

三区间复合Legendre方程边值问题解的相似结构

付雪倩, 李顺初, 邵东风, 刘盼, 范林

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2023年1月5日; 录用日期: 2023年2月6日; 发布日期: 2023年2月14日

摘要

针对三区复合Legendre方程的一类边值问题, 对其解的表达形式进行了分析, 发现其解式具有相似的结构; 首先通过方程的两个线性无关解构造内、中、外区引解函数; 再借助外边界条件、衔接性条件的系数以及引解函数构造内、中、外区相似核函数; 最后将引解函数、相似核函数以及定解条件的系数进行组装得到其解, 进而获得了求解此类边值问题的新方法——相似构造法, 该方法简化了求解该类边值问题的复杂性, 并提高了求解的效率。

关键词

三区复合Legendre方程, 边值问题, 相似核函数, 相似构造法

Similar Structure of Solutions of Boundary Value Problem of Three-Region Composite Legendre Equation

Xueqian Fu, Shunchu Li, Dongfeng Shao, Pan Liu, Lin Fan

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Jan. 5th, 2023; accepted: Feb. 6th, 2023; published: Feb. 14th, 2023

Abstract

For a class of boundary value problems of three-region composite Legendre equation, the expression of the solutions is analyzed, and it is found that its solution has a similar structure. Firstly, we can construct the functions of guide solution of the inner, middle and outer regions through the two linear independent solutions of the definite solution equation. Secondly, through the outer boundary condition, the connection condition coefficients and the functions of guide solution to con-

struct the similar kernel functions in the inner, middle and outer regions. Finally, the solution is obtained by assembling the functions of guide solution, the similar kernel function and the coefficients of the definite solution conditions. Thus a new method for solving such boundary value problems is obtained, which is called the similarity construction method. This method simplifies the complexity of solving this kind of boundary value problem and improves the efficiency of solving them.

Keywords

Three-Region Composite Legendre Equation, Boundary Value Problem, Similar Kernel Functions, Similar Construction Method

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

工程中的许多偏微分方程的问题常常会转化为常微分方程问题来进行研究[1], 因此研究常微分方程的边值问题对实际生活具有重要意义。许多学者对微分方程边值问题进行了研究, 张宇飞[2]等人研究了一类常微分方程组在定值右边界条件下的解的结构, 发现其解的结构具有一定的内在联系。李顺初[3]研究了一类二阶齐次线性常微分方程的边值问题, 通过分析整理得出该类方程的解具有相似结构。2010年, 李顺初[4]通过对二阶齐次线性常微分方程(组)的边值问题和二阶齐次线性偏微分方程的混合问题进行了初探, 提出了求解微分方程边值问题的方法——相似构造法。该方法运用广泛, 董晓旭、郭丽洁、唐乙斌、李顺初、何签等人将该方法应用于三区复合 Thomson 方程[5]、Hermit 方程[6]、Tschebyscheff 方程[7]、三区间复合型第二种 Weber 方程[8]、三区间复合型第一种 Weber 方程[9]的边值问题的求解中。相似构造法还为解决工程问题带来了便利, 比如: 李顺初等人将该方法运用于均质油藏[10]、复合油藏[11]、多层油藏[12]等渗流模型的求解中, 使其得到了不断的完善和发展。

在特殊函数中, Legendre 方程具有重要的地位, 他的解 Legendre 多项式在求解数学物理方程中具有广泛的运用[13] [14]。比如在求解带有轴对称性的带电体的静电势和球形域内电位分布常常要借助 Legendre 多项式来求解[15]。那么对 Legendre 方程的求解进行研究以及对其解式进行研究就显得十分有必要。但是一般的方法对其进行求解十分的繁琐, 能否找到一种简便的方法进行求解呢? 近年来, 李顺初等人对 Legendre 方程[16], 连带 Legendre 方程[17], 复合 Legendre 方程[18]的解式进行了研究, 并找到了其解式的相似结构, 但是对于三区间复合及其以上的 Legendre 方程解式的研究还没有。基于以上的研究, 下面将对三区复合 Legendre 方程的边值问题进行研究:

