Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 636-643
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133068

带变量核分数次极大算子在 λ-中心 Morrey 空间上的加权估计

杨雨荷[1,2]，辛 珍[1,2]，李巧霞[1,2]，徐苏苏[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2023年2月22日；录用日期：2023年3月23日；发布日期：2023年3月30日

摘 要

利用权不等式及实变方法，并借助于 L^p 空间上的加权有界性，得到了变量核分数次极大算子在加权 λ-中心 Morrey 空间上的有界性。

关键词

加权 λ-中心 Morrey 空间，分数次极大算子，变量核

Weighted Estimates of Fractional Maximal Operator with Variable Kernel on λ-Central Morrey Spaces

Yuhe Yang[1,2], Zhen Xin[1,2], Qiaoxia Li[1,2], Susu Xu[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Feb. 22nd, 2023; accepted: Mar. 23rd, 2023; published: Mar. 30th, 2023

文章引用: 杨雨荷, 辛珍, 李巧霞, 徐苏苏. 带变量核分数次极大算子在 λ-中心Morrey 空间上的加权估计[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 636-643. DOI: 10.12677/pm.2023.133068

Abstract

By applying the weighted inequalities and the real variable methods, the boundedness of the fractional maximal operator with variable kernel is obtained in the weighted λ-central Morrey spaces with the help of the corresponding boundedness on the L^p spaces.

Keywords

Weighted λ-Central Morrey Space, Fractional Maximal Operator, Variable Kernel

1. 引言及主要结果

Morrey 空间在调和分析本身及其偏微分方程等领域有着广泛应用, 同时, 也作为 Lebesgue 空间的一种自然推广 [1]. 2000 年, Alvarez, Lakey, 和 Guzman-Partide 在文献 [2]中研究中心 BMO 空间和 Morrey 空间的关系时, 引入了 λ-中心 Morrey 空间. 2019 年, 陶双平等人在文献 [3]中得到了 Marcinkiewicz 积分及其交换子在 λ-中心 Morrey 空间上的加权估计. 2021年，徐琪等人在文献 [4]中研究了具有粗糙核的双线性 Hardy 算子交换子在 λ-中心 Morrey 空间中的有界性. 有关这类空间上积分算子有界性的进一步研究可参见 [5–9]. 同时，带变量核的算子在调和分析的研究中占有重要的地位. 2011 年, 徐永华等在文献 [10]中证明了带变量核的分数次积分算子在 Hardy 空间上的有界性. 2013 年, 赵凯等在文献 [11]中研究了带变量核的 Marcinkiewicz 积分的加权有界性, 进而许多学者对带变量核的算子做了广泛的研究 [12–16]. 受上面研究的启发,本文将通过研究带变量核的分数次极大算子在 L^p 空间的估计，从而得到带变量核分数次极大算子在 λ-中心 Morrey 空间上的加权估计. 在叙述本文主要结果之前, 需要引入下面的概念和记号.

记 S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ 中的单位球面, 其上装备了 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma(z^{'})$. 设定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的函数 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^t(S^{n-1})(t \geq 1)$ 满足

$$\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, z^{'})|^t \mathrm{d}\sigma(z^{'})\Big)^{\frac{1}{t}} < \infty, \tag{1}$$

其中, $z^{'} = \frac{z}{|z|}, \forall z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

并设 Ω 满足条件 $\Omega(x,\lambda z)=\Omega(x,z),\forall x,z\in\mathbb{R}^n,\forall\lambda>0$ 与消失条件

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x,z^{'})\mathrm{d}(z^{'})=0,\forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

对于 $0<\beta<n$, 带变量核的分数次极大算子 $M_{\Omega,\beta}$ 定义为

$$M_{\Omega,\beta}(f)(x)=\sup_{Q}\frac{1}{|Q|^{n-\beta}}\int_Q|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y. \tag{3}$$

本文将证明变量核分数次极大算子在加权 λ-中心 Morrey 空间上的有界性.

设 $1<p,q<\infty$, $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数 $\omega(x)$ 称为 $A(p,q)$ 权, 如果存在常数 $C>0$, 使得下式成立

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{-p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\leq C, \tag{4}$$

上式中的最小常数 C 用 $[\omega]_{A(p,q)}$ 表示.

