Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 588-592
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133062

一类有限群的自同构群的正规化分解

周　芳

太原师范学院数学与统计学院，山西　晋中

收稿日期：2023年2月21日；录用日期：2023年3月22日；发布日期：2023年3月30日

摘　要

针对有限群的半直积的自同构群的结构问题，运用了Bidwell和Curran于2006年引入的“矩阵表示”这种较为直观的研究方法，结合作者得到的关于稳定自同构群的矩阵公式，以及半直积的自同构群的中心化分解，得到了此类半直积的自同构群具有正规化分解的充分条件，举例说明了条件的不可缺少性，简化了Bidwell关于可裂亚循环p-群的自同构群的相关结论的复杂计算，并给出了定理的相关应用。

关键词

半直积，自同构群，正规化分解，直积因子

Normal Decomposition of Automorphism Groups of a Class of Finite Groups

Fang Zhou

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Feb. 21st, 2023; accepted: Mar. 22nd, 2023; published: Mar. 30th, 2023

Abstract

On the structure problem of automorphism groups for the semi-direct product of finite groups, some hypotheses sufficient to guarantee that semi-direct products of finite groups possess normal decomposition is found by using the relatively intuitive research method of “matrix representation” introduced by Bidwell and Curran in 2006, combined with the matrix formula of stable automorphism group proved by the author, and the centralization decomposition of automorphism group of semi-direct product. Complicated calculation of Bidwell and Curran’s automorphism group of splitting metacyclic p-groups is reduced, the relevant applications of the theorem are given.

文章引用: 周芳. 一类有限群的自同构群的正规化分解[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 588-592.
DOI: 10.12677/pm.2023.133062

Keywords

Semidirect Product, Automorphism Group, Normal Decomposition, Direct Product Factor

1. 引言

本文涉及到的群均为有限群，所使用的符号和术语是标准的，见文献[1]。假设群 H 作用在群 N 上，相应的半直积为

$$G = H \ltimes N = \left\{(h,n) \mid h \in H, n \in N\right\},$$

其中的运算为 $(h,n)\cdot(k,m) = \left(hk, n^k m\right), \forall h,k \in H, n,m \in N$。方便起见，我们视 $N \trianglelefteq G, H \le G$，从而 $G = HN$ 且 $H \cap N = 1$，在此约定下有 $(h,n) = hn$。我们把群 G 的自同构群记为 $AutG$。研究半直积的自同构群的结构是群论中一个热点和难点问题，目前得到了一些丰富的结果，其中一个有效的方法是将自同构群分解成若干个结构较为简单的子群的乘积。Bidwell 和 Curran 在文献[2]中引入了“矩阵表示”这种较为直观的研究方法，得到了可裂亚循环 $p(p \ne 2)$-群的自同构群的结构分解。进一步，用这种方法计算了可裂亚循环 2-群的自同构群，见文献[3]。

称半直积 $G = H \ltimes N$ 的自同构 φ 为稳定自同构，如果 φ 可正规化 N，即 $N^\varphi = N$。记 G 的所有稳定自同构构成的集合为

$$N_{AutG}(N) = \left\{\varphi \in AutG \mid N^\varphi = N\right\},$$

显然是 $AutG$ 的一个子群，称为该半直积的稳定自同构群。本文中我们得到了有限群的半直积的自同构群的结构分解，将其分解成正规子群的稳定子群与特殊子群的乘积，是前期相关结果[4] [5]的延续。

设 $\varphi: G \to G$ 是群 G 到其自身的一个映射，令 $(h,1)^\varphi = \left(h^\alpha, h^\beta\right), (1,n)^\varphi = \left(n^\gamma, n^\delta\right)$，则映射 φ 唯一确定了四个映射 $\alpha: H \to H, \beta: H \to N, \gamma: N \to H, \delta: N \to N$，我们将 φ 记为：

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

令

$$A = \left\{\varphi \in AutG \mid H^\varphi = H, [N,\varphi] = 1\right\},$$

$$B = \left\{\varphi \in AutG \mid [H,\varphi] = 1, [H,\varphi] \subseteq N\right\},$$

$$C = \left\{\varphi \in AutG \mid [H,\varphi] = 1, [N,\varphi] \subseteq H\right\},$$

$$D = \left\{\varphi \in AutG \mid [H,\varphi] = 1, N^\varphi = N\right\},$$

不难验证 A,B,C,D 均为 $AutG$ 的子群。可以看出 $A,B,D \subseteq N_{AutG}(N)$。

本文首先给出自同构的矩阵表示的概念，进而得到一些结构较为简单的子群的描述，给出了半直积 $G = H \ltimes N$ 的自同构群具有正规化分解的有效判据，可替代文献[2]和[3]中的复杂计算。在文献[6]中，当