$$\begin{cases} (1-x^2)y_1'' - 2xy_1' + l_1(l_1+1)y_1 = 0, (-1 \leq a \leq x < b) \\ (1-x^2)y_2'' - 2xy_2' + l_2(l_2+1)y_2 = 0, (b < x < c) \\ (1-x^2)y_3'' - 2xy_3' + l_3(l_3+1)y_3 = 0, (c < x < d \leq 1) \\ \left[Ey_1 + (1+EF)y_1' \right]_{x=a} = M \\ y_1|_{x=b} = \lambda_1 y_2|_{x=b}, y_1'|_{x=b} = \lambda_2 y_2'|_{x=b} \\ y_2|_{x=c} = \mu_1 y_3|_{x=c}, y_2'|_{x=c} = \mu_2 y_3'|_{x=c} \\ \left[Gy_3 + Hy_3' \right]_{x=d} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a, b, c, d, E, F, M, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, G, H$ 均为实数, $l_i (i=1,2,3)$ 为正整数, 且满足 $M \neq 0, G^2 + H^2 \neq 0$ 。

本文第一部分给出了研究所需要用的基础知识, 第二部分给出了本文的主要定理及其证明, 第三部分通过对定理的证明归纳总结出相似构造法的求解步骤, 第四部分将相似构造法的求解步骤进行举例应用, 第五部分为本文的总结。

2. 预备知识

引理 1 Legendre 方程 $(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu_l y = 0, (-1 \leq x \leq 1)$ 它的本征值为 $\mu_l = l(l+1) (l=0,1,2,\dots, i=1,2,3)$, 两个线性无关解为 P_l, Q_l 则其方程的通解[14]为:

$$y_i(x) = A_i P_l(x) + B_i Q_l(x)$$

其中 A_i, B_i 为任意常数。 $P_l(x)$ 为 Legendre 多项式, $Q_l(x)$ 为第二类 Legendre 函数, $i=1,2,3$ 。

引理 2 Legendre 函数的微分性质[19]

$$P'_l(x) = \frac{l_i}{1-x^2} [P_{l-1}(x) - xP_l(x)]$$

$$Q'_l(x) = \frac{l_i}{1-x^2} [Q_{l-1}(x) - xQ_l(x)]$$

证明: 见参考文献[19]

引理 3 由 Legendre 方程的两个线性无关解 $P_l(x), Q_l(x)$ 构造二元函数

$$\varphi_{0,0}^i(x, \xi) = P_l(x)Q_l(\xi) - P_l(\xi)Q_l(x) \quad (2)$$

则有

$$\varphi_{1,0}^i(x, \xi) = \frac{l_i}{1-x^2} \{P_{l-1}(x)Q_l(\xi) - P_l(\xi)Q_{l-1}(x) - x[P_l(x)Q_l(\xi) - P_l(\xi)Q_l(x)]\} \quad (3)$$

$$\varphi_{0,1}^i(x, \xi) = \frac{l_i}{1-\xi^2} \{P_l(x)Q_{l-1}(\xi) - P_{l-1}(\xi)Q_l(x) - \xi[P_l(x)Q_l(\xi) - P_l(\xi)Q_l(x)]\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}^i(x, \xi) = & \frac{l_i^2}{(1-x^2)(1-\xi^2)} \{P_{l-1}(x)Q_{l-1}(\xi) - P_{l-1}(\xi)Q_{l-1}(x) \\ & - x[P_l(x)Q_{l-1}(\xi) - P_{l-1}(\xi)Q_l(x)] - \xi[P_{l-1}(x)Q_l(\xi) - P_l(\xi)Q_{l-1}(x)] \\ & + x\xi[P_l(x)Q_l(\xi) - P_l(\xi)Q_l(x)]\} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\varphi_{0,0}^i(x, \xi), \varphi_{1,0}^i(x, \xi), \varphi_{0,1}^i(x, \xi), \varphi_{1,1}^i(x, \xi)$ 称作引解函数, $i=1$ 表示内区 $-1 \leq a \leq x < b$, $i=2$ 表示中区 $b < x < c$, $i=3$ 表示外区 $c < x < d \leq 1$ 。

证明: 根据引理 2 有

$$P'_l(x) = \frac{l_i}{1-x^2} [P_{l-1}(x) - xP_l(x)]$$

$$Q'_l(x) = \frac{l_i}{1-x^2} [Q_{l-1}(x) - xQ_l(x)]$$

将 $\varphi_{0,0}^i(x, \xi)$ 对 x 求偏导数有

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0}^i(x,\xi) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{0,0}^i(x,\xi) \\ &= \frac{l_i}{1-x^2} [P_{i-1}(x) - xP_i(x)] Q_i(\xi) - \frac{l_i}{1-x^2} [Q_{i-1}(x) - xQ_i(x)] P_i(\xi) \\ &= \frac{l_i}{1-x^2} \{P_{i-1}(x) Q_i(\xi) - P_i(\xi) Q_{i-1}(x) - x[P_i(x) Q_i(\xi) - P_i(\xi) Q_i(x)]\}\end{aligned}$$

