ 的一个插值适定结点组。

此定理为构造 $P_m^{(n)}$ 中插值适定结点组的添加超球面法。

定理 5 设 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{e_m^{(n)(2)}}$ 是 n 维球面 $p(X) = 0$ 上的 m 次插值适定结点组, 超平面 $h(X) = 0$ 不经过这 $e_m^{(n)(2)}$ 个点, 与球面 $p(X) = 0$ 相交与 $n - 1$ 维球面 $V(p, h)$ ($V(p, h)$ 表示 $p(X)$ 与 $h(X)$ 的共同零点的集合)。在 $n - 1$ 维球面 $V(p, h)$ 上任取一个沿该球面的 $m + 1$ 次插值适定结点组 $B \in I_{m+1}^{n-1}(S_{n-1})$, 则 $A \cup B$ 构成 n 维球面 S_n 上的 $m + 1$ 次插值适定结点组, 即 $A \cup B \in I_{m+1}^{(n)}(S_n)$ 。

此定理为构造沿超球面插值适定结点组的添加超平面法。

3. 定理的证明

为了证明本文的主要结果, 首先给出如下引理。

引理 1 位于 n 维球面 $p(X) = 0$ 上的点组 $\{Q_i\}_{i=1}^{e_m^{(n)(2)}}$ 能够做成沿 n 维球面 $p(X) = 0$ 的 m 次插值适定结点组的充要条件是: 对于任何一个满足零插值条件

$$g(Q_i) = 0, i = 1, \dots, e_m^{(n)(2)}$$

的多项式 $g(X) \in P_m^{(n)}$, 均存在如下分解:

$$g(X) = p(X)r(X)$$

其中, 当 $m \geq 2$ 时, $r(X) \in P_{m-2}^{(n)}$, 当 $m < 2$ 时, $r(X) \equiv 0$ 。

引理 1 证明

只需证明必要性, 设 $I_1 = \langle p \rangle$, $I_2 = \langle g \rangle$ 。因为 $\{Q_i\}_{i=1}^{e_m^{(n)(2)}}$ 是 n 维球面 $p(X) = 0$ 的插值适定结点组, 且 $g(Q_i) = 0, i = 1, \dots, e_m^{(n)(2)}$, 那么由定义 3, 沿 $p(X) = 0$ 恒有 $g(X) = 0$, 故 $V(I_1) \subset V(I_2)$ 。由命题 1, 有 $I(V(I_1)) \supset I(V(I_2))$ 。由于 $p(X) = 0$ 是无重复分量的代数超曲面, 由定理 3 和命题 2, 有 $I(V(I_1)) = \sqrt{I_1} = I_1$, 且 $I(V(I_2)) = \sqrt{I_2} = I_2$, 因此, $I_1 \supset I_2$ 。由理想的定义, 存在 $r(X) \in P_{m-2}^{(n)}$ 使得 $g(X) = p(X)r(X)$ 。

引理 2 设超平面 $h(X) = h(x_1, \dots, x_n) = 0$ 与 n 维球面 $p(X) = p(x_1, \dots, x_n) = 0$ 相交于 $n - 1$ 维球面 $V(p, h)$ ($V(p, h)$ 表示 $p(X)$ 与 $h(X)$ 的共同零点的集合), 对任意 $g \in P_m^n$, 如果 $V(g) \supset V(p, h)$ ($V(g)$ 表示多项式 $g(X) = 0$ 的零点集), 则存在多项式 a, b 使得 $g = ap + bh$, 多项式 ap, bh 的全次数 $\leq n$ 。

引理 2 证明

将 $h(X)$ 转化成 $h(X) = x_n - l(x_1, \dots, x_{n-1})$, 令 $(p)_h$ 表示 p 除以 h 的余数, 即 $(p)_h = p - th \in K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ 。