定义 [17, 18]　设 $\lambda\in\mathbb{R}$, $1<q<\infty$, ω_1 和 ω_2 为局部可积的非负可测函数, 加权 λ-中心 Morrey 空间定义为

$$\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega_1,\omega_2}(\mathbb{R}^n)=\{f:\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega_1,\omega_2}}=\sup_{r>0}\left(\frac{1}{\omega_1(B(0,r))^{1+\lambda q}}\int_{B(0,r)}|f(x)|^q\omega_2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\}, \tag{5}$$

其中, $B(0,r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心, r 为半径的球, 并且当 $\omega_1=\omega_2:=\omega$ 时, 简记 $\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega_1,\omega_2}(\mathbb{R}^n)=\dot{B}^{q,\lambda}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$.

本文的主要结果如下.

定理　设 $1<t<\infty, 0\leq\beta<n, \Omega\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})$, 带变量核的分数次极大算子 $M_{\Omega,\beta}$ 由式 (3) 所定义,那么当 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}, 1<p'<t, t'<p<q<\infty, 1<t^{'}<p<\frac{n}{\beta}, \lambda_2=\lambda_1+\frac{\beta}{n}<0$, 并且 $\omega(x)^{t'}\in A_{(\frac{p}{t'},\frac{q}{t'})}$ 时, 存在一个与 f 无关的常数 C, 使得

$$\|M_{\Omega,\beta}(f)\|_{\dot{B}^{q,\lambda_2}_{\omega^q}}\leq C\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}.$$

全文中, p' 表示 p 的对偶指标, 即 $1/p+1/p'=1$. C 是不依赖于主要函数或参量的常数, 在不同行中甚至在同一行中可以不同. 用 $\omega\in\Delta_2$ 表示满足双倍条件的权函数 ω 构成的集合, 即存在常数 $C>0$, 使得对任意方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$, 成立 $\omega(2Q)\leq C\omega(Q)$.

2. 定理的证明

在证明定理之前, 先给出下面引理.

引理 1 [13]　如果 $0<\alpha<n, 1<p<\frac{n}{\alpha}$, 以及 $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n}$, 若 $\omega\in A_{(p,q)}$, 则

$$(\int_{\mathbb{R}^n}[M_\alpha f(x)\omega(x)]^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\leq C(\int_{\mathbb{R}^n}[f(x)\omega(x)]^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}.$$

其中 C 是不依赖于 f 的常数.

引理 2 [18]　如果 $\omega\in A_q$ $(1\leq q<\infty)$, 则对任意的 $k\in\mathbb{Z}^+$, $l<0$, 以及方体 $B\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$\omega(2^kB)^l\leq D_1^{kl}\omega(B)^l,$$

其中, $1<D_1<2$.

引理 3 [19]　如果 $\omega\in A_p$, $1\leq p<\infty$, 则 $\omega\in\Delta_2$. 对所有的 $\alpha>1$, 均有

$$\omega(\alpha Q)\leq\alpha^{nq}[\omega]_{A_p}\omega(Q).$$

引理 4　设 $1<t<\infty, \Omega\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})$, 若 $0<\beta<n, 1\leq t^{'}<p<\frac{n}{\beta}, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}$, $\omega(x)^{t^{'}}\in A_{(\frac{p}{t^{'}},\frac{q}{t^{'}})}$. 则存在不依赖于 f 的常数 C, 使得

$$(\int_{\mathbb{R}^n}[M_{\Omega,\beta}f(x)\omega(x)]^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\leq C(\int_{\mathbb{R}^n}[f(x)\omega(x)]^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}.$$

引理 4 的证明　设 $1<t<\infty, \Omega\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})$. 由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}M_{\Omega,\beta}f(x)=&\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\beta}}\int_{|y|\leq r}|\Omega(x,y)||f(x-y)|\mathrm{d}y\\\leq&\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\beta}}\left(\int_{|y|\leq r}|\Omega(x,y)|^t\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_{|y|\leq r}|f(x-y)|^{t^{'}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{t^{'}}}.\end{aligned}$$

