Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 942-947
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134099

完全多部图的点被多重集可区别的IE-全染色

王勇军

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年3月18日；录用日期：2023年4月19日；发布日期：2023年4月26日

摘 要

利用反证法，构造染色法，色集合事先分配法，讨论了完全t部图的顶点被多重集可区别的IE-全染色。给出了最优染色的一个方案，并确定了相应染色的色数。完全解决了完全多部图的点被多重集可区别的IE-全染色的问题。

关键词

完全t部图，IE-全染色，多重集，色集合，可区别

Vertex Distinguishing IE-Total Coloring of Complete Multipartite Graphs by Multisets

Yongjun Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 18^{th}, 2023; accepted: Apr. 19^{th}, 2023; published: Apr. 26^{th}, 2023

Abstract

In this paper, by using the method of contradiction, the method of constructing con-

文章引用: 王勇军. 完全多部图的点被多重集可区别的IE-全染色[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 942-947.
DOI: 10.12677/pm.2023.134099

crete coloring and the method of distributing the color sets in advance, we discuss the IE-total colorings of complete t-partite graph which are vertex-distinguished by multisets. The methods of the corresponding optimal coloring are given and the chromatic numbers of the corresponding colorings are obtained. The question of vertex distinguishing IE-total coloring of complete multipartite graphs by multisets has be completely settled.

Keywords

Complete t-Partite Graph, IE-Total Coloring, Multiset, Color Set, Distinguishing

1. 引言

点可区别一般边染色是由Harary F等人于1985 年在文献 [1]中提出的.文献 [2]中引入了点可区别一般全染色,并且研究了路,圈,星(即$K_{1,n}$),双星, 三星, 轮,扇,完全图的一般点可区别全染色,确定了它们的一般点可区别全色数. 点可区别(被非多重集)IE-全染色在文献 [3–6]中均有研究,且针对完全三部图展开研究.在文献 [7]中首次提出了点被多重集可区别的IE-全染色,且针对完全二部图展开研究.在本文中我们研究完全多部图的点被多重集可区别的IE-全染色, 确定完全t 部图的点被多重集可区别的IE-全色数.本文在染色方案上与前人相比,有相应的改变和完善.所以这项工作将给点被多重集可区别的一般全染色的后续研究提供染色方法和染色思路,进一步丰富有关一般全染色的理论成果.

2. 准备工作

图G的IE-全染色是指使得相邻顶点染以不同色的一个一般全染色. 通常情况下,我们进行染色时,所用的k种颜色用1,2,···,k来表示,且数字代表的颜色之间有大小关系.图G使用了k种颜色的IE-全染色叫做图G的k-IE-全染色.

设f为图G的IE-全染色.对于任意的$x \in V(G)$,用$\tilde{C}_f(x)$或者$\tilde{C}(x)$表示点x的色以及与x相关联的边的色构成的多重集.称$\tilde{C}_f(x)$为x 的多重色集合或者色集合.显然有$|\tilde{C}_f(x)| = d_G(x) + 1$,其中$d_G(x)$表示图$G$中点$x$ 的度.若对任意的$u, v \in V, u \neq v$, 总有$\tilde{C}_f(u) \neq \tilde{C}_f(v)$ 则称f是点被多重集可

区别的.

令$\chi_{vt}^{ie}(G) = min\ \{\ k \mid G$存在点被多重集可区别的$k$-IE-全染色$\}$,将$\chi_{vt}^{ie}(G)$称为点被多重集可区别的IE-全色数.

本文中,用$K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$表示t个部顶点数分别为$n_1, n_2, \cdots, n_t$的完全t部图,第i个部为 $X_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots x_{n_i}^{(i)}\}, |X_i| = n_i,\ n_i < n_j,\ 1 \le i < j \le t.$

在$K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$的一个k-IE-全染色下,X_t是含顶点最多的部,X_t中点的色集合为 $\{\ a_{j,1}, a_{j,2}, \cdots, a_{j,n_1+n_2+\ldots+n_{t-1}+1}\}$,色集合中包含$n_1+n_2+\ldots+n_{t-1}+1$种元素.(重复的按重复出现的次数计算)

引理2.1 [8]从n个互异元素中可重复取出r个组合的个数为$\binom{n+r-1}{r}$.

