Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 219-225
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132026

Hans汉斯

基于Hadamard缺项幂级数的完备极小曲面

董丽丽

上海理工大学，上海

收稿日期：2023年1月7日；录用日期：2023年2月9日；发布日期：2023年2月16日

摘　要

1992年，Brito利用特殊的Hadamard缺项幂级数构建了一族位于$\mathbb{R}^3$中两平行平面间的完备极小曲面。但由于其定理的条件(2)要求过强，故2022年张建肖对此作出了相应的改进，但其定理仍有不足之处。本文主要针对其定理的条件(2)以及C_k的放缩方式作出进一步的改进，相比于张建肖定理的条件(2)，本文放缩更精确。本文借助Cauchy-Schwarz不等式对C_k进行放缩，通过选取特定的Weierstrass表示对，证明了对于任意的发散曲线γ，都有相同的结论成立，并举出了相应的例子。

关键词

Hadamard缺项幂级数，Cauchy-Schwarz不等式，Weierstrass表示对，发散曲线

A Study of Complete Very Small Surfaces Based on the Power Series of Hadamard’s Missing Term

Lili Dong

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 7th, 2023; accepted: Feb. 9th, 2023; published: Feb. 16th, 2023

Abstract

In 1992, Brito constructs a family of complete very small surfaces located between two parallel planes in the middle of $\mathbb{R}^3$ by using a special power series of Hadamard’s missing term. However, due to the excessive requirement of condition (2) of the theorem, Zhang Jianxiao made corresponding improvements in 2022, but her theorem still has shortcomings. This paper focuses on the condition (2) of its theorem and the deflation of Ck to make further improvements, compared with

文章引用: 董丽丽. 基于 Hadamard 缺项幂级数的完备极小曲面[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 219-225.
DOI: 10.12677/pm.2023.132026

the condition (2) of Zhang Jianxiao's theorem, this paper is more precise than the condition (2) of Zhang Jianxiao's theorem.. In this paper, with the help of the Cauchy-Schwarz inequality for the deflation of C_k, we prove that the same conclusion holds for any divergence curve γ by choosing a specific pair of Weierstrass representations, and we give the corresponding example.

Keywords

Hadamard Missing Term Power Series, Cauchy-Schwarz Inequality, Weierstrass Representation Pair, Divergence Curve

1. 引言

完备极小曲面[1]理论是微分几何中一个非常重要的研究课题。Xavier and L. P. M. Jorge 在文献[2]中证明了存在完备极小曲面包含在 $\mathbb{R}^3$ 的两个平行平面之间，但他们并没有给出如何构建实例的线索。而后在 1992 年，Brito 在文献[3]中解决了这个问题，他巧妙地借助了 Hadamard 缺项幂级数构建了一族位于 $\mathbb{R}^3$ 中两平行平面间的完备极小曲面，并给出了具体实例。但我们会发现其定理的其中一个条件要求过强，条件如下所示：

$$\lim_{j\to\infty}|a_j|\min\left\{\left(n_j/n_{j-1}\right),\left(n_{j+1}/n_j\right)\right\}=\infty \tag{1}$$

(1)式限制了 n_j 的可取范围，这就造成了定理的局限性。2022 年，张建肖[4]对此不足之处作出了改进，首先对 α_j 的后一项与前一项的比值作出了限定，而后扩大了 Brito 定理的条件(2)的范围，并在证明过程中做出了改变，条件如下所示：

$$\sum\nolimits_{j=1}^{k-1}|a_j|n_j<\frac{1}{4e}|a_k|n_k,\ \frac{q_k}{2}-\ln q_k\geq 1-\ln\frac{1-\eta}{8\eta} \tag{2}$$

其中，$q_k=\dfrac{n_{k+1}}{n_k}$，$\left|\dfrac{a_{j+1}}{a_j}\right|\leq\eta<1$。

我们会发现(2)式的要求较强，较难满足，因此，本文在(2)式的基础上对其条件作出了进一步的改进，放大了 C_k 的范围，如下所示：

$$\sum\nolimits_{j=1}^{k-1}|a_j|n_j<\frac{1}{2e}|a_k|n_k,\ \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\leq\frac{q-1}{q(q_k+1)}\left(\frac{1}{16}e^{\frac{q_k}{2}-1}-\eta q_k\right) \tag{3}$$