N 是循环群时，我们给出了 $N_{AutG}(N)$ 的结构性质。

2. 主要结论

方便起见，我们引入下述概念：

设 $\varphi \in AutG$，如果 $H^{\varphi} \cap N = 1$，即 H^{φ} 也是 N 在 G 中的一个补子群，则称 φ 关于该半直积是可分的，在不引起混淆的情况下，简称 φ 是可分的。当

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in AutG$$

时，易知 α 是 H 的自同态。不难验证 $ker\alpha = H \cap N^{\varphi^{-1}}$，故 φ 为可分的自同构当且仅当 $ker\alpha = 1$。由于本文只考虑有限群，所以 φ 可分等价于说 $\alpha \in AutH$。如果 G 的每个自同构都是可分的，则称半直积 $G = H \ltimes N$ 是可分的。

引理 1.1 设 $G = H \ltimes N$ 那么 $AutG = N_{AutG}(H)B$ 当且仅当对任意的

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in AutG,$$

$\alpha \in AutH$ 且 $Im\beta \subseteq Z(N)$。特别地，当 N 是交换群时，则 $AutG = N_{AutG}(H)B$ 当且仅当 $G = H \ltimes N$ 是可分的。

证明 若对任意

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in AutG,$$

均有 $\alpha \in AutH$ 且 $Im\beta \subseteq Z(N)$，则从 β 所满足的一般条件 $\beta \in Der_{\alpha}(H,N)$ [1]，可得 $\alpha^{-1}\beta \in Der(H,Z(N))$，$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$。

按照矩阵的乘法公式，我们有

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & -\gamma\alpha^{-1}\beta + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

迫使等式右边第一个矩阵只能是自同构，因此属于 $N_{AutG}(H)$，导致 $\varphi \in N_{AutG}(H)B$，这就证明了所需结论 $AutG = N_{AutG}(H)B$。

反之，若 $AutG = N_{AutG}(H)B$，则任意

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in AutG$$

均有如下分解：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \alpha'\beta' \\ \gamma' & \gamma'\beta' + \delta' \end{pmatrix},$$

但 $\alpha' \in AutH$ 而 $Im\beta' \subseteq Z(N)$，故 $\alpha = \alpha' \in AutH$ 且 $Im\beta = Im\alpha'\beta' = Im\beta' \subseteq Z(N)$。

下述是本文主要结论，给出了半直积的自同构群具有正规化分解的一个有效判据。

定理 1.2 设 $G = H \ltimes N$，p 为素数，如果下述条件成立：

1) $H = Q \times H_0$，其中 $Q \in Syl_p(H)$ 为循环群，

2) $N = P \times N_0$ 为交换群，其中 $P \in Syl_p(N)$，

3) $[P, H_0] = 1$，

4) 若 $[P,Q] \neq 1$，则 $[P,Q]$ 包含 P 的所有 p 阶元素；若 $[P,Q]=1$，则 P 与 Q 没有同构的直因子。

5) $(|H_0|,|N_0|)=1$，

则 $AutG = N_{AutG}(H)B$。

证明根据条件(2)，因为 N 是交换群，根据引理 1.1，只需要证 G 的每个自同构 $\varphi \in AutG$ 均为可分的即可。注意到 P 和 N_0 均为 N 的特征子群，故可被 H 正规化。特别地，Q 正规化 P，记 $G_0 = Q \ltimes P$，显然 $G_0 \in Syl_p(G)$。再根据条件(3)可知 $PH_0 = H_0P$，故 $G = (QH_0)(PN_0) = (QP)(H_0N_0) = G_0(H_0N_0)$。由于 H_0 正规化 N_0，所以 H_0N_0 是群。显然 Q 正规化 H_0N_0，而 P 可中心化 H_0N_0，故 G_0 可正规化 H_0N_0，故 $G = G_0 \ltimes (H_0N_0)$。

