Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3481-3489
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312362

$\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面

赵 珍*, **杨 超**†

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月12日；发布日期：2023年12月21日

摘 要

本文主要研究乘积空间 $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面，给出超曲面是 $\lambda-$双调和的等价方程，并对半平行 $\lambda-$双调和超曲面进行分类。

关键词

λ-双调和超曲面，乘积空间，旋转超曲面，半平行超曲面

$\lambda-$Biharmonic Hypersurfaces in Product Spaces $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$

Zhen Zhao*, **Chao Yang**†

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 12th, 2023; published: Dec. 21st, 2023

Abstract

In this paper, we study $\lambda-$biharmonic hypersurfaces in product spaces $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$, give the equivalent equation and classify semi-parallel $\lambda-$biharmonic hypersurfaces.

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 赵珍, 杨超. $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面[J]. 理论数学, 2023, 13(12): 3481-3489.
DOI: 10.12677/pm.2023.1312362

Keywords

$\lambda-$Biharmonic Hypersurfaces, Product Space, Rotation Hypersurfaces, Semi-Parallel Hhypersurfaces

1. 引言

设 $\varphi: M^m \to N^{m+1}$ 是 m 维黎曼流形 M^m 到 $m+1$ 维黎曼流形 N^{m+1} 的一个映照, 称双能量泛函 $E_2(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M|\tau(\varphi)|^2dv$ 与能量泛函 $E(\varphi)=\frac{1}{2}\int_M|d(\varphi)|^2dv$ 的线性组合

$$E_{2,\lambda}(\varphi)=E_2(\varphi)+\lambda E(\varphi),\quad \lambda\in R$$

的临界映照为 $\lambda-$双调和映照, 其 Euler-Lagrange 方程为:

$$\tau_2(\varphi)-\lambda\tau(\varphi)=0, \tag{1}$$

其中

$$\tau(\varphi)=tr(\nabla d\varphi),$$

$$\tau_2(\varphi)=tr(\nabla^\varphi\nabla^\varphi\tau(\varphi)-\nabla^\varphi_{\nabla^M}\tau(\varphi))-tr\widetilde{R}(d\varphi,\tau(\varphi))d\varphi,$$

∇^φ 和 ∇ 分别为向量丛 $\varphi^{-1}TN^{m+1}$ 上的诱导联络和 M^m 上的 Levi-Civita 联络, $\widetilde{R}$ 是 N^{m+1} 上的曲率算子.

设 M^m 为 N^{m+1} 中的超曲面, 若超曲面 M^m 的等距浸入满足 (1) 式, 则称 M^m 为 $\lambda-$双调和超曲面. 当外围空间 N^{m+1} 具有常截面曲率 c 时, (1) 式等价于 $\Delta H=(mc-\lambda)H$, 此类超曲面也称为具有恰当平均曲率向量场的超曲面.

1988年, 陈邦彦发起了欧氏空间中的 $\lambda-$双调和超曲面的分类问题的研究, 证明了 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面或极小, 或局部等距于圆柱面(见 [1]). 紧接着, A. Ferrández 和 P. Lucas 证得欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+1}$中至多有两个不同主曲率的此类 $\lambda-$双调和超曲面或极小, 或局部等距于 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{S}^{m-k}(a)$(见 [2]). 后来, 陈邦彦和 O. J. Garray 证得欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+1}$中此类非极小 $\delta(2)$ 理想超曲面局部等距于 $\mathbb{S}^{m-1}(a)\times\mathbb{R}$(见 [3]). 2016年, 独力在文献 [4] 研究了非平坦空间型 $\mathbb{S}^{m+1}$ 和 $\mathbb{H}^{m+1}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面, 给出了至多有两个不同主曲率的此类超曲面的分类结果. 自然, 研究乘积空间

$\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面的分类问题也是有意义的.

本文主要研究乘积空间 $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面, 给出 $\lambda-$双调和超曲面的等价方程, 并利用此方程得到 3 维及 3 维以上半平行 $\lambda-$双调和超曲面的一个分类结果.

