Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(12), 3646-3652
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1312378

(*p*, *m*)-凸函数及其Hermite-Hadamard型不等式

罗佳月，余梦清，苏凌仟

衡阳师范学院数学与统计学院，湖南 衡阳

收稿日期：2023年11月14日；录用日期：2023年12月15日；发布日期：2023年12月29日

摘 要

本文定义了一类(*p*, *m*)-凸函数，给出了两个判定此类函数的充要条件，推导了与之相关的Hermite-Hadamard型不等式，并将其应用到中学数学教学的具体场景中。

关键词

凸函数，(*p*, *m*)-凸函数，Hermite-Hadamard型不等式

(*p*, *m*)-Convex Function and Its Hermite-Hadamard Type Inequality

Jiayue Luo, Mengqing Yu, Lingqian Su

College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang Hunan

Received: Nov. 14th, 2023; accepted: Dec. 15th, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

A class of (*p*, *m*)-convex functions are defined. Then, two necessary and sufficient conditions are given to judge this kind of function. Moreover, a Hermite-Hadamard type inequality on the (*p*, *m*)-convex functions is derived. At last, two application cases of middle school mathematics teaching are given.

Keywords

Convex Function, (*p*, *m*)-Convex Function, Hermite-Hadamard Type Inequality

文章引用: 罗佳月，余梦清，苏凌仟. (*p*, *m*)-凸函数及其 Hermite-Hadamard 型不等式[J]. 理论数学，2023，13(12): 3646-3652. DOI: 10.12677/pm.2023.1312378

1. 引言及预备知识

由于在控制与优化、中学数学教学等领域的应用十分广泛，关于凸函数和广义凸函数的研究异常丰富。首先，我们引进一些需要用到的概念和已有研究结果。

定义 1.1 [1]设函数 $f:I\subseteq R=(-\infty,+\infty)\to R$，若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 和任意的 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\le\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right), \tag{1.1}$$

则称 f 为 I 上的凸函数。若不等式(1.1)的反向不等式成立，则称 f 为 I 上的凹函数。

1985 年，G. Toader 首先提出了 m-凸函数的定义。

定义 1.2 [2]设 $f:[0,b]\to R(0>b)$，$m\in(0,1]$，若对任意的 $x_1,x_2\in[0,b]$，$\lambda\in[0,1]$，有

$$f\left(\lambda x_1+m(1-\lambda)x_2\right)\le\lambda f\left(x_1\right)+m(1-\lambda)f\left(x_2\right), \tag{1.2}$$

则称 f 为 $[0,b]$ 上的 m-凸函数。

2007 年，文[3]给出了 p-凸函数的定义。

定义 1.3 [3]设 $f(x)$ 是定义在区间 $I\subseteq(-\infty,+\infty)$ 的函数上，对任意 $x_1,x_2\in I$ 和 $t\in(0,1)$，若存在 $p=2k+1$ 或 $p=\dfrac{n}{m}$ $(n=2r+1,m=2s+1,k,r,s\in N)$ 使得

$$f\left(\left[tx_1^p+(1-t)x_2^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le tf\left(x_1\right)+(1-t)f\left(x_2\right), \tag{1.3}$$

则称 $f(x)$ 为 I 上的 p-凸函数；若不等号反向，则称 $f(x)$ 为 I 上的 p-凹函数。

在文[4]中，建立了如下的 m-凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式。

定理 1.1 [4]设 $f:R_0=[0,+\infty)\to R$ 是 m-凸函数，$m\in(0,1]$。若对 $0\le a<b<+\infty$，若 $f'\in([a,b])$，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\min\left\{\frac{f(a)+mf(b/m)}{2},\frac{mf(a/m)+f(b)}{2}\right\}. \tag{1.4}$$

2011 年，宋振云和涂琼霞在文[5]中给出了关于 p-凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式。

定理 1.2 [5]设 $f(x)$ 是 $I\in R^+$ 上的连续函数，若 $f(x)$ 是 $[a,b]\subseteq I$ 上的 p-凸函数，则

$$f\left(S_p(a,b)\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{b^pf(b)-a^pf(a)}{b-a}-\frac{\left(f(b)-f(a)\right)J_p(a,b)}{b-a}. \tag{1.5}$$