同理可证(4) (5)式。

3. 主要定理及其证明

定理 1 若边值问题(1)有唯一解, 那么它的内区、中区、外区解可以分别表示为:

$$y_1(x) = M \frac{\Phi_1(x)}{E\Phi_1(a) + (1+EF)} \quad (6)$$

$$y_2(x) = M \frac{1}{E\Phi_1(a) + (1+EF)} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(b,b)}{\lambda_1\varphi_{1,1}^1(a,b)\Phi_2(b) - \lambda_2\varphi_{1,0}^1(a,b)} \cdot \Phi_2(x) \quad (7)$$

$$y_3(x) = M \frac{1}{E\Phi_1(a) + (1+EF)} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(b,b)\varphi_{0,1}^2(c,c)\Phi_3(x)}{[\lambda_2\varphi_{1,0}^1(a,b) - \lambda_1\varphi_{1,1}^1(a,b)\Phi_2(b)][\mu_2\varphi_{1,0}^2(b,c) - \mu_1\varphi_{1,1}^2(b,c)\Phi_3(c)]} \quad (8)$$

其中 $\Phi_1(x)$ 为内区相似核函数, 表示为:

$$\Phi_1(x) = \frac{\lambda_2\varphi_{0,0}^1(x,b) - \lambda_1\varphi_{0,1}^1(x,b)\Phi_2(b)}{\lambda_2\varphi_{1,0}^1(a,b) - \lambda_1\varphi_{1,1}^1(a,b)\Phi_2(b)} \quad (9)$$

$\Phi_2(x)$ 为中区相似核函数, 表示为:

$$\Phi_2(x) = \frac{\mu_2\varphi_{0,0}^2(x,c) - \mu_1\varphi_{0,1}^2(x,c)\Phi_3(c)}{\mu_2\varphi_{1,0}^2(b,c) - \mu_1\varphi_{1,1}^2(b,c)\Phi_3(c)} \quad (10)$$

$\Phi_3(x)$ 为外区相似核函数, 表示为:

$$\Phi_3(x) = \frac{G\varphi_{0,0}^3(x,d) + H\varphi_{0,1}^3(x,d)}{G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)} \quad (11)$$

证明: 由引理 1 知, 边值问题(1)的三个定解方程的通解为:

$$y_i(x) = A_i P_i(x) + B_i Q_i(x), i=1,2,3 \quad (12)$$

其中 A_i, B_i 为任意常数。

由引理 2 知

$$y_i'(x) = \frac{l_i}{1-x^2} \{A_i [P_{i-1}(x) - xP_i(x)] + B_i [Q_{i-1}(x) - xQ_i(x)]\} \quad (13)$$

将 $y(x), y'(x)$ 代入边值问题(1)的内边值条件、衔接性条件和外边值条件可以得到

$$\begin{aligned} & A_1 \left\{ EP_i(a) + (1+EF) \frac{l_1}{1-a^2} [P_{i-1}(a) - aP_i(a)] \right\} \\ & + B_1 \left\{ EQ_i(a) + (1+EF) \frac{l_1}{1-a^2} [Q_{i-1}(a) - aQ_i(a)] \right\} = M \end{aligned} \quad (14)$$

$$A_1 P_i(b) + B_1 Q_i(b) - A_2 \lambda_1 P_{i_2}(b) - B_2 \lambda_1 Q_{i_2}(b) = 0 \quad (15)$$

$$A_1 \frac{l_1}{1-b^2} [P_{l_1-1}(b) - bP_{l_1}(b)] + B_1 \frac{l_1}{1-b^2} [Q_{l_1-1}(b) - bQ_{l_1}(b)] - A_2 \frac{l_2 \lambda_2}{1-b^2} [P_{l_2-1}(b) - bP_{l_2}(b)] - B_2 \frac{l_2 \lambda_2}{1-b^2} [Q_{l_2-1}(b) - bQ_{l_2}(b)] = 0 \tag{16}$$

$$A_2 P_{l_2}(c) + B_2 Q_{l_2}(c) - A_3 \mu_1 P_{l_3}(c) - B_3 \mu_1 Q_{l_3}(c) = 0 \tag{17}$$