2. 预备知识

设 M^m 是一个 m 维黎曼流形, 用 $\Gamma(M)$ 和 $C^\infty(M)$ 分别表示 M^m 上的全体光滑切向量场和光滑函数构成的空间. 对于任意的 $X, Y, Z, W \in \Gamma(M)$, 定义映射

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to C^\infty(M),$$

$$(X, Y, Z, W) \longmapsto \langle R(X, Y)Z, W\rangle,$$

称 R 为 M^m 的曲率张量, 其中

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

设 M^m 是黎曼空间 N^{m+1} 中的一个超曲面, ∇ 和 $\widetilde{\nabla}$ 分别表示黎曼流形 M^m 和黎曼流形 N^{m+1} 的 Levi-Civita 联络. 超曲面 M^m 的 Gauss 公式: 对任意的 $X, Y \in \Gamma(M)$, 有

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y),$$

其中 B 为超曲面 M^m 的第二基本形式. 设 ξ 是超曲面 M^m 的一个单位法向量场, A 表示超曲面 M^m 上沿 ξ 方向的形状算子, 则有 Weingarten 公式

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A(X).$$

超曲面 M^m 的第二基本形式 B 和形状算子 A 满足关系:

$$\langle B(X, Y), \xi\rangle = \langle A(X), Y\rangle.$$

定义超曲面 M^m 的平均曲率向量 $\vec{H}$ 为

$$\vec{H} = \frac{1}{m} trB,$$

称 $\vec{H}$ 的模长为平均曲率, 记作 H, 则有 $\vec{H} = H\xi$.

若对任意的 $X, Y, U, V \in \Gamma(M)$, 有

$$B(R(X, Y)U, V) + B(U, R(X, Y)V) = 0,$$

则称该超曲面是半平行超曲面.

设 M^m 为乘积空间 $L^m(c)\times\mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和超曲面, 其中 $L^m(c)$ 表示截曲率为常数 c 的 m 维黎曼流形. 当 $c=1$ 时, $L^m(c)$ 是 m 维球空间 $\mathbb{S}^m$; 当 $c=-1$ 时, $L^m(c)$ 是 m 维双曲空间 $\mathbb{H}^m$. 乘积空间 $L^m(c)\times\mathbb{R}$ 的黎曼曲率张量可以表示为

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z=&c\{\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y-\langle Y,\partial_t\rangle\langle Z,\partial_t\rangle X+\langle X,\partial_t\rangle\langle Z,\partial_t\rangle Y+\langle X,Z\rangle\langle Y,\partial_t\rangle\partial_t-\\&\langle Y,Z\rangle\langle X,\partial_t\rangle\partial_t\},\end{aligned}\tag{2}$$

其中 X,Y,Z 是 $L^m(c)\times\mathbb{R}$ 上的光滑切向量场, ∂_t 表示 $\mathbb{R}$ 上的单位切向量场, 可以分解为

$$\partial_t=T+\cos\alpha\xi,$$

α 表示 ∂_t 与单位法向量场 ξ 的夹角, 有 $\cos\alpha=\langle\partial_t,\xi\rangle$.

根据文献 [5], 对于乘积空间 $\mathbb{S}^m\times\mathbb{R}$ 中的旋转超曲面 M^m, 轮廓曲线可参数化为

$$\gamma(s)=(\cos s,0,\cdots,0,\sin s,h(s)),$$

旋转超曲面 M^m 可参数化为

$$f(s,v_1,\cdots,v_{m-1})=(\cos s,\varphi_1(v_1,\cdots,v_{m-1})\sin s,\cdots,\varphi_m(v_1,\cdots,v_{m-1})\sin s,h(s)),$$

有两个重数分别为 1 和 $m-1$ 的互异主曲率,

$$\lambda_1=-\frac{h''(s)}{(1+h'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{与}\ \lambda_2=-\frac{h'(s)\cot s}{(1+h'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}.\tag{3}$$

对于乘积空间 $\mathbb{H}^m\times\mathbb{R}$ 中的旋转超曲面 M^m, 轮廓曲线可参数化为

$$\gamma(s)=(\cos a(s),0,\cdots,0,\sin a(s),h(s)),$$

旋转超曲面 M^m 可参数化为

$$\begin{gathered}f(s,v_1,\cdots,v_{m-1})=(\varphi_1(v_1,\cdots,v_{m-1})\cos a(s),\cdots,\varphi_m(v_1,\cdots,v_{m-1})\cos a(s),\\ \sin a(s),h(s)),\end{gathered}$$