其中,

$$(\int_{|y|\leq r}|\Omega(x,y)|^t\mathrm{d}y)^{\frac{1}{t}}\leq Cr^{\frac{n}{t}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})}.$$

因此,

$$\begin{aligned}M_{\Omega,\beta}f(x)\leq&Cr^{\frac{n}{t}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})}\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\beta}}(\int_{|y|\leq r}|f(x-y)|^{t^{'}}\mathrm{d}y)^{\frac{1}{t^{'}}}\\\leq&C\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\beta t^{'}}}(\int_{|y|\leq r}|f(x-y)|^{t^{'}}\mathrm{d}y)^{\frac{1}{t^{'}}}\\\leq&CM_{\beta t^{'},t^{'}}.\end{aligned}\tag{6}$$

注意到 $1<t^{'}<p<\frac{n}{\beta}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}$ 和 $1<\frac{p}{t^{'}}<\frac{n}{\beta t^{'}}$ 及 $\frac{1}{(\frac{q}{t^{'}})}=\frac{1}{(\frac{p}{t^{'}})}-\frac{\beta t^{'}}{n}$. 由引理 1 及式 (6) 有

$$\begin{aligned}(\int_{\mathbb{R}^n}[M_{\Omega,\beta}f(x)\omega(x)]^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\leq&C(\int_{\mathbb{R}^n}[M_{\beta t^{'},t^{'}}f(x)\omega(x)]^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}\\\leq&C(\int_{\mathbb{R}^n}[f(x)\omega(x)]^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

故引理 4 证毕.

定理的证明 设 $f \in \dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}$, 给定任意球 $B=B(0,r)$, $r=\sqrt{n}l(Q)$, 分解 f 为 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{2B}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}}\int_B |M_{\Omega,\beta}(f)(x)|^q\omega^q(x)\mathrm{d}x \leq& \frac{1}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}}\int_B |M_{\Omega,\beta}(f_1)(x)|^q\omega^q(x)\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}}\int_B |M_{\Omega,\beta}(f_2)(x)|^q\omega^q(x)\mathrm{d}x\\ :=& I+II.\end{aligned}$$

对 I, 由引理 4, 并注意到 $\omega^{t'}\in A_{(\frac{p}{t'},\frac{q}{t'})}$, 有

$$\begin{aligned}\int_B |M_{\Omega,\beta}(f_1)(x)|^q\omega^q(x)\mathrm{d}x \leq& C\left(\int_{2B}|f(x)|^p\omega^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}}\\ \leq& \left[\left(\frac{1}{\omega^q(2B)^{1+\lambda_1 p}}\int_{2B}|f(x)|^p\omega^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]^q\omega^q(2B)^{(1+\lambda_1 p)\frac{q}{p}}\\ \leq& C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}\omega^q(2B)^{\frac{q}{p}+\lambda_1 q}.\end{aligned}$$

当 $1+\lambda_2 q\geq 0$ 时, 由引理 3, 并注意到 $1<t'<p<q<\infty$, $\lambda_2-\lambda_1=\frac{\beta}{n}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\beta}{n}$, 我们有

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}}\int_B |M_{\Omega,\beta}(f_1)(x)|^q\omega^q(x)\mathrm{d}x\\ \leq& C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}\frac{\omega^q(2B)^{1+\lambda_2 q}}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}}\\ \leq& C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}.\end{aligned}\tag{7}$$

当 $1+\lambda_2 q<0$ 时, 由引理 2 同理可得到相同的估计.

下面估计 II, 当 $x\in B, y\in 2^{j+1}B$, 得到 $2^{j-1}r_B\leq|y-x|<2^{j+2}r_B$, 有

$$(\int_{2^{j+1}B}|\Omega(x,x-y)'|^t\mathrm{d}y)^{\frac{1}{t}}\leq C\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})}\cdot|2^{j+1}B|^{\frac{1}{t}}.\tag{8}$$

注意到 $\omega(x)^{t'}\in A_{(\frac{p}{t'},\frac{q}{t'})}$, 由式 (4), 对任意方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{t'\frac{q}{t'}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{t'}{q}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{t'[-(\frac{p}{t'})']}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{(\frac{p}{t'})'}}\leq C.$$