从n个互不相同元素中取出r个作成的重复组合也叫做r-组合. r-组合也是前述n个互不相同元素构成的集合的含有r个元素的多重子集合,所以r- 组合也叫做r-多重子集或r-子集.

我们约定, 在本文中书写一个r-子集时, 里面的元素按照不减的顺序排列.

3. 完全t部图的点被多重集可区别的IE-全染色

定理3.1 (i) 当$n_{t-1} \le n_t \le \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t}{t-1} - \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t-1}{t-2}$时,$\tilde{\chi_{vt}^{ie}}(K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}) = t.$

(ii)当$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+k-1}{k-2} - \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t-1}{t-2} + 1 \le n_t$ $\le \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+k}{k-1} - \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t-1}{t-2}$, $k > t$ 时,$\tilde{\chi_{vt}^{ie}}(K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}) = k.$

证明 先证$K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$不存在点被多重集可区别的$(k-1)$–IE-全染色,利用反证法, 假设完全t部图存在点被多重集可区别的$(k-1)$-IE-全染色.

由于X_1中点所染的色,X_2中点所染的色,$\cdots$,X_t中点所染的色互不相同,不妨假设颜色1染了X_1中的点,颜色2染了X_2 中的点,$\cdots$,颜色$t-1$染了X_{t-1}中的点.

对于$k-1$种互异颜色的$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1)$-子集,如子集中只含元素1, 2,$\cdots, t-1$,那么这些子集不能做为$X_t$中点的色集合.只含颜色1, 2,$\cdots, t-1$ 的$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1)$-子集有$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t-1}{t-2}$ 个.

又因为 $\binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+k-1}{k-2} - \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t-1}{t-2} \le$

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+k-1}{k-2} - \binom{n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+t-1}{t-2} + 1.$$

故完全t部图不含有$k-1$种色的点被多重集可区别的IE-全染色.

下面给出我们找到的完全t部图的点被多重集可区别的k-IE-全染色的染色方案.

首先,给X_i部中的点染以色i, $i=1,2,\cdots,t-1$.

其次,$[X_1,X_2]$中的边染以颜色2.

$[X_1\cup X_2,X_3]$中的边染以颜色3

$[X_1\cup X_2\cup X_3,X_4]$中的边染以颜色4

$\vdots$

$[X_1\cup X_2\cup\cdots X_{t-2},X_{t-1}]$中的边染以颜色$t-1$

设A_j是一个n_j阶方阵,次对角线及上方元素皆为j,次对角线下方元素都为$j+1$,J_j是一个$(n_{t-1}-n_j)\times n_j$的元素全为j的矩阵,$j=1,2,\cdots,t-1$. 注:J_{t-1}是空的,若$n_{t-2}=n_{t-1}$,则J_{t-2}也是空的,等等.

构造一个$n_{t-1}\times(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1)$阶的矩阵$M$.使得前$n_1$列构成的矩阵为$\begin{pmatrix}A_1\\J_1\end{pmatrix}$,第$(n_1+1)$列到$(n_1+n_2)$列构成的矩阵为$\begin{pmatrix}A_2\\J_2\end{pmatrix}$, 第$(n_1+n_2+1)$列到$(n_1+n_2+n_3)$列构成的矩阵为$\begin{pmatrix}A_3\\J_3\end{pmatrix}$, $\cdots$ 第$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-3}+1)$列到$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-2})$列构成的矩阵为$\begin{pmatrix}A_{t-2}\\J_{t-2}\end{pmatrix}$,第$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-2}+1)$列到$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1})$列构成的矩阵为$\begin{pmatrix}A_{t-1}\\J_{t-1}\end{pmatrix}$, 最后一列的矩阵元素全为$t$.矩阵$M$的每一行元素从左到右是不减的,且其任意两行不同.

将k种互不相同色的至少含t, $t+1,\cdots,k$之一的$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1)-$子集(多重集,个数$\geq n_t$)作为色集合对应到$X_t$的各个顶点上,使得$X_t$中不同顶点被对应不同子集.