现在设 $\iota: G_0 \to G$ 为包含映射，而 $\rho: G \to G_0$ 为自然投射，即对任意 $x \in G_0$，$y \in H_0N_0$，令 $(xy)^\rho = x$，显然ι为单同态而 ρ 为满同态。我们令 $\varphi' = \iota\varphi\rho$ 为合成映射，则 φ' 也是群同态：$G_0 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\rho} G_0$。进而，如果 $x \in G_0$ 使得 $x^{\varphi'} = 1$，因 $x^\iota = x$，故 $x^{\varphi\rho} = 1$，即 $x^\varphi \in Ker\rho = H_0N_0$。但 x 为 p-元，故 x^φ 也为 p-元，然而 H_0N_0 是 p'-群，所以 $x^\varphi = 1$，即 $x = 1$，表明 $Ker\varphi' = 1$，故 φ' 为单同态，进而 $\varphi' \in AutG_0$。

根据条件(5)，$H^\varphi \cap N \subseteq P$ 迫使 $H^\varphi \cap N = H^\varphi \cap P$，同理得 $H \cap P^{\varphi^{-1}} = Q \cap P^{\varphi^{-1}}$，即 $H^\varphi \cap P = Q^\varphi \cap P$，从而 $H^\varphi \cap N = Q^\varphi \cap P$。注意到自然投射 ρ 在 G_0 上的限制为恒等映射，而 $Q^\varphi \cap P \subseteq P \subseteq G_0$ 并且 $Q^\iota = Q$，所以

$$H^\varphi \cap N = Q^\varphi \cap P = \left(Q^\varphi \cap P\right)^\rho \subseteq Q^{\varphi\rho} \cap P^\rho = Q^{\varphi'} \cap P^\rho .$$

但我们已证 $\varphi' \in AutG_0$，如果能证得半直积 $G_0 = Q \ltimes P$ 可分，推出 $H^\varphi \cap N = 1$，即 φ 也可分。

以下证明半直积 $G_0 = Q \ltimes P$ 是可分的。若否，则存在某个

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in AutG_0$$

使得 α 不是 Q 的自同构。但 α 是群同态，而我们只考虑有限群，故 α 不是 Q 到自身的满同态。任取 $x \in Q$，$y \in P$，按定义有 $(xy)^\theta = x^\theta y^\theta = x^\alpha x^\beta y^\gamma y^\delta = \left(x^\alpha y^\gamma\right)\left(\left(x^\beta\right)^{y^\gamma} y^\delta\right)$，因 θ 为满射，故 $x^\alpha y^\gamma$ 取遍 Q 的所有元素，表明 $Im\alpha Im\gamma = Q$。但 $Im\alpha < Q$，而 Q 为循环的 p 群，熟知其有唯一的极大子群，导致 $Im\gamma = Q$，即 $\gamma: P \to Q$ 是满同态。令

$$\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

对任意 $y \in P$，我们有 $1 \cdot y = y^{\theta^{-1}\theta} = \left(y^{\gamma'} y^{\delta'}\right)^\theta = y^{\gamma'\alpha} y^{\delta'\beta} y^{\delta'\gamma} y^{\delta'\delta} = y^{\gamma'\alpha} y^{\delta'\gamma} \cdot \left(y^{\gamma'\beta}\right)^{y^{\delta'\gamma}} y^{\delta'\delta}$，比较两边 Q 中元素得到 $y^{\gamma'\alpha} y^{\delta'\gamma} = 1$，即 $\gamma'\alpha + \delta'\gamma = 0$。由于 α 不是满射，故 $\gamma'\alpha$ 也不是满射，进一步 $\delta'\gamma$ 也不是满射。但已证 γ 是满射，从而 δ' 不能是满射，故 δ' 也不是单射。

虽然 $\delta': P \to P$ 未必是同态，但是满足[1]中引理 2.1 的条件(4)，即 $(yz)^{\delta'} = \left(y^{\delta'}\right)^{z^{\gamma'}} z^{\delta'}, \forall y,z \in P$。按通常方式，我们定义 $Ker\delta' = \left\{y \in P \mid y^{\delta'} = 1\right\}$。一方面从 $y^{\delta'} = z^{\delta'} = 1$ 可推出 $(yz)^{\delta'} = 1$，说明 $Ker\delta'$ 对乘法封闭，可知 $Ker\delta'$ 是 P 的子群。另一方面，由 $y^{\delta'} = \left(yz^{-1}z\right)^{\delta'} = \left(\left(yz^{-1}\right)^{\delta'}\right)^{z^{\gamma'}} z^{\delta'}$ 又可推出 $y^{\delta'} = z^{\delta'}$ 当且仅当