$$A_2 \frac{l_1}{1-c^2} [P_{l_2-1}(c) - cP_{l_2}(c)] + B_2 \frac{l_2}{1-c^2} [Q_{l_2-1}(c) - cQ_{l_2}(c)] - A_3 \frac{l_3 \mu_2}{1-c^2} [P_{l_3-1}(c) - cP_{l_3}(c)] - B_3 \frac{l_3 \mu_2}{1-c^2} [Q_{l_3-1}(c) - cQ_{l_3}(c)] = 0 \tag{18}$$

$$A_3 \left\{ GP_{l_3}(d) + H \frac{l_3}{1-d^2} [P_{l_3-1}(d) - dP_{l_3}(d)] \right\} + B_3 \left\{ GQ_{l_3}(d) + H \frac{l_3}{1-d^2} [Q_{l_3-1}(d) - dQ_{l_3}(d)] \right\} = 0 \tag{19}$$

从而由(14)~(19)式可以得到关于待定系数 $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ 的线性方程组。结合(2)~(5)式得到其系数行列式为

$$\begin{aligned} \Delta = & \mu_2 \lambda_2 \varphi_{1,0}^2(b,c) [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] [E\varphi_{0,0}^1(a,b) + (1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,b)] \\ & - \mu_1 \lambda_2 \varphi_{1,1}^2(b,c) [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] [E\varphi_{0,0}^1(a,b) + (1+EF)\varphi_{1,0}^1(a,b)] \\ & - \mu_2 \lambda_1 \varphi_{0,0}^2(b,c) [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] [E\varphi_{0,1}^1(a,b) + (1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,b)] \\ & + \mu_1 \lambda_1 \varphi_{0,1}^2(b,c) [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] [E\varphi_{0,1}^1(a,b) + (1+EF)\varphi_{1,1}^1(a,b)] \end{aligned} \tag{20}$$

由于边值问题(1)有唯一解[16]，即 $\Delta \neq 0$ 。根据 Cramer 法则可得

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{M}{\Delta} \left\{ \mu_2 \lambda_2 \varphi_{1,0}^2(b,c) Q_{l_1}(b) [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] \right. \\ & - \mu_1 \lambda_2 \varphi_{1,1}^2(b,c) Q_{l_1}(b) [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] \\ & - \mu_2 \lambda_1 \varphi_{0,0}^2(b,c) \frac{l_1}{1-b^2} [Q_{l_1-1}(b) - bQ_{l_1}(b)] [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] \\ & \left. + \mu_1 \lambda_1 \varphi_{0,1}^2(b,c) \frac{l_1}{1-b^2} [Q_{l_1-1}(b) - bQ_{l_1}(b)] [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] \right\} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} B_1 = & -\frac{M}{\Delta} \left\{ \mu_2 \lambda_2 \varphi_{1,0}^2(b,c) P_{l_1}(b) [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] \right. \\ & - \mu_1 \lambda_2 \varphi_{1,1}^2(b,c) P_{l_1}(b) [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] \\ & - \mu_2 \lambda_1 \varphi_{0,0}^2(b,c) \frac{l_1}{1-b^2} [P_{l_1-1}(b) - bP_{l_1}(b)] [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] \\ & \left. + \mu_1 \lambda_1 \varphi_{0,1}^2(b,c) \frac{l_1}{1-b^2} [P_{l_1-1}(b) - bP_{l_1}(b)] [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] \right\} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} A_2 = & \frac{M}{\Delta} \left\{ -\mu_2 \varphi_{0,1}^1(b,b) Q_{l_2}(c) [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] \right. \\ & \left. + \mu_1 \varphi_{0,1}^1(b,b) \frac{l_2}{1-c^2} [Q_{l_2-1}(c) - cQ_{l_2}(c)] [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] \right\} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & -\frac{M}{\Delta} \left\{ -\mu_2 \varphi_{0,1}^1(b,b) P_{l_2}(c) [G\varphi_{1,0}^3(c,d) + H\varphi_{1,1}^3(c,d)] \right. \\ & \left. + \mu_1 \varphi_{0,1}^1(b,b) \frac{l_2}{1-c^2} [P_{l_2-1}(c) - cP_{l_2}(c)] [G\varphi_{0,0}^3(c,d) + H\varphi_{0,1}^3(c,d)] \right\} \end{aligned} \tag{24}$$

$$A_3 = \frac{M}{\Delta} \left\{ GQ_{l_3}(d) + H \frac{l_3}{1-d^2} [Q_{l_3-1}(d) - dQ_{l_2}(d)] \right\} \varphi_{0,1}^1(b,b) \varphi_{0,1}^2(c,c) \quad (25)$$

$$B_3 = -\frac{M}{\Delta} \left\{ GP_{l_3}(d) + H \frac{l_3}{1-d^2} [P_{l_3-1}(d) - dP_{l_2}(d)] \right\} \varphi_{0,1}^1(b,b) \varphi_{0,1}^2(c,c) \quad (26)$$