因此,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{t'}{q}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{\frac{t}{t-1}(-(\frac{p(t-1)}{pt-p-t}))}\mathrm{d}x\right)^{\frac{pt-p-t}{p(t-1)}} \leq C.$$

而

$$\int_Q \omega^{-\frac{pt}{pt-p-t}}\mathrm{d}x \leq C\frac{|Q|^{\frac{pt}{(pt-t-p)q}}|Q|}{\omega^q(Q)^{\frac{pt}{(pt-p-t)q}}}.$$

所以,

$$\int_Q \omega^{-t'(\frac{p}{t'})'}\mathrm{d}x = \int_Q \omega^{-\frac{pt}{pt-p-t}}\mathrm{d}x \leq \frac{|Q|^{\frac{pt}{(pt-t-p)q}}|Q|}{\omega^q(Q)^{\frac{pt}{(pt-p-t)q}}}.$$

因此, 有

$$\left(\int_Q \omega^{-\frac{pt}{pt-p-t}}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{t}} = \left(\frac{|Q|^{\frac{pt}{(pt-t-p)q}}|Q|}{\omega^q(Q)^{\frac{pt}{(pt-p-t)q}}}\right)^{\frac{pt-p-t}{pt}} \leq \frac{|Q|^{\frac{1}{q}}|Q|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{t}}}{\omega^q(Q)^{\frac{1}{q}}}. \tag{9}$$

根据上面的估计, 由 Hölder 不等式和 $\lambda_2-\lambda_1=\frac{\alpha}{n}$ 及式 (8), (9), 有

$$\begin{aligned}
M_{\Omega,\beta}f_2(x) =& \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\beta}{n}}}\int_{Q\bigcap B^c_{(0,2r)}}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
\leq& \frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta}{n}}}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^jr<|y|\leq 2^{j+1}r}|\Omega(x,x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\\
\leq& C\frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta}{n}}}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{2^{j+1}B}|\Omega(x,x-y)|^t\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{t}}\\
&\times\left(\int_{2^{j+1}B}\omega(y)^{-\frac{pt}{pt-p-t}}\mathrm{d}y\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{t}}\\
\leq& C\frac{1}{|B|^{1-\frac{\beta}{n}}}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\frac{|2^{j+1}B|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{t}+\frac{1}{q}}}{\omega^q(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})}\cdot|2^{j+1}B|^{\frac{1}{t}}\\
\leq& C\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^t(S^{n-1})}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|2^{j+1}B|^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{|B|^{1-\frac{\beta}{n}}}\left(\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\\
\leq& C\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{\beta}{n}}\left(\frac{1}{\omega^q(2^{j+1}B)^{1+\lambda_1 q}}\int_{2^{j+1}B}|f(y)|^p\omega^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\times\frac{\omega^q(2^{j+1}B)^{(1+\lambda_1 q)\frac{1}{p}}}{\omega^q(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}}}\\
\leq& C\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{\beta}{n}}\frac{\omega^q(2^{j+1}B)^{(1+\lambda_1 p)\frac{1}{p}}}{\omega^q(2^{j+1}B)^{\frac{1}{q}}}\\
\leq& C\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}\sum_{j=1}^{\infty}\omega^q(2^{j+1}B)^{\lambda_2}.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}} \int_B |M_{\Omega,\beta}(f_2)(x)|^q \omega^q(x)\mathrm{d}x \\ &\le C \frac{\omega^q(B)}{\omega^q(B)^{1+\lambda_2 q}} \|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}} \sum_{j=1}^{\infty} \omega^q(2^{j+1}B)^{\lambda_2 q} \\ &\le C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega^q(2^{j+1}B)^{\lambda_2 q}}{\omega^q(B)^{\lambda_2 q}} \\ &\le C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}} \sum_{j=1}^{\infty} [\frac{\omega^q(2^{j+1}B)}{\omega^q(B)}]^{\lambda_2 q}. \end{aligned}$$

同理, 当 $\omega^{t'} \in A_{(\frac{p}{t'},\frac{q}{t'})}, 1 < t' < p < q < \infty$ 时, 有 $\omega^q \in A_s$, 其中 $s = 1 + \frac{q}{p'}$. 故当 $\lambda_2 < 0$, 由引理 2 得

$$\begin{aligned} II &\le C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}} \sum_{j=1}^{\infty} [\frac{\omega^q(2^{j+1}B)}{\omega^q(B)}]^{\lambda_2 q} \\ &\le C\|f\|^q_{\dot{B}^{p,\lambda_1}_{\omega^p,\omega^q}}. \end{aligned} \tag{10}$$

结合 I 和 II 的估计, 定理证毕.