设$x_j^{(t)}$对应的子集为$\{a_{j,1},a_{j,2},\cdots,a_{j,n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1}\}$, 当然,
$a_{j,1}\leq a_{j,2}\leq\cdots\leq a_{j,n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1}$.这里为了方便,令$a_{j,1},a_{j,2},\cdots,a_{j,n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1}$刚好是$M$中第$j$行的元素.

下面对X_t中点及关联边进行如下染色.

$a_{j,1}$染边$x_1^{(1)}x_j^{(t)}$, $a_{j,2}$染边$x_2^{(1)}x_j^{(t)},\cdots,a_{j,n_1}$染边$x_{n_1}^{(1)}x_j^{(t)}$ a_{j,n_1+1} 染边$x_1^{(2)}x_j^{(t)}$, a_{j,n_1+2}染边$x_2^{(2)}x_j^{(t)}$, $\cdots,a_{j,n_1+n_2}$染边$x_{n_2}^{(2)}x_j^{(t)}$ $\cdots$, $a_{j,n_1+n_2+\cdots,+n_{t-2}+1}$ 染边$x_1^{(t-1)}x_j^{(t)}$, $a_{j,n_1+n_2+\cdots+n_{t-2}+2}$染边$x_2^{(t-1)}x_j^{(t)}$ $\cdots$ $a_{j,n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}}$染边$x_{n_{t-1}}^{(t-1)}x_j^{(t)}$, $a_{j,n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1}$染点$x_j^{(t)}$, $j=1,2,\cdots,n_t$.

下说明完全t部图在这种染色方案下点的色集合各不相同.

1.当$n_{t-1}=n_t$时,由矩阵可知,X_t中前n_{t-1}个点的色集合已经给出.

(1)对于不同部点的色集合而言,X_1,X_2,X_t各部顶点的色集合中所含元素种类不同.

X_1中点的多重色集合里各不相同的色为1,2,$\cdots,t-1$.

X_2中点的多重色集合里各不相同的色为2,3,$\cdots,t-1$.

$\vdots$

X_{t-1}中点的多重色集合里各不相同的色为$t-1,t$.

X_t中点的多重色集合里各不相同的色为1,2,$\cdots,t$.

故各部点的多重色集合各不相同.

(2)对于同一部的点的色集合而言,所含某个元素的个数总是不同.

$\tilde{C}(x_i^{(l)})$中颜色l的个数恒多于$\tilde{C}(x_j^{(l)})$, $l\in[1,t-1]$, $i<j$, $i,j\in[1,n_l]$.

$\tilde{C}(x_i^{(t)})$中颜色t的个数恒小于$\tilde{C}(x_j^{(t)})$, $i<j$, $i,j\in[1,n_t]$

2.当$n_{t-1}<n_t$时.

首先说明X_t部每个点的色集合与其他部顶点的色集合各不相同.当$n_{t-1}<n_t$时,是在X_t中已给

定前n_{t-1}个点的情况下继续加点,此时X_t部点的色集合所含元素个数小于其他部点的色集合所含元素个数,故X_t部每个点的色集合与其他部的顶点的色集合不相同,其次,因为,X_t点的色集合是k种互不相同色的至少含$t,\ t+1,\cdots,k$ 之一的$(n_1+n_2+\cdots+n_{t-1}+1)-$子集所对应的,故$X_t$ 内部顶点多重色集合互不相同.下考虑$X_1,X_2,\cdots,X_{t-1}$部之间点的色集合的关系.

(1)不同部之间的色集合各不相同.

以X_4部的一点与X_7部的一点为例.

在X_t部已确定n_{t-1}个点的情况下,$\tilde{C}(x_i^{(4)})\neq\tilde{C}(x_j^{(7)})$, $\tilde{C}(x_i^{(4)})$中所含颜色4的个数要大于$\tilde{C}(x_j^{(7)})$中所含元素4的个数,要使得$\tilde{C}(x_i^{(4)})=\tilde{C}(x_j^{(7)})$,至少存在$X_t$中非已确定的$n_{t-1}$个点外的一点$x_p$,有$a_{p,n_1+n_2+\cdots+n_6+j}=4, i\in[1,n_4], j\in[1,n_7]$.