其中，$q_k=\dfrac{n_{k+1}}{n_k}$，$\dfrac{n_{k+1}}{n_k}\geq q>1$。相比于(2)式，(3)式的条件范围更大，更容易满足。

2. 相关定义

定义 1.1 [3]给定一个收敛半径为 1 的幂级数，$h(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}$ 若满足 $\dfrac{n_{j+1}}{n_j}\geq q>1$，对于 $j=1,2,3,\cdots$ 成立，则称 $h(z)$ 为 Hadamard 缺项的。

定义 1.2 [5]设 $C:\gamma=\gamma(s)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条曲线，其中 s 是曲线的弧长参数，令 $\alpha(s)=\gamma'(s)$ 是曲线 C 的单位切向量场，用 $\Delta\theta$ 来表示向量 $\alpha(s+\Delta s)$ 与 $\alpha(s)$ 之间的夹角，如果极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 存在，则称其为曲线 C 在 $p=\gamma(s)$ 点处的曲率。

定义 1.3 [5]称浸入子流形 $I:M^n\to\mathbb{R}^N$ 为极小的，如果其平均曲率 $H\equiv 0$。

定义 1.4 [6]如有一条逐段可微的曲线 $r:[0,+\infty)\to M$，使得对任意紧集 $K\subset M$，存在 $t_0>0$，当 $t>t_0$ 时，有 $r(t)\notin K$，则称 $r(t)$ 为 M 上的发散曲线。

定义 1.5 [2]对于 Ω 内任意一条分段光滑发散曲线 $\Upsilon(t)$，在曲面 S 上对应的曲线 $\vec{r}(\gamma(t))$，$t\in[0,a)$ 的长度是无限的，我们称曲面 S 是完备的。由定义 1.2 得，设 $M:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 是以 (u,v) 为等温参数的定义在开平面 $\mathbb{C}$ 上的极小曲面，若对 $\mathbb{C}$ 中任意一条发散曲线 γ，均有 $\int_\gamma|f|\left(1+|g|^2\right)|\mathrm{d}z|=\infty$，则称极小曲面是完备的。

3. 相关定理

定理 3.1 若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数且满足下列条件：

1) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ 收敛；
2) $\lim\limits_{j\to\infty}|a_j|\min\left\{\left(n_j/n_{j-1}\right),\left(n_{j+1}/n_j\right)\right\}=\infty$；
3) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于 Δ 内的任意发散曲线 γ 有

$$\int_\gamma|h'(z)|^2|\mathrm{d}z|=\infty.$$

由于定理 3.1 的条件(2)对于 n_j/n_{j-1} 的要求过强，这在一定程度上限制了 n_j 的可取范围，所以张建肖对此作出了改进，如下定理 3.2。

定理 3.2 设 $h(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j=1,2,\cdots$，且满足下列条件：

1) $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right|\le\eta<1$，$|a_j|\ne 0$；
2) 对于充分大的 $k\in\mathbb{Z}^+$，满足 $\sum_{j=1}^{k-1}|a_j|n_j<\frac{1}{4e}|a_k|n_k$ 且 $\frac{q_k}{2}-\ln q_k\ge 1-\ln\frac{1-\eta}{8\eta}$，其中，$q_k=\frac{n_{k+1}}{n_k}$ 且 $q_k>2$；
3) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 D 内的任意发散曲线 γ 有

$$\int_\gamma|h'(z)|^2|\mathrm{d}z|=\infty$$

我们发现，虽然定理 3.2 在一定程度上减弱了条件(2)，但仍有不足之处，其中 C_k 的放缩方式有待进一步提高，因此定理 3.3 对这一点作出了进一步优化。

定理 3.3 若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项级数，其中 $z\in\mathbb{C}$，$j\in\mathbb{Z}^+$，$\frac{n_{k+1}}{n_k}\ge q>1$，记 $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ 为 q_k，并且 $h(z)$ 满足下列条件：