其中 $S_p(a,b)$ 和 $J_p(a,b)$ 分别是正数 a,b 的 p 次 Stolarsky 平均[6]和广义单参数平均[7]，即

$$S_p(a,b)=\left(\frac{a^{p+1}-b^{p+1}}{(p+1)(a-b)}\right)^{\frac{1}{p}},J_p(a,b)=\frac{p\left(b^{p+1}-a^{p+1}\right)}{(p+1)\left(b^p-a^p\right)}.$$

一个很自然的问题是，m-凸函数与 p-凸函数之间有什么联系呢？鉴于此，本文试图构建一类兼具 m-凸函数与 p-凸函数特性的新的广义凸函数来系统研究，希望能给中学数学的教与学提供一些有益参考。

2. 定义及判别方法

定义 2.1 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I\subseteq(-\infty,+\infty)$ 的函数上，若对任意 $x_1,x_2\in I$，$t\in(0,1)$，$m\in(0,1]$，存

在 $p=2k+1$ 或 $p=\frac{n}{m}(n=2r+1,m=2s+1,k,r,s\in N)$ 使得

$$f\left(\left[tx_1^p+m(1-t)x_2^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le tf(x_1)+m(1-t)f(x_2), \tag{2.1}$$

则称 $f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数。

注 1 当 $m=1$ 时，$f(x)$ 为区间 I 上的 p-凸函数。

注 2 当 $m=1,p=1$ 时，$f(x)$ 为区间 I 上的凸函数。

以下假定 $I=(a,b)$，$b>a$，$I^p=\left(\inf\limits_{x\in I}\{x^p\},\sup\limits_{x\in I}\{x^p\}\right)$ 和 $t\in(0,1)$。

定理 2.1 $f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数的充要条件是 $f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$ 为 I^p 上的 m-凸函数。

证明：(充分性)设 $f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$ 为 I^p 上的 m-凸函数，$x_1,x_2\in I$，$x_1^p,x_2^p\in I^p$，令 $x=tx_1^p+m(1-t)x_2^p$，得

$$\begin{aligned}f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)&=f\left(\left[tx_1^p+m(1-t)x_2^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\&\le tf\left[\left(x_1^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]+m(1-t)f\left[\left(x_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\&=tf(x_1)+m(1-t)f(x_2).\end{aligned}$$

由定义 2.1 易知，$f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数。

(必要性)设 $x_1,x_2\in I$，$x_1^p,x_2^p\in I^p$，由 $f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数，则

$$f\left(\left[t\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)^p+m(1-t)\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le tf\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)+m(1-t)f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right).$$

即

$$f\left(\left[tx_1+m(1-t)x_2\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le tf\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)+m(1-t)f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right).$$

由定义 1.2 易知，$f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$ 为 I^p 上的 m-凸函数。

定理 2.2 设 $I\subseteq(-\infty,+\infty)$，$f:I\to(-\infty,+\infty)$，$\forall x_1,x_2,x_3\in I$，$x_1<x_2<x_3$，则 $f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数的充要条件是

$$(x_1-mx_3)\left[f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)-f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)\right]-(x_2-x_1)\left[f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)-mf\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right)\right]\le 0. \tag{2.2}$$

证明：(充分性)由 $(x_1-mx_3)\left[f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)-f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)\right]-(x_2-x_1)\left[f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)-mf\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right)\right]\le 0$，得

$$f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)-f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)\le\frac{x_2-x_1}{x_1-mx_3}\left[f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)-mf\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right)\right].$$

即有

$$f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)\le\frac{x_2-mx_3}{x_1-mx_3}f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)-m\frac{x_2-x_1}{x_1-mx_3}f\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right).$$

令

$$t=\frac{x_2-mx_3}{x_1-mx_3},1-t=\frac{x_1-x_2}{x_1-mx_3},\ x_2=tx_1+m(1-t)x_3,$$

因此

$$f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)\le tf\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)+m(1-t)f\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right).$$

于是有

$$f\left(\left[tx_1+m(1-t)x_3\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le tf\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)+m(1-t)f\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right).$$