$\left(yz^{-1}\right)^{\delta'}=1$，即 $yz^{-1}\in Ker\delta'$，由此表明 δ' 为单射当且仅当 $Ker\delta'=1$。但上段已证得 δ' 不是单射，所以 $1<Ker\delta'\leq P$。

如果 $y\in P$ 满足 $y\in Ker\delta'\cap Ker\gamma'$，按定义 $y^{\theta^{-1}}=y^{\gamma'}y^{\delta'}=1$，但 θ^{-1} 是 G_0 的自同构，只有 $y=1$，由此推出 $Ker\delta'\cap Ker\gamma'=1$，由于 γ' 满足[1]中引理 2.1 的条件(5)，故对任意 $x\in Q$，$y\in P$，均有 $\left(y^x\right)^{\gamma'}=\left(y^{\gamma'}\right)^{x^{\alpha'}}$。但 Q 为循环群，故 $\left(y^x\right)^{\gamma'}=y^{\gamma'}$，又因为 γ' 为同态，故 $[y,x]=y^{-1}y^x\in Ker\gamma'$，所以 $[P,Q]\subseteq Ker\gamma'$。至此我们证明了 $[P,Q]\cap Ker\delta'=1$。

如果 $[P,Q]\neq 1$，根据条件(4)可知 $[P,Q]$ 包含 P 的所有 p 阶元素，自然也包含 $Ker\delta'\neq 1$ 中的 p 阶元，这将会导致 $[P,Q]\cap Ker\delta'\neq 1$，该矛盾表明 θ 是可分的。

如果 $[P,Q]=1$，则 $G_0=Q\times P$ 为直积，按照条件(4)，P 与 Q 没有同构的直因子，此时 $G_0=Q\times P$ 是可分的，从而 θ 也是可分的，仍然得到所需的矛盾。至此我们完成了证明。

3. 应用

下面两个结论是定理 1.2 的直接应用，给出了两种半直积的自同构群的结构分解。由于

$$B=\left\{\varphi\in AutG\mid[N,\varphi]=1,[H,\varphi]\subseteq N\right\},$$

显然 $B\cong Der\left(H,Z(N)\right)$ [6]，即为从 H 到 $Z(N)$ 的所有导子构成的加法群，但是导子群的结构一般是很难确定的。如果 H 是循环群，则 $Der\left(H,Z(N)\right)$ 也是循环群，便可给出 $AutG$ 的精确构造，见文献[7]。

推论 2.1 设 $G=H\ltimes N$，p 为素数，H 是循环 p 群，N 为交换且其 Sylow$p$-子群 P 循环，当 $[P,H]=1$ 时进一步假设 $|P|\neq|H|$，则 $AutG=N_{AutG}(H)B$。

推论 2.2 设 $G=H\ltimes N$，H 和 N 都是循环 p 群，p 为任意素数，但 G 是非交换群，则 $AutG=N_{AutG}(H)B$。

基金项目

山西省自然科学基金：基于模块化分类的矩阵填充算法恢复蛋白质结构研究(202103021223328)；太原师范学院研究生教育教学研究课题(编号 SYYJSJG-2120)。

参考文献

[1] Hans Kurzweil, Bernd Stellmacher. 有限群论导引[M]. 施武杰, 李士恒, 译. 北京: 科学出版社, 2016.

[2] Bidwell, J.N.S. and Curran, M.J. (2006) The Automorphism Group of a Split Metacyclic *p*-Group. *Archiv der Mathematik*, **87**, 488-497. https://doi.org/10.1007/s00013-006-1899-z

[3] Curran, M.J. (2007) The Automorphism Group of a Split Metacyclic 2-Group. *Archiv der Mathematik*, **89**, 10-23. https://doi.org/10.1007/s00013-007-2107-5

[4] Zhou, F. and Liu, H.G. (2008) Automorphism Groups of Semidirect Products. *Archiv der Mathematik*, **91**, 193-198. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2726-5

[5] 周芳. 一类极小非 Abel 群的自同构群[J]. 中国科技论文, 2016, 11(17): 2006-2007.

[6] 周芳, 马玉杰, 刘合国. 半直积的稳定自同构群[J]. 数学进展, 2010, 39(6): 273-278.

[7] 樊恽, 黄平安. 分裂扩张的稳定自同构群[J]. 数学年刊, 2001, 22A(6): 791-796.