1) $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right|\le\eta<1,a_j\ne 0$；
2) 对任意充分大的 $k\in\mathbb{Z}^+$，满足

$$\sum_{j=1}^{k-1}|a_j|n_j<\frac{1}{2e}|a_k|n_k,\ \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\le\frac{q-1}{q(q_k+1)}\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{q_k}{2}-1}-\eta q_k\right);$$

3) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 Δ 内的任意发散曲线 γ，有

$$\int_\gamma |h'(z)|^2|\mathrm{d}z|=\infty .$$

4. 定理 3.3 的证明

对于任意的 $k\in N$，令

$$R_k=\left\{z\in\Delta:1-\frac{1}{n_k}\le|z|\le1-\frac{1}{2n_k}\right\},$$

则每一个圆环的宽度均为 $\frac{1}{2n_k}$。

设 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，则有

$$\begin{aligned}|h'(z)|&=\left|\sum_{j=1}^{\infty}n_j a_j z^{n_j-1}\right|>\left|\sum_{j=1}^{\infty}n_j a_j z^{n_j}\right|\\&\ge n_k|a_k||z|^{n_k}-\left|\sum_{j=1}^{k-1}n_j a_j z^{n_j}\right|-\left|\sum_{j=k+1}^{\infty}n_j a_j z^{n_j}\right|,\ z\in\Delta.\end{aligned}\tag{4}$$

对任意固定的 k，不妨记 $|A_k|=n_k|a_k||z|^{n_k}$， $|B_k|=\left|\sum_{j=1}^{k-1}n_j a_j z^{n_j}\right|$， $|C_k|=\left|\sum_{j=k+1}^{\infty}n_j a_j z^{n_j}\right|$。

由(4)式有，

$$|h'(z)|\ge|A_k|-|B_k|-|C_k|,\ z\in\Delta,\ k\in N。\tag{5}$$

现假设 k 充分大，且当 $z\in R_k$ 时，有 $|A_k|\ge|a_k|n_k\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$，

又因为

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=\frac{1}{e},$$

所以存在 $k_0\in\mathbb{N}$，当 $k>k_0$ 时有下式成立，

$$|A_k|\ge\frac{3}{4}e^{-1}|a_k|n_k,\ k\ge k_0,\ z\in R_k .\tag{6}$$

另一方面，由定理 3 的条件(5)可得，存在 $k_2\in\mathbb{N}$， $k_2\ge k_1$，使得

$$|B_k|\le\sum_{j=1}^{k-1}n_j|a_j|<\frac{1}{2e}|a_k|n_k,\ k\ge k_1,\ z\in R_k\tag{7}$$

最后当 $z\in R_k$ 时，有下式成立

$$|C_k|=\sum_{j=k+1}^{\infty}|a_j|n_j|z|^{n_j}\le\sum_{j=k+1}^{\infty}|a_j|n_j\left(1-\frac{1}{2n_k}\right)^{n_j}\le\sum_{j=k+1}^{\infty}|a_j|n_j\mathrm{e}^{n_j\left(-\frac{1}{2n_k}\right)}\tag{8}$$

即有

$$|C_k|\le|a_{k+1}|n_{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{2n_k}}+\sum_{j=k+2}^{\infty}|a_j|n_j\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}}$$

结合条件(1)中的$\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| \le \eta$，有

$$\left|C_k\right| \le \eta\left|a_k\right| n_k \frac{n_{k+1}}{n_k} \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{2n_k}} + \sum_{j=k+2}^{\infty}\left|a_k\right|\eta^{j-k} n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}}$$

而根据 Cauchy-Schwarz 不等式[7]，有

$$\begin{aligned}\sum_{j=k+2}^{\infty}\left|a_k\right|\eta^{j-k} n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} &\le \left|a_k\right|\sqrt{\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}\eta^{2(j-k)}\right)\left(\sum_{j=k+2}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}\right)} \\ &= \left|a_k\right|\sqrt{\frac{\eta^4}{1-\eta^2}\sum_{j=k+2}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}}\end{aligned} \tag{9}$$