由定义 2.1 易知，$f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数。

(必要性)若 $f(x)$ 为 I 上的 (p,m)-凸函数，令

$$t=\frac{x_2-mx_3}{x_1-mx_3},\ x_1,x_2,x_3\in I,\ x_1<x_2<x_3,1-t=\frac{x_1-x_2}{x_1-mx_3},\ x_2=tx_1+m(1-t)x_3,$$

得

$$\begin{aligned}f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)&=f\left(\left[tx_1+m(1-t)x_3\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\&=f\left(\left[t\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)^p+m(1-t)\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\\&\le\frac{x_2-mx_3}{x_1-mx_3}f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)+m\frac{x_1-x_2}{x_1-mx_3}f\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right).\end{aligned}$$

即

$$f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)-f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)\le\frac{x_2-x_1}{x_1-mx_3}\left[f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)-mf\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right)\right].$$

于是

$$(x_1-mx_3)\left[f\left(x_2^{\frac{1}{p}}\right)-f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)\right]-(x_2-x_1)\left[f\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right)-mf\left(x_3^{\frac{1}{p}}\right)\right]\le 0.$$

证毕。

3. (p, m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式

现在建立(p,m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式。

定理 3.1 设$m\in(0,1]$，f是$[0,+\infty]$上的(p,m)-凸函数。当$0\le a<b$时，若f在$[ma,b]$上可积，则有

$$\frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{bf(b)-m^{1+\frac{1}{p}}af(a)}{b-ma}-\frac{\left[f(b)-mf(a)\right]J_p(ma,b)}{b-ma}, \tag{3.1}$$

其中

$$J_p(ma,b)=\frac{p}{1+p}\cdot\frac{b^{1+p}-m^{1+\frac{1}{p}}\cdot a^{1+p}}{b^p-ma^p}(a\ne b, p\ne -1,0).$$

证明： 令$x=\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}}$，利用定义 2.1 中的不等式(2.1)和分部积分公式，易得

$$\begin{aligned}
\int_{ma}^{b} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \int_0^1\left[tf(b)+m(1-t)f(a)\right]\mathrm{d}\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{\left[tf(b)+m(1-t)f(a)\right]\left[\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}}\right]\right\}\Bigg|_0^1 \\
&\quad -\int_0^1\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}\left[tf(b)+m(1-t)f(a)\right] \\
&= bf(b)-mf(a)\cdot\left(ma^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left[f(b)-mf(a)\right]\int_0^1\left[tb^p+m(1-t)a^p\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

令$u=tb^p+m(1-t)a^p$，经简单的定积分计算，上述式子可变为

$$\begin{aligned}
\int_{ma}^{b} f(x)\mathrm{d}x &\le \left[bf(b)-m^{1+\frac{1}{p}}af(a)\right]-\left[f(b)-mf(a)\right]\int_{ma^p}^{b^p}u^{\frac{1}{p}}\frac{1}{b^p-ma^p}\mathrm{d}u \\
&= \left[bf(b)-m^{1+\frac{1}{p}}af(a)\right]-\left[f(b)-mf(a)\right]\cdot\frac{1}{b^p-ma^p}\int_{ma^p}^{b^p}u^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}u \\
&= \left[bf(b)-m^{1+\frac{1}{p}}af(a)\right]-\left[f(b)-mf(a)\right]\frac{1}{b^p-ma^p}\cdot\frac{\left(b^p\right)^{\frac{1}{p}+1}-\left(ma^p\right)^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1} \\
&= \left[bf(b)-m^{1+\frac{1}{p}}af(a)\right]-\left[f(b)-mf(a)\right]\frac{p\left(b^{1+p}-m^{1+\frac{1}{p}}\cdot a^{1+p}\right)}{(1+p)\cdot\left(b^p-ma^p\right)}.
\end{aligned}$$

其中

$$J_p(ma,b)=\frac{p}{1+p}\cdot\frac{b^{1+p}-m^{1+\frac{1}{p}}\cdot a^{1+p}}{b^p-ma^p}(a\ne b, p\ne -1,0),$$