对任意 $q = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in V((p)_h) \subset \mathbb{C}^{n-1}$, 设 $q' = (a_1, \dots, a_{n-1}, I(a_1, \dots, a_{n-1})) \in \mathbb{C}^n$, 则

$$p(q') - th(q') = (p - th)(q) = 0.$$

因为 $h(q') = 0$, 因此 $p(q') = 0$. 故 $q' \in V(p, h)$. 由条件 $V(g) \supset V(p, h)$, 由 $g(q') = 0$ 且

$$(g)_h(q) = (g)_h(q') = g(q') - t_1 h(q') = 0.$$

由上式可知,

$$V((g)_h) \supset V((p)_h) \tag{3}$$

由于 $(p)_h$ 是无重复分量的代数超曲面, 故 $\sqrt{\langle (p)_h \rangle} = \langle (p)_h \rangle$, 则由(3)和命题 1、定理 3, 有 $I(V(\langle (g)_h \rangle)) \subset I(V(\langle (p)_h \rangle))$ 且 $I(V(\langle (g)_h \rangle)) \supset \langle (g)_h \rangle$, $I(V(\langle (p)_h \rangle)) = \langle (p)_h \rangle$. 因此, $(g)_h \in \langle (p)_h \rangle$, 即存在 $c \in P_m^{(n)}$, 使得 $g - t_1 h = c(p - th)$, 其中, t_1 的次数 $\leq n - 1$, t 次数 ≤ 1 , 设 $a = c$, $b = t_1 - ct$, 则 $g = ap + bh$, 多项式 ap, bh 的全次数 $\leq n$.

定理 4 证明

$$A \cup B \text{ 中点的个数为 } \binom{m+n}{n} + \binom{m+2+n}{n} - \binom{m+n}{n} = \binom{m+2+n}{n}, \text{ 等于空间 } P_{m+2}^{(n)} \text{ 的维数.}$$

下面采用反证法证明.

假设 $C = A \cup B$ 不是空间 $P_{m+2}^{(n)}$ 的插值适定结点组, 由定理 1 知, 必存在不恒为零的多项式 $g(X) \in P_{m+2}^{(n)}$ 使其满足对任意 $Q \in A \cup B$, $g(Q) = 0$. 因为 B 是 $p(X) = 0$ 的 $m + 2$ 次插值适定结点组, 由引理 1, 存在 $r(X) \in P_m^{(n)}$ 使得 $g(X) = p(X)r(X)$. 又因为 $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in A$. 所以 $0 = g(Q_i) = p(Q_i)r(Q_i), \forall Q_i \in A$. 但 $p(Q_i) \neq 0, \forall Q_i \in A$. 所以 $r(Q_i) = 0, \forall Q_i \in A$. 而 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{e_m^{(n)}}$ 是 $P_m^{(n)}$ 的一个插值适定结点组, 且 $r(X) \in P_m^{(n)}$. 所以 $r(X) \equiv 0$. 进而 $g(X) \equiv 0$. 这与假设相矛盾, 故 C 是 $P_{m+2}^{(n)}$ 的插值适定结点组.

定理 5 证明

选取多项式 $g \in P_m^n$, 使其满足对任意 $Q \in A \cup B$, $g(Q) = 0$. 因为 B 为 $V(p, h)$ 上的插值适定结点组, 则 $V(g) \supset V(p, h)$. 由引理 2, 存在多项式 a, b 使得

$$g = ap + bh \tag{4}$$

因为 A 为 $p(X) = 0$ 上插值适定结点组, 所以 $p(q) = 0, \forall q \in A$. 又因为 $g(q) = 0, h(q) \neq 0$, 所以 $b(q) = 0$, 由引理 1, 存在多项式 c 使得 $b = cp$. 将等式代入(4)则 $g = ap + cph = (a + ch)p$. 由引理 1, 则 $A \cup B$ 为球面 $p(X) = 0$ 上的 $m + 1$ 次插值适定结点组.

下面给出定理 5 算法步骤:

1) 选取在三维空间中 2 维球面 S_2 上插值适定结点组具体做法如下:

第 0 步: 任取 S_2 上一点 Q_0 作为结点, Q_0 构成 S_2 上的零次插值适定结点组;

第 1 步: 不经过 Q_0 , 做平面 f_1 与 S_2 相交于圆周 $S_1^{(1)}$, 任取 $S_1^{(1)}$ 上 3 个不同的点作为新增加的结点(由 [6], 这三个点为 $S_1^{(1)}$ 上一次插值适定结点组);

.....

第 m 步: 不经过 Q_0 , 做平面 f_m 与 S_2 相交于圆周 $S_1^{(m)}$, 任取 $S_1^{(m)}$ 上 $2m + 1$ 个不同的点作为新增加的结点(由 [6] 这 $2m + 1$ 个点为 $S_1^{(m)}$ 上 m 次插值适定结点组);

第 m 步完成之后所得到的所有结点即可构成球面 S_2 上的 m 次插值适定结点组.