又因为函数$x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}$在$x > n_k$时为单调递减函数，故对于$j = k+1, k+2, \cdots$有

$$\int_{n_{j-1}}^{n_j} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x \ge \left(n_j - n_{j-1}\right) n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} = n_j^2\left(1-\frac{n_{j-1}}{n_j}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \ge n_j^2\left(1-\frac{1}{q}\right)\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}$$

根据上式，有

$$n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{j-1}}^{n_j} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x .$$

故有

$$\sqrt{\sum_{j=k+2}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}} \le \sqrt{\frac{q}{q-1}}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty}\int_{n_{j-1}}^{n_j} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{q}{q-1}}\left(\int_{n_{k+1}}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

其中

$$\int_{n_{k+1}}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x = n_k \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}}\left(n_{k+1}+n_k\right) = n_k \mathrm{e}^{-q_k}\left(n_{k+1}+n_k\right).$$

因此

$$\sum_{j=k+2}^{\infty}\left|a_k\right|\eta^{j-k} n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} \le \left|a_k\right|\frac{\eta^2}{\sqrt{1-\eta^2}}\sqrt{\frac{q}{q-1}} n_k \sqrt{\left(q_k+1\right)\mathrm{e}^{-q_k}} .$$

所以

$$\left|C_k\right| \le \eta\left|a_k\right| n_k q_k \mathrm{e}^{-\frac{q_k}{2}} + \left|a_k\right|\frac{\eta^2}{\sqrt{1-\eta^2}}\sqrt{\frac{q}{q-1}} n_k \sqrt{\left(q_k+1\right)\mathrm{e}^{-q_k}}, z \in R_k .$$

又根据条件(2)的$\frac{\eta^2}{1-\eta^2} \le \frac{q-1}{q\left(q_k+1\right)}\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{q_k}{2}-1} - \eta q_k\right)$，则对于任意$j = k+1, k+2, k+3, \cdots$有

$$\left|C_k\right| \le \frac{1}{16e}\left|a_k\right| n_k,\ k \ge k_2,\ z \in R_k \tag{10}$$

由(5)、(6)、(7)和(8)得，存在$k_2 \in \mathbb{N}$，$k_2 \ge k_1$使得

$$\left|h'(z)\right| \ge \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{15}\right)\frac{1}{e}\left|a_k\right| n_k \ge \frac{11}{60e}\left|a_k\right| n_k ,$$

取 Δ 内的发散曲线 γ，那么对于任意的 $k \ge l,\ l \in N$，γ 必定穿过 R_k，结合条件(3)得

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left|h'(z)\right|^2 |\mathrm{d}z| &\ge \sum_{k=l}^{\infty} \int_{\gamma\cap R_k} \left|h'(z)\right|^2 |\mathrm{d}z| \ge \sum_{k=l}^{\infty} \left(\frac{11}{60e}|a_k| n_k\right)^2 \frac{1}{2n_k} \\ &> \sum_{k=l}^{\infty} \frac{121}{7200e} |a_k|^2 n_k \\ &= \infty\end{aligned}$$

5. 例子说明

设 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$，其中 $a_j = 0.9^j$，$n_j = 8^j$，则 $q = q_k = 8$。显然该例子不满足定理 3.1 的条件(2)。又由于 $\frac{1}{2}\times 8 - \ln 8 < 1 - \ln\left(\frac{1-0.9}{8\times 0.9}\right)$，故 $\frac{q_k}{2} - \ln q_k > 1 - \ln\frac{1-\eta}{8\eta}$ 不成立，所以该例子也不满足定理 3.2 的条件(2)。