基金项目

伊犁师范大学校级项目(2021YSYB073).

参考文献

[1] Morrey, C. (1938) On Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **43**, 126-166. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8

[2] Alvarez, J., Guzman-Partida, M. and Lakey, J. (2000) Spaces of Bounded λ-Central Mean Oscillation, Morrey Spaces, and λ-Central Carleson Measures. *Collectanea Mathematica*, **51**, 1-47.

[3] 陶双平, 陈转转. Marcinkiewicz积分及其交换子在加权λ-中心Morrey空间上的加权有界性[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2019, 55(4): 1-8.

[4] 徐琪, 喻晓, 马江山. 具有粗糙核的双线性Hardy算子交换子在λ-中心Morrey空间中的有界性[J]. 上饶师范学院学报, 2021, 41(6): 12-17.

[5] Vakhtang, K. and Alexander, M. (2007) Weighted Criteria for Generalized Fractional Maximal Functions and Potentials in Lebesgue Spaces with Variable Exponet. *Integral Transforms and Special Functions*, **18**, 609-628. https://doi.org/10.1080/10652460701445344

[6] Tao, X.X. and Shi, Y.L. (2011) Multilinear Commutators of Calderón-Zygmund Operator on λ-Central Morrey Spaces. *Advances in Mathematics*, **40**, 47-59.

[7] Yu, X. and Tao, X.X. (2013) Boundedness for a Class of Generalized Commutators on λ-Central Morrey Spaces. *Acta Mathematica Sinica English Series*, **29**, 1917-1926. https://doi.org/10.1007/s10114-013-2174-4

[8] 陶双平, 高荣. 多线性分数次积分和极大算子在Morrey空间上的加权估计[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 30-37.

[9] 张璞, 武江龙. 分数次极大函数的交换子[J]. 数学学报, 2009, 52(6): 1235-1238.

[10] 徐永华, 束立生. 带变量核的分数次积分算子在Harey空间上的有界性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(2): 199-203.

[11] 赵凯, 李加锋, 朱素婷. 变量核的Marcinkiewicz积分的加权有界性(英文) [J]. 应用数学, 2013, 26(1): 172-176.

[12] Ding, Y., Chen, J.C. and Fan, D.S. (2002) A Class of Integral Operators with Variable Kernels on Hardy Spaces. *Chinese Annals of Mathematics Series A*, **23**, 289-296.

[13] Ding, Y., Lin, C.C. and Shao, S.L. (2004) On the Marcinkiewicz Integral with Variable Kernels. *Indiana University Mathematics Journal*, **53**, 805-821. https://doi.org/10.1512/iumj.2004.53.2406

[14] Chen, Y.P. and Ding, Y. (2013) The Boundedness for Commutator of Fractional Integral Operator with Rough Variable Kernel. *Potential Analysis*, **38**, 119-142. https://doi.org/10.1007/s11118-011-9267-4

[15] Shao, X.K. and Wang, S.P. (2015) Boundedness of Fractional Operators with Variable Kernels on Weighted Morrey Spaces. *Journal of Anhui University (Natural Sciences)*, **39**, 21-24.

[16] 辛银萍, 陶双平. 带变量核的Marcinkiewicz积分算子在变指标Herz型Hardy空间上的有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(6): 38-43.

[17] 赵凯, 董鹏娟, 邵帅. 分数次积分算子交换子在λ-中心Morrey空间上的加权有界性[J]. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(12): 88-92.

[18] Yu, X., Zhang, H.H. and Zhao, G.P. (2016) Weighted Boundedness of Some Integral Operators on Weighted λ-Central Morrey Spaces. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **31**, 331-342. https://doi.org/10.1007/s11766-016-3348-5

[19] Grafakos, L. (2008) Classical and Modern Fourier Analysis. Prentice Hall, New York, 279-291.