2) 选取沿四维空间中球面 S_3 插值适定结点组具体做法如下:

第 0 步: S_3 上任选一点 Q_0 作为结点, Q_0 构成 S_3 上的零次插值适定结点组;

第 1 步: 不经过 Q_0 , 做超平面 f_1 与 S_3 相交于 2 维球面 $S_2^{(1)}$, 取 $S_2^{(1)}$ 上一个一次插值适定结点组 $A^{(1)}$ 作为新增加的点, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)}$ 构成 S_3 上的一次插值适定结点组。

.....

第 m 步: 不经过 Q_0 及已经选好的超平面 f_1, \dots, f_{m-1} , 做一个新的超平面 f_m 使其与 S_3 相交于 2 维球面 $S_2^{(m)}$, 取 $S_2^{(m)}$ 上 m 次插值适定结点组 $A^{(m)}$, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)} \cup \dots \cup A^{(m)}$ 构成 S_3 上的 m 次插值适定结点组;

第 m 步完成之后所得到的所有结点即可构成球面 S_3 上的 m 次插值适定结点组。

以此类推, 可得到 n 维空间中球面 S_n 插值适定结点组具体做法。

3) 选取沿 $n+1$ 维空间中球面 S_n 插值适定结点组具体做法如下:

第 0 步: n 维球面 S_n 上任选一点 Q_0 作为结点, Q_0 构成 S_n 上的零次插值适定结点组;

第 1 步: 不经过 Q_0 , 做超平面 f_1 与 S_n 相交于 $n-1$ 维球面 $S_{n-1}^{(1)}$, 取 $S_{n-1}^{(1)}$ 上一个一次插值适定结点组 $A^{(1)}$ 作为新增加的点, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)}$ 构成 S_n 上的一次插值适定结点组;

第 2 步: 不经过 Q_0 及 f_1 , 做超平面 f_2 与 S_n 相交于 $n-1$ 维球面 $S_{n-1}^{(2)}$, 取 $S_{n-1}^{(2)}$ 上二次插值适定结点组 $A^{(2)}$, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)} \cup A^{(2)}$ 构成 S_n 上的二次插值适定结点组;

.....

第 m 步: 不经过 Q_0 及已经选好的超平面 f_1, \dots, f_{m-1} , 做一个新的超平面 f_m 使其与 S_n 相交于 $n-1$ 维球面 $S_{n-1}^{(m)}$, 取 $S_{n-1}^{(m)}$ 上 m 次插值适定结点组 $A^{(m)}$, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)} \cup \dots \cup A^{(m)}$ 构成 S_n 上的 m 次插值适定结点组;

第 m 步完成之后所得到的所有结点即可构成 n 维球面 S_n 上的 m 次插值适定结点组。根据构造出的插值适定结点组, 由定义 2, 对于任给的复数组 $\{q^{(i)}\}_{i=1}^{e_m^{(n)}(2)}$, 解方程组(2), 都可以得到唯一的插值多项式 $f(X) \in P_m^{(n)}$ 。

由上述算法步骤, 再结合定理 4 中给出的 $P_m^{(n)}$ 中插值适定结点组的添加超球面法, 可以构造出多项式空间 $P_m^{(n)}$ (m 为偶数)的插值适定结点组。

下面给出定理 4 算法步骤:

$P_m^{(n)}$ (m 为偶数)中插值适定结点组具体做法如下:

第 0 步: C^n 中任选一点 Q_0 作为结点, Q_0 构成 $P_0^{(n)}$ 的一个插值适定结点组;

第 1 步: 不经过 Q_0 , 做 n 维空间中 $n-1$ 维球面 $S_{n-1}^{(1)}$, 取 $S_{n-1}^{(1)}$ 上一个二次插值适定结点组 $A^{(1)}$ 作为新增加的点, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)}$ 构成 $P_2^{(n)}$ 插值适定结点组;

第 2 步: 不经过 Q_0 和 $S_{n-1}^{(1)}$, 做 n 维空间中 $n-1$ 维球面 $S_{n-1}^{(2)}$, 取 $S_{n-1}^{(2)}$ 上一个四次插值适定结点组 $A^{(2)}$ 作为新增加的点, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)} \cup A^{(2)}$ 构成 $P_4^{(n)}$ 插值适定结点组;

.....