令 $\frac{a_{j+1}}{a_j}\frac{n_{j+1}}{n_j} \ge t$，则 $\sum_{j=1}^{k-1} n_j |a_j| \le \left(\frac{1}{t^{k-1}} + \frac{1}{t^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{t}\right)|a_k| n_k \le \frac{1}{t-1}|a_k| n_k$，其中 $t = 0.9\times 8$，故 $\sum_{j=1}^{k-1} n_j |a_j| \le \frac{1}{2e} n_k |a_k|$。又由于 $\frac{0.9^2}{1-0.9^2} \le \frac{8-1}{8(8+1)}\left(\frac{1}{16}e^{\frac{8}{2}-1} - 0.9\times 8\right)$，所以 $\frac{\eta^2}{1-\eta^2} \le \frac{q-1}{q(q_k+1)}\left(\frac{1}{16}e^{\frac{q_k}{2}-1} - \eta q_k\right)$。故该例子对于本文条件均满足。

6. 推论

设 $A(D)$ 是由在单位圆盘 D 内的解析的函数构成的集合。

推论 5.1 存在 $h \in A(D)$，使得 h' 是 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面 M 的 Gauss 映射[8]，其中 M 位于 $\mathbb{R}^3$ 中的两个平行平面之间。

证明：令 M 为 $\mathbb{R}^3$ 中的极小曲面，我们通过选取特定的 weierstrass [9]表示对：取 $f = 1$，$g = h'$，则只要 h 满足定理 3 的条件(1)，便有 $h \in A(D)$ 成立。由于 $\lambda(z)|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2}\left(1 + \left|h'(z)\right|^2\right)|\mathrm{d}z|$，由定理 3 的结论 $\int_\gamma \left|h'(z)\right|^2 |\mathrm{d}z| = \infty$，因而空间中的任何柯西序列都收敛于该空间之中，即该度量所属空间为完备度量空间，所以 h' 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个完备极小曲面 M 的 Gauss 映射。

又由于 $x_3(z) = \mathrm{Re}(h(z)) \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \left|z^{n_j}\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$，所以 M 位于 $\mathbb{R}^3$ 中的两个平行平面之间。

注 5.1：证明过程与 Brito 的推论 1 相同。

注 5.2：完备度量空间定义详见文献[3]。

注 5.3：关于幂级数的更多知识可参考文献[10]

致　谢

首先感谢我的导师对于我的帮助，他在我不知道该如何优化定理证明过程的时候告诉我不要放弃，并为我提供了解决问题的方向。其次，我要感谢我的同学胡同学，他一直在帮助我思考解决问题的方法，并为我提供了众多的文献，让我学习，在此由衷地感谢他们。

参考文献

[1] Nadirashvili, N. (2001) An Application of Potential Analysis to Minimal Surfaces. *Moscow Mathematical Journal*, **1**, 601-604. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2001-1-4-601-604

[2] Jorge, L. and Xavier, F. (1980) A Complete Minimal Surface in R^3 between Two Parallel Planes. *Annals of Mathematics*, **112**, 203-206. https://doi.org/10.2307/1971325

[3] Brito, F. (1992) Power Series with Hadamard Gaps and Hyperbolic Complete Minimal Surfaces. *Duke Mathematical Journal*, **68**, 297-300. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06812-8

[4] 张建肖, 刘晓俊. Hadamard 缺项幂级数及双曲完备极小曲面[J]. 上海理工大学学报: 中文版, 2022, 44(4): 364-367.

[5] 泽维尔, 潮小李. 现代极小曲面讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[6] 程言锋. R 中介于两平行平面之间的一个完备极小曲面[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2007.

[7] Pinelis, I. 关于 Holder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式[J]. 数学译林, 2015(4): 378-380.

[8] 苏敏, 李玉华. 开平面 C 上的亚纯函数与完备极小曲面的 Gauss 映射[J]. 数学学报: 中文版, 2019, 62(3): 515-520.

[9] 张群力, 周平槐, 杨学林, 等. 极小曲面的 Weierstrass 表示与建筑造型[J]. 土木建筑工程信息技术, 2014, 6(3): 25-38.

[10] 王飞. 缺项幂级数收敛半径的一个命题[J]. 高等数学研究, 2022, 25(3): 13-14+65.