将(21)~(26)式带入到 Legendre 方程的通解(12)式中, 并将结果进行整理, 即得到边值问题(1)的解式(6)~(8)式。根据定理 1 容易得到如下推论。

推论 1 如果 Legendre 方程边值问题(1)的内边界条件为 $y_1'|_{x=a} = 1$, 即 $E = 0, F \neq 0$, 那么边值问题(1)的内区解为

$$y_1(x) = \Phi_1(x), (-1 \leq a \leq x < b)$$

推论 2 如果 Legendre 方程边值问题(1)的外边界条件为 $y_3|_{x=d} = 0$, 即 $G \neq 0, H = 0$, 那么边值问题(1)的外区相似核函数为

$$\Phi_3(x) = \frac{\varphi_{0,0}^3(x,d)}{\varphi_{1,0}^3(c,d)}, (c < x < d)$$

推论 3 如果 Legendre 方程边值问题(1)的外边界条件为 $y_3'|_{x=d} = 0$, 即 $G = 0, H \neq 0$, 那么外区相似核函数为

$$\Phi_3(x) = \frac{\varphi_{0,1}^3(x,d)}{\varphi_{1,1}^3(c,d)}, (c < x < d)$$

推论 4 在 Legendre 方程边值问题(1)中有

$$[y_1 + Fy_1']|_{x=a} = \frac{M}{E + \frac{1}{F + \Phi_1(a)}}$$

4. 相似构造法的具体步骤

根据上述定理 1 的证明过程, 我们不难归纳总结出求解三区复合 Legendre 方程边值问题的相似构造法的具体步骤如下:

第一步, 构造内区、中区、外区引解函数。根据 Legendre 方程的两个线性无关解 $P_{l_i}(x), Q_{l_i}(x)$ 构造内区、中区、外区引解函数 $\varphi_{m,n}^i(x,\xi) (i=1,2,3, m,n=0,1)$, 如(5)~(8)式。

第二步, 构造内区、中区、外区的相似核函数。根据外边值条件的系数 G, H 以及外区引解函数 $\varphi_{m,n}^3(x,\xi) (m,n=0,1)$ 构造外区相似核函数, 如(11)式所示, 并求出 $\Phi_3(c)$; 根据衔接性条件的系数 μ_1, μ_2 以及中区引解函数 $\varphi_{m,n}^2(x,\xi) (m,n=0,1)$ 构造中区相似核函数, 如(10)所示, 并求出 $\Phi_2(b)$; 根据衔接性条件的系数 λ_1, λ_2 以及内区引解函数 $\varphi_{m,n}^1(x,\xi) (m,n=0,1)$ 构造内区相似核函数, 如(9)式所示, 并求出 $\Phi_1(a)$ 。

第三步, 获得三区复合 Legendre 边值问题(1)的解。将内边值条件的系数 M, E, F 与内区相似核函数 $\Phi_1(x)$ 以及 $\Phi_1(a)$ 进行组装得到内区解, 即(6)式; 将内边值条件的系数 M, E, F 、衔接性条件的系数 λ_1, λ_2 、内区引解函数、中区相似核函数 $\Phi_2(x)$ 以及 $\Phi_1(a), \Phi_2(b)$ 进行组装得到中区解, 即(7)式; 将内边值条件的系数 M, E, F 、衔接性条件的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ 、内区引解函数、中区引解函数、外区相似核函数 $\Phi_3(x)$ 以及 $\Phi_1(a), \Phi_2(b), \Phi_3(c)$ 进行组装得到外区解, 即(8)式。