此时,若$a_{p,n_1+n_2+n_3+i}=4$,则对$\tilde{C}(x_i^{(4)})$与$\tilde{C}(x_j^{(7)})$的比较无影响.

为了出现$\tilde{C}(x_i^{(4)})=\tilde{C}(x_j^{(7)})$,需$a_{p,n_1+n_2+n_3+i}<4$.

假设$a_{p,n_1+n_2+n_3+i}=3$,那么需要X_t中非已确定的n_{t-1}+1个点外的一点x_l,使得$a_{l,n_1+n_2+\cdots+n_6+j}=3$. 那么$a_{l,n_1+n_2+n_3+i}<3$.

假设$a_{l,n_1+n_2+n_3+i}=1$,那么需要X_t中非已确定的n_{t-1}+2个点外的一点x_q,使得$a_{l,n_1+n_2+\cdots+n_6+j}=1$. 此时,$a_{q,n_1+n_2+n_3+i}$只能为1.

所以$\tilde{C}(x_i^{(4)})\neq\tilde{C}(x_j^{(7)})$恒成立,其他不同部点的色集合不同的证明类似.

(2)同一部之间点的色集合各不相同.

以X_2部的两个点为例.在X_t部已确定的n_{t-1}个点的情况下,$\tilde{C}(x_i^{(2)})\neq\tilde{C}(x_j^{(2)})$, $i<j,\ i,j\in[1,n_2]$.

$\tilde{C}(x_i^{(2)})$中颜色2的个数多于$\tilde{C}(x_j^{(2)})$中颜色2的个数.

要使得$\tilde{C}(x_i^{(2)})=\tilde{C}(x_j^{(2)})$,至少存在$X_t$中非已确定的$n_{t-1}$个点外的一点$x_p$,其中,$a_{p,n_1+j}$=2.

此时,若a_{p,n_1+i}=2,则对$\tilde{C}(x_i^{(2)})$与$\tilde{C}(x_j^{(2)})$的比较无影响.

为了出现$\tilde{C}(x_i^{(2)})=\tilde{C}(x_j^{(2)})$,需$a_{p,n_1+i}$=1.

此时,至少存在X_t中非已确定的$n_{t-1}+1$个点外的一点x_q,其中,a_{q,n_1+j}=1,而此时a_{q,n_1+1}必为1.

所以,$\tilde{C}(x_i^{(2)})\neq\tilde{C}(x_j^{(2)})$必成立.其他内部点的色集合不同的证明类似.

这样,我们给出了完全t部图点被多重集可区别的IE-全染色.

参考文献

[1] Harary, F. and Plantholt, M. (1985) The Point-Distinguishing Chromatic Index. In: Harary, F. and Maybee, J.S., Eds., *Graphs and Application*, Wiley Interscience, New York, 147-162.

[2] Liu, C.J. and Zhu, E.Q. (2014) General Vertex-Distinguishing Total Colorings of Graphs. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, Article ID: 849748. https://doi.org/10.1155/2014/849748

[3] Chen, X.E., Gao, Y.P. and Yao, B. (2013) Vertex-Distinguishing IE-Total Colorings of Complete Bipartite Graphs $K_{m,n}(m<n)$. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**, 289-306. https://doi.org/10.7151/dmgt.1659

[4] 陈祥恩, 张爽, 李泽鹏. $K_{2,4,p}$的点可区别IE-全染色[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(12): 2999-3004.

[5] 马静静, 陈祥恩. $K_{4,4,p}$ 的点可区别的IE-全染色($4 \leq p \leq 1007$) [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2020, 59(4): 134-143.

[6] 闫瑞敏, 陈祥恩. $K_{5,5,p}$的点可区别的IE-全染色($p \geq 2028$) [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2022(2): 16-23.

[7] 陈祥恩, 王勇军. 完全二部图的点被多重集可区别的IE-全染色及一般全染色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(4): 838-844.

[8] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1990.