有两个重数分别为 1 和 $m-1$ 的互异主曲率,

$$\lambda_1=-\frac{h''(s)}{(1+h'(s)^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{与}\ \lambda_2=-\frac{h'(s)\tan a(s)}{(1+h'(s)^2)^{\frac{1}{2}}}.\tag{4}$$

3. λ-双调和超曲面的方程

定理 3.1 设 $\varphi:M^m\to N^{m+1}$ 是从黎曼流形 M^m 到黎曼流形 N^{m+1} 的一个等距浸入, 则超曲

面 M^m 是 $\lambda-$双调和的当且仅当

$$\begin{cases} \Delta H - H|A|^2 + H\widetilde{Ric}(\xi,\xi) - \lambda H = 0, \\ 2A(\nabla H) + \frac{m}{2}\nabla H^2 - 2H(\widetilde{Ric}(\xi))^T = 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\widetilde{Ric}$ 表示 N 上的 Ric 曲率算子, 定义为 $\langle \widetilde{Ric}(Z), W\rangle = \widetilde{Ric}(Z,W)$.

证明 选取 M^m 上的局部正交切标架 $\{e_i\}$, $i = 1,\cdots,m$, 则外围空间的局部正交切标架可表示为 $\{d\varphi(e_1),\cdots,d\varphi(e_m),\xi\}$. 用 $\tilde{R}$ 表示外围空间 N^{m+1} 上的黎曼曲率算子, 考虑到 φ 的张力场 $\tau(\varphi) = mH\xi$, 计算得

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) &= tr(\nabla^\varphi\nabla^\varphi\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M}\tau(\varphi)) - tr\widetilde{R}(d\varphi,\tau(\varphi))d\varphi \\ &= \sum_{i=1}^m \{\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}(mH\xi) - \nabla^\varphi_{\nabla_{e_i}e_i}(mH\xi) - \widetilde{R}(d\varphi(e_i),mH\xi)d\varphi(e_i)\} \\ &= m\sum_{i=1}^m \{e_ie_i(H)\xi + 2e_i(H)\widetilde{\nabla}_{e_i}\xi + H\widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}_{e_i}\xi - (\nabla_{e_i}e_i)(H)\xi - H\widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\xi\} \\ &\quad - mH\sum_{i=1}^m \widetilde{R}(d\varphi(e_i),\xi)d\varphi(e_i) \\ &= m(\Delta H)\xi - 2mA(\nabla H) - mH\Delta^\varphi\xi - mH\sum_{i=1}^m \widetilde{R}(d\varphi(e_i),\xi)d\varphi(e_i). \end{aligned}$$

进而有

$$\tau_2(\varphi) - \lambda\tau(\varphi) = m[(\Delta H)\xi - 2A(\nabla H) - H\Delta^\varphi\xi - H\sum_{i=1}^m \widetilde{R}(d\varphi(e_i),\xi)d\varphi(e_i) - \lambda H\xi].$$

又因为

$$\sum_{i,k=1}^m \langle\widetilde{R}(d\varphi(e_i),\xi)d\varphi(e_i),e_k\rangle e_k = -[\widetilde{Ric}(\xi,e_k)]e_k = -(\widetilde{Ric}(\xi))^\top,$$

$$\sum_{i=1}^m \langle\widetilde{R}(d\varphi(e_i),\tau(\varphi))d\varphi(e_i),\xi\rangle = -mH\widetilde{Ric}(\xi,\xi),$$

$$\begin{aligned} \langle\Delta^\varphi\xi,\xi\rangle &= \sum_{i=1}^m \langle -\widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}_{e_i}\xi + \widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\xi,\xi\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle\widetilde{\nabla}_{e_i}\xi,\widetilde{\nabla}_{e_i}\xi\rangle = |A|^2, \end{aligned}$$

所以 $\tau_2(\varphi) - \lambda\tau(\varphi)$ 的法向和切向部分分别为

$$\langle\tau_2(\varphi) - \lambda\tau(\varphi),\xi\rangle\xi = m(\Delta H - H|A|^2 + H\widetilde{Ric}(\xi,\xi) - \lambda H)\xi,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\langle\tau_2(\varphi)-\lambda\tau(\varphi),e_k\rangle e_k=-m(2A(\nabla H)+\frac{m}{2}(\nabla H^2)-2H(\widetilde{Ric}(\xi))^{\top}).$$

超曲面 M^m 是 $\lambda-$双调和的等价于 $\tau_2(\varphi)-\lambda\tau(\varphi)$ 的以上切向部分和法向部分均为零, 即 (5) 式成立.