第 m 步: 不经过 Q_0 及已经选好的超球面 $S_{n-1}^{(1)}, \dots, S_{n-1}^{(N-1)}$, 做一个新的超球面 $S_{n-1}^{(N)}$, 取 $S_{n-1}^{(N)}$ 上 $2N$ 次插值适定结点组 $A^{(N)}$, 则 $\{Q_0\} \cup A^{(1)} \cup \dots \cup A^{(N)}$ 构成 $P_{2N}^{(n)}$ 的一个插值适定结点组。

4. 实验算例

下面给出关于定理 4 的例子。

例 1 设被插值函数为 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z}}$, 球面 S 方程为 $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 。在球面外部取一点

$Q_0 = (0,1,1)$, 则该点为 $P_0^{(3)}$ 的插值适定结点组。在球面上取互异的 9 个点, 见图 1, $Q_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $Q_3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, $Q_4 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$, $Q_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $Q_6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $Q_7 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $Q_8 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)$, $Q_9 = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$ 。

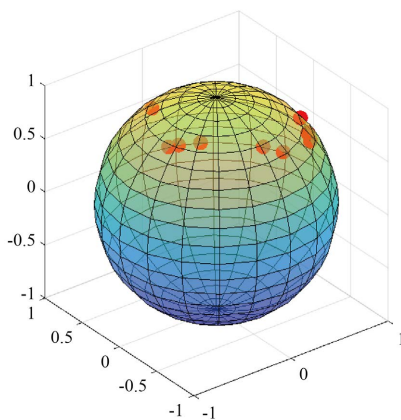


Figure 1. Spherical point sampling visualization
图 1. 球面取点效果图

这九个点是定义于球面 S 的一个 $0+2$ 次插值适定结点组, 则由定理 4, 点组 $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9\}$ 构成 $P_2^{(3)}$ 的插值适定结点组。设多项式为 $f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$, 得到的方程组为 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{15}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{16} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{15}{16} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{16} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{3} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{4\sqrt{19}}{19} \\ \frac{1}{19} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得 $f(x, y, z) = -0.4572x^2 - 0.4572y^2 + 0.1836z^2 + 0.411xz + 0.411yz - 0.8875z + 1.4572$,

我们取点 $(1,1,1), (1,0,1)$, 插值结果分别为 0.7071、0.6609, 而其精确值分别为 $\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}$, 误差分别为

$$t_1 = \left| 0.7071 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \approx 6.7811 \times 10^{-6}, \quad t_2 = \left| 0.6609 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \approx 0.08355$$

下面给出关于定理 5 的例子

例 2 设球面 S 的方程为: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $Q_0(\sqrt{2}, 0, 0)$ 是球面 S 上的一个零次插值适定结点组, 做一个不经过 Q_0 点的平面 $x=0$ 与 S 相交于圆周 $C: y^2 + z^2 = 2$, 在 C 上任取 3 个互异点 $Q_1(0, 1, 1), Q_2(0, 1, -1), Q_3(0, -1, 1)$, 由定理 5 知 $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ 是关于球面 S 的一个一次插值适定结点组。例如: 任取一个实数组 $\{-1, 0, 0, 0\}$, 我们以 $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ 作为插值结点组就可以获得一次插值函数为 $p(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 。

5. 结论

本文首先介绍了 Lagrange 插值适定结点组的相关定义与基本定理, 同时重点研究了定义于超球面上 Lagrange 插值适定结点组, 提出构造超球面上 Lagrange 插值的添加超平面法, 最后给出实验算例说明并验证有关结论。本文创新点为给出定义于超球面上 Lagrange 插值适定结点组结果, 其对生产生活有着重要的实用价值。

参考文献

- [1] Liang, X.Z., Feng, R.Z. and Cui, L.H. (2000) Lagrange Interpolation on a Sphere. *Northeastern Mathematical Journal*, No. 2, 243-252.
- [2] 崔利宏, 姜莹莹, 王星, 等. 球面上 Lagrange 插值问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2011, 34(4): 416-418.
- [3] 梁学章, 张明, 张洁琳, 等. 高维空间中代数流形上多项式空间的维数与 Lagrange 插值适定结点组的构造[J]. 吉林大学学报(理学版), 2006(3): 309-317.
- [4] 许艳, 郭清伟. 超球面上的切触有理插值[J]. 大学数学, 2015, 31(2): 5-9.
- [5] 李天平, 席小忠. N 维欧氏空间上 2 次 $n-1$ 维流形及性质[J]. 赣南师范学院学报, 2000(3): 12-14.
- [6] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.