根据以上的求解步骤可以绘出如图 1 的求解流程图。

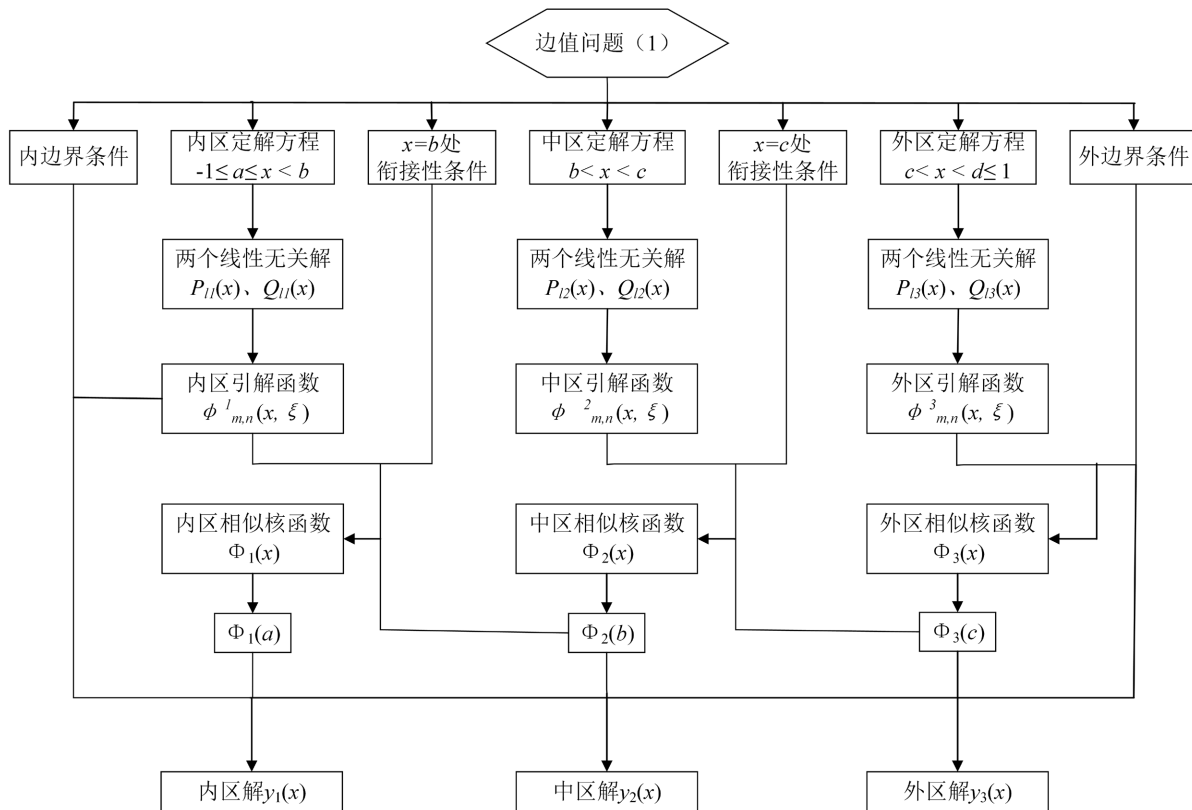


Figure 1. Solution flow chart
图 1. 求解流程图

5. 举例

求解如下的边值问题:

$$\begin{cases}
 (1-x^2)y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0, (-1 < x < 0) \\
 (1-x^2)y_2'' - 2xy_2' + 6y_2 = 0, \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \\
 (1-x^2)y_3'' - 2xy_3' + 12y_3 = 0, \left(\frac{1}{2} < x < 1\right) \\
 [y_1 + 2y_1']|_{x=-1} = 1 \\
 y_1|_{x=0} = y_2|_{x=0}, y_1'|_{x=0} = 2y_2'|_{x=0} \\
 y_2|_{x=\frac{1}{2}} = y_3|_{x=\frac{1}{2}}, y_2'|_{x=\frac{1}{2}} = 2y_3'|_{x=\frac{1}{2}} \\
 [y_3 + 2y_3']|_{x=1} = 0
 \end{cases} \tag{27}$$

通过对比边值问题(1)和边值问题(27)可以得到 $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3, a = -1, b = 0, c = \frac{1}{2}, d = 1, E = 1, F = 1, M = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \mu_1 = 1, \mu_2 = 2, G = 1$, 利用相似构造法对边值问题(27)进行求解。

内区定解方程 $(1-x^2)y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0$ 的两个线性无关解为 $P_1(x), Q_1(x)$, 中区定解方程 $(1-x^2)y_2'' - 2xy_2' + 6y_2 = 0$ 的两个线性无关解为 $P_2(x), Q_2(x)$, 外区定解方程 $(1-x^2)y_3'' - 2xy_3' + 12y_3 = 0$ 的

两个线性无关解为 $P_3(x)$, $Q_3(x)$ 。

第一步, 根据边值问题(27)的内区、中区、外区定解方程的两个线性无关解分别构造相应的引解函数。即内区引解函数为:

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0}^1(x,\xi) &= P_1(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_1(x) \\ \varphi_{1,0}^1(x,\xi) &= \frac{1}{1-x^2} \{P_0(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_0(x) - x[P_1(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_1(x)]\} \\ \varphi_{0,1}^1(x,\xi) &= \frac{1}{1-\xi^2} \{P_1(x)Q_0(\xi) - P_0(\xi)Q_1(x) - \xi[P_1(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_1(x)]\} \\ \varphi_{1,1}^1(x,\xi) &= \frac{1}{(1-x^2)(1-\xi^2)} \{P_0(x)Q_0(\xi) - P_0(\xi)Q_0(x) - x[P_1(x)Q_0(\xi) - P_0(\xi)Q_1(x)] \\ &\quad - \xi[P_0(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_0(x)] + x\xi[P_1(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_1(x)]\}\end{aligned}$$

中区引解函数为:

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0}^2(x,\xi) &= P_2(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_2(x) \\ \varphi_{1,0}^2(x,\xi) &= \frac{2}{1-x^2} \{P_1(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_1(x) - x[P_2(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_2(x)]\} \\ \varphi_{0,1}^2(x,\xi) &= \frac{1}{1-\xi^2} \{P_2(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_2(x) - \xi[P_2(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_2(x)]\} \\ \varphi_{1,1}^2(x,\xi) &= \frac{4}{(1-x^2)(1-\xi^2)} \{P_1(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_1(x) - x[P_2(x)Q_1(\xi) - P_1(\xi)Q_2(x)] \\ &\quad - \xi[P_1(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_1(x)] + x\xi[P_2(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_2(x)]\}\end{aligned}$$

外区引解函数为:

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0}^3(x,\xi) &= P_3(x)Q_3(\xi) - P_3(\xi)Q_3(x) \\ \varphi_{1,0}^3(x,\xi) &= \frac{3}{1-x^2} \{P_2(x)Q_3(\xi) - P_3(\xi)Q_2(x) - x[P_3(x)Q_3(\xi) - P_3(\xi)Q_3(x)]\} \\ \varphi_{0,1}^3(x,\xi) &= \frac{3}{1-\xi^2} \{P_3(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_3(x) - \xi[P_3(x)Q_3(\xi) - P_3(\xi)Q_3(x)]\} \\ \varphi_{1,1}^3(x,\xi) &= \frac{9}{(1-x^2)(1-\xi^2)} \{P_2(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_2(x) - x[P_3(x)Q_2(\xi) - P_2(\xi)Q_3(x)] \\ &\quad - \xi[P_2(x)Q_3(\xi) - P_3(\xi)Q_2(x)] + x\xi[P_3(x)Q_3(\xi) - P_3(\xi)Q_3(x)]\}\end{aligned}$$

第二步, 构造相似核函数。由于 $G=1$, $H=1$ 结合外区引解函数构造外区相似核函数为:

$$\Phi_3(x) = \frac{\varphi_{0,0}^3(x,1) + \varphi_{0,1}^3(x,1)}{\varphi_{1,0}^3\left(\frac{1}{2},1\right) + \varphi_{1,1}^3\left(\frac{1}{2},1\right)}$$

由于 $\mu_1=1$, $\mu_2=2$ 并结合中区引解函数和 $\Phi_3\left(\frac{1}{2}\right)$ 构造中区相似核函数为:

$$\Phi_2(x) = \frac{2\varphi_{0,0}^2\left(x, \frac{1}{2}\right) - \varphi_{0,1}^2\left(x, \frac{1}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{1}{2}\right)}{2\varphi_{1,0}^2\left(0, \frac{1}{2}\right) - \varphi_{1,1}^2\left(0, \frac{1}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{1}{2}\right)}$$

由于 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ 并结合内区引解函数和 $\Phi_2(0)$ 构造内区相似核函数为:

$$\Phi_1(x) = \frac{2\varphi_{0,0}^1(x, 0) - \varphi_{0,1}^1(x, 0)\Phi_2(0)}{2\varphi_{1,0}^1(-1, 0) - \varphi_{1,1}^1(-1, 0)\Phi_2(0)}$$

第三步, 根据 $E = 1$, $F = 1$, $M = 1$ 并将各部分进行组装, 得到内区解为:

$$y_1 = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(-1) + 2}$$

中区解为:

$$y_2 = \frac{1}{\Phi_1(-1) + 2} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(0, 0)}{\varphi_{1,1}^1(-1, 0)\Phi_2(0) - 2\varphi_{1,0}^1(-1, 0)} \cdot \Phi_2(x)$$