定理 3.2 乘积空间 $L^m(c)\times\mathbb{R}$ 中的超曲面 M^m 是 $\lambda-$双调和的当且仅当

$$\begin{cases}\Delta H-H[|A|^2-c(m-1)\sin^2\alpha+\lambda]=0,\\ A(\nabla H)+\frac{m}{2}H\nabla H+c(m-1)\cos\alpha HT=0.\end{cases}\tag{6}$$

证明 选取 M^m 上的局部正交切标架 $\{e_i\}$, $i=1,\cdots,m$. 由 (2) 计算可得

$$\widetilde{Ric}(\xi,\xi)=\sum_{i=1}^{m}\langle\widetilde{R}(e_i,\xi)\xi,e_i\rangle=c(m-1)\sin^2\alpha$$

和

$$(\widetilde{Ric}(\xi))^T=\sum_{i=1}^{m}\langle\widetilde{R}(e_i,\xi)e_k,e_i\rangle e_k=-c(m-1)\cos\alpha T.$$

将以上两式代入 (5) 式, 定理得证.

4. 主要定理及其证明

定理 4.1 设 M^m 是 $L^m(c)\times\mathbb{R}$ 中的 $\lambda-$双调和旋转超曲面, 则有

$$(\frac{m}{2}H-\alpha'(s)\cos\alpha)H'-c(m-1)\sin\alpha H=0.\tag{7}$$

证明 类似文献 [5] 中的做法, 令

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{1+h'(s)^2}}df(\partial_s),$$

$$e_i=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 s(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi_k}{\partial v_i})}}df(\partial_i),\quad 2\le i\le m,$$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{1+h'(s)^2}}(-h'(s)\sin s,\ \varphi_1 h'(s)\cos s,\ \cdots,\ \varphi_m h'(s)\cos s,\ -1),$$

则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 为超曲面 M^m 上的局部正交切标架场, ξ 为单位法向量场. 计算得

$$\cos\alpha(s)=\langle\xi,\partial_t\rangle=-\frac{1}{\sqrt{1+h'(s)^2}},\ \sin\alpha(s)=\frac{h'(s)}{\sqrt{1+h'(s)^2}},\tag{8}$$

$$A(e_1)=\lambda_1e_1,\ A(e_i)=\lambda_ie_i,\quad 2\le i\le m.$$

当 $c=1$ 时,有

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha'(s)\cos\alpha, \\ \lambda_2 = -\sin\alpha\cot s, \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{m}(\lambda_1 + (m-1)\lambda_2) = -\frac{1}{m}(\alpha'(s)\cos\alpha + (m-1)\sin\alpha\cot s). \tag{9}$$

当 $c=-1$ 时,有

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha'(s)\cos\alpha, \\ \lambda_2 = -\sin\alpha\tan a(s), \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{m}(\lambda_1 + (m-1)\lambda_2) = -\frac{1}{m}(\alpha'(s)\cos\alpha + (m-1)\sin\alpha\tan a(s)).$$

因 H 沿 $e_2, e_3, \cdots, e_m$ 方向的偏导函数都等于 0, 所以

$$\nabla H = \sum_{i=1}^{m} e_i(H)e_i = e_1(H)e_1.$$

由此, (6) 式中第二个等式可表示为

$$e_1(H)\lambda_1 e_1 + \frac{m}{2}He_1(H)e_1 + c(m-1)\cos\alpha HT = 0.$$

结合 $\langle T, T\rangle = \sin^2\alpha$, 可设 $T = \sin\alpha e_1$, 代入上式可得

$$e_1(H)\lambda_1 e_1 + \frac{m}{2}He_1(H)e_1 + c(m-1)\cos\alpha\sin\alpha He_1 = 0.$$

又因 $e_1(H) = -\cos\alpha H'$, 故上式转化为

$$(\frac{m}{2}H + \lambda_1)H' - c(m-1)\sin\alpha H = 0,$$

即此定理得证.

定理 4.2 $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行 $\lambda-$双调和超曲面 M^m 或是全脐的, 或是一个直柱体.