即

$$\frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \frac{bf(b)-m^{1+\frac{1}{p}}af(a)}{b-ma}-\frac{\left[f(b)-mf(a)\right]J_p(ma,b)}{b-ma}.$$

注：(p,m)-凸函数作为 p-凸函数和 m-凸函数的推广，它的 Hermite-Hadamard 型不等式(3.1)也可以看成是定理 1.1 和定理 1.2 的结论(1.4)和(1.5)的推广。

4. 应用举例

中学数学教学中，尤其是中学数学竞赛教学中，经常会遇到一些与凸函数和广义凸函数相关的一些不等式证明题。下面列举两个应用场景来说明上述 (p,m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式的应用。

例 1 已知 $0<x_1<x_2$，证明：$e^{\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2}}\le\frac{1}{2}e^{x_1}+\frac{1}{4}e^{x_2}$。

证明：构造辅助函数 $f(x)=e^x$，由定理 2.2 容易得到 $f(x)$ 是 $x\in R$ 上的 (p,m)-凸函数，令 $m=t=\frac{1}{2}$，$p=2$，代入 (p,m)-凸函数的定义式中，若 $0<x_1<x_2$，可证得

$$e^{\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2}}\le\frac{1}{2}e^{x_1}+\frac{1}{4}e^{x_2}$$

所以原不等式成立。

例 2 求证：$\frac{(b+a)\left(\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}\right)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\le\frac{2\left(b^3-a^3\right)}{b-a}$ 其中 $0<\frac{a}{2}<b$。

证明：构造辅助函数 $f(x)=x^2$，根据定理 2.2 容易得到 $f(x)$ 是区间 $\left[\frac{a}{2},b\right]$ 上的 (p,m)-凸函数，令 $p=\frac{1}{2}$，$m=1$，代入 (p,m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式中可得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\mathrm{d}x\le\frac{b^3-a^3}{b-a}-\frac{\left(b^2-a^2\right)J_p(a,b)}{b-a},$$

其中

$$J_p(a,b)=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^{1+\frac{1}{2}}-a^{1+\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}},$$

化简得

$$\frac{(b+a)\left(\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}\right)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\le\frac{2\left(b^3-a^3\right)}{b-a}$$

所以原不等式成立。

注：中考、高考和中学数学竞赛中，不等式是必考内容。近年来的趋势是将不等式和一些初等函数，尤其是凸函数相结合来考察学生的综合运用能力、应变能力和创新发现能力。例 1 就是将指数函数与凸函数结合的一个典型例子。一般的解法是通过构造合适的函数，运用导数来研究该函数的单调性，进而得到所需要的不等式。现在运用与 (p,m)-凸函数相关的 Hermite-Hadamard 型不等式来证明，非常简洁。例 2 是选自湖北黄冈的一道中考模拟试题，主要考察学生立方差公式、代数式计算和基本不等式等知识的综合运用能力。一般的证明方法过程比较繁琐。现在运用与 (p,m)-凸函数相关的 Hermite-Hadamard 型不等式进行证明，就很简单。

基金项目

湖南省大学生创新创业训练项目“与几类广义凸函数相关的不等式及其应用”(S202110546020)。

致　谢

感谢阳志锋教授的悉心指导！

参考文献

[1] Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. (1993) Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[2] Toader, G. (1985) Some Generalizations of the Convexity. *Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization*, Cluj-Napoca, 25-27 October 1984, 329-338.

[3] 张孔生，万建平. P-凸函数及其性质[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007(1): 130-133.

[4] Klaričič Bakula, M., öxdemir, M.E. and Pečarić, J. (2008) Hadamard Type Inequalities for M-Convex and (α, m)-Convex Functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **9**, 12.

[5] 宋振云，涂琼霞. 关于 P-凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(3): 313-317.

[6] 萧振纲，张志华. n 个正数的 Stolarsky 平均[J]. 岳阳师范学院学报(自然科学版), 2001(4): 5-8.

[7] 杨镇杭. 对数指数平均的 Hlder，Minkowski，Tchebychef 型不等式[J]. 徐州师范大学学报(自然科学版)，2005(1): 31-34.