外区解为:

$$y_3 = \frac{1}{\Phi_1(-1) + 2} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(0, 0)\varphi_{0,1}^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\Phi_3(x)}{\left[2\varphi_{1,0}^1(-1, 0) - \varphi_{1,1}^1(-1, 0)\Phi_2(0)\right] \left[2\varphi_{1,0}^2\left(0, \frac{1}{2}\right) - \varphi_{1,1}^2\left(0, \frac{1}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{1}{2}\right)\right]}$$

6. 结论

1) 对于边值问题(1)只要知道其两个线性无关解, 就可以构造出内、中、外区引解函数, 进而构造出对应的相似核函数;

2) 观察边值问题(1)的解式可以发现, 其内、中、外区三个解的表达形式具有相似性, 其解式的系数只与内边界条件、衔接性条件、外边界条件的系数有关, 并且其解式是由引解函数、相似核函数、边界条件的系数进行组装而成;

3) 在边值问题(1)中, 随着边界条件系数的改变, 其解的表示形式不会发生改变, 改变的是相应的相似核函数, 从而对边值问题的求解提供了一种简单、快捷的方法。

参考文献

- [1] Dong, X.X., Liu, Z. and Li, S.C. (2019) Similar Constructing Method for Solving Nonlinear Spherical Seepage Model with Quadratic Pressure Gradient of Three-Region Composite Fractal Reservoir. *Computational and Applied Mathematics*, **38**, 1-27. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0847-z>
- [2] 张宇飞, 李顺初, 郑鹏社. 一类常微分方程组在定值右边界条件下的解的结构[J]. 四川工业学院学报, 2004(S1): 31-33+36.
- [3] 李顺初. 二阶齐次线性微分方程的边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2009, 28(5): 40-41+90.
- [4] 李顺初. 微分方程解的相似结构初探与展望[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226+238.
- [5] Wang, Y., Dong, X.X. and Li, S.C. (2016) Study on How to Resolve the Boundary Value Problem of Three-Region Composite Thomson Equation. *Journal of Computational Methods in Sciences & Engineering*, **16**, 111-124. <https://doi.org/10.3233/JCM-160606>
- [6] 郭丽洁, 李顺初, 严娟. Hermit 方程边值问题解的相似结构[J]. 济宁学院学报, 2010, 31(3): 9-10.

-
- [7] 唐乙斌, 李顺初, 严娟, 李全勇. Tschebyscheff 方程边值问题解的相似结构[J]. 四川兵工学报, 2011, 32(1): 155-156.
- [8] 李顺初, 何签, 夏星, 桂钦民. 三区间复合型第二种 Weber 方程边值问题的相似构造法[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2021, 36(4): 1-9.
- [9] 何签, 李顺初, 董晓旭, 等. 三区间复合型第一种 Weber 方程边值问题求解的新方法[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学版, 2022, 51(1): 9.
- [10] L, S.C., Zhao, C.C., Zheng, P.S., *et al.* (2019) Analysis of Oil and Gas Flow Characteristics in the Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **175**, 280-285.
<https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.12.042>
- [11] He, Q., Dong, X.X., *et al.* (2022) The Elasticity of the Outer Boundary and the Solution of Two-Region Composite Reservoir Seepage Model. *Petroleum Science and Technology*, **40**, 2773-2791.
- [12] 王强. 多层复合油藏渗流模型新解法的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2016.
- [13] 杨守文, 王海军. 勒让德方程本征值的确定[J]. 大学数学, 2021, 37(2): 33-36.
- [14] 曹佳薇. 基于移位 Legendre 多项式对三种粘弹性材料本构模型的动力学分析[D]: [硕士学位论文]. 秦皇岛: 燕山大学, 2021.
- [15] 余海洋, 方世跃. 关于勒让德多项式递推公式的研究[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(2): 27-2932.
- [16] 夏文文, 李顺初, 桂东冬. Legendre 方程边值问题的解的相似结构[J]. 嘉应学院学报, 2015, 33(2): 5-9.
- [17] 罗梅, 李顺初. 连带 Legendre 微分方程边值问题解的相似结构[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2015, 32(11): 34-37.
- [18] 夏星, 李顺初, 邵东风, 等. 复合 Legendre 方程边值问题解的相似结构法[J]. 内江师范学院学报, 2022, 37(2): 41-45+52.
- [19] 刘适式, 刘适达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 2002.