证明 根据文献 [6], $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行超曲面 M^m 是以下情况中的一种:

(I) M^m 是全脐的;

(II) M^m 是满足 $\lambda_1\lambda_2 = -\cos^2\alpha$ 的旋转超曲面的一个开部, 其中 λ_1 与 λ_2 是超曲面 M^m 的互异主曲率;

(III) $M^m \subset \tilde{M}^{m-1} \times \mathbb{R}$, 其中 $\tilde{M}$ 是 $\mathbb{S}^m$ 中半平行超曲面.

假设 $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行 $\lambda-$双调和超曲面 M^m 是满足 $\lambda_1\lambda_2 = -\cos^2\alpha$ 的旋转超曲面的开部分, 则有

$$\lambda_1 = -\alpha'(s)\cos\alpha, \lambda_2 = -\sin\alpha\cot s.$$

令 $u = -\sin\alpha$,代入 $\lambda_1\lambda_2 = -\cos^2\alpha$ 可得

$$uu'\cot s = u^2 - 1,$$

这个方程的解为 $u = \pm\sqrt{1 + C\sec^2(s)}$. 然而, 这个解不满足在 $S^m \times \mathbb{R}$ 中的旋转超曲面 λ-双调和方程 (7) 式, 即 (7) 式不成立, 矛盾. 因此 $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行 $\lambda-$双调和超曲面 M^m 是全脐的或者是一个直柱体.

定理 4.3 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行 $\lambda-$双调和超曲面 M^m 或是极小的, 或是一个直柱体.

证明 根据文献 [7] , $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ 中的半平行超曲面 M^m 是以下情况中的一种:

(I) M^m 是全脐的;

(II) M^m 是满足 $\lambda_1\lambda_2 = \cos^2\alpha$ 的旋转超曲面的一个开部;

(III) $M^m \subset \tilde{M}^{m-1} \times \mathbb{R}$, 其中 $\tilde{M}$ 是 $\mathbb{H}^m$ 中半平行超曲面.

假设 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行 $\lambda-$双调和超曲面 M^m 是满足 $\lambda_1\lambda_2 = \cos^2\alpha$ 的旋转超曲面的开部分, 则有

$$\lambda_1 = -\alpha'(s)\cos\alpha, \lambda_2 = -\sin\alpha\tan a(s).$$

令 $u = -\sin\alpha$, 代入 $\lambda_1\lambda_2 = \cos^2\alpha$ 可得

$$uu'\tan a(s) = 1 - u^2.$$

类似定理 4.2 的证明, (7) 式不成立, 矛盾. 因此 $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ $(m \geq 3)$ 中的半平行 $\lambda-$双调和超曲面 M^m 或极小, 或是一个直柱体.

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (11761061),甘肃省科技计划项目(20JR5RA515)。

参考文献

[1] Chen, B.-Y. (1988) Null 2-Type Surfaces in $\mathbb{E}^3$ Are Circular Cylinders. *Kodai Mathematical Journal*, **11**, 295-299. https://doi.org/10.2996/kmj/1138038880

[2] Ferrández, A. ans Lucas, P. (1991) Null Finite Type Hypersurfaces in Space Forms. *Kodai Mathematical Journal*, **14**, 406-419. https://doi.org/10.2996/kmj/1138039464

[3] Chen, B.-Y. and Garay, O.J. (2012) $\delta(2)$-Ideal Null 2-Type Hypersurfaces of Euclidean Space Are Spherical Cylindres. *Kodai Mathematical Journal*, **35**, 382-391. https://doi.org/10.2996/kmj/1341401058

[4] 独力. 伪黎曼空间型中满足$\tau_2(\varphi) = \eta\tau(\varphi)$的子流形[D]: [博士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2016.

[5] Dillen, F., Fastenakels, J. and Van der Veken, J. (2009) Rotation Hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Note di Matematica*, **29**, 41-54.

[6] Van der Veken, J. and Vrancken, L. (2008) Parallel and Semi-Parallel Hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, **39**, 355-370. https://doi.org/10.1007/s00574-008-0010-8

[7] Calvaruso, G., Kowalczyk, D. and Van der Veken, J. (2010) On Extrinsically Symmetric Hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **82**, 390-400. https://doi.org/10.1017/S0004972710001760