Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1431-1439
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135147

具有捕获的浮游动植物相互作用模型的研究

李晓娜[1,2]

[1]伊犁师范大学，数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学，应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2023年4月22日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

本文对具有捕获的一种产毒浮游植物与两种浮游动物相互作用模型进行了动力学研究。分析了模型平衡点的存在性和局部及全局稳定性。研究表明，由于毒素本身的特征，系统的稳定性不是不可逆的。

关键词

浮游动植物，毒素，捕获，稳定性

Mathematical Analysis of a Zooplankton-Phytoplankton Model with Harvest

Xiaona Li[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yining Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yining Normal University, Yining Xinjiang

Received: Apr. 22nd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

A mathematical model with harvest is proposed and investigated in this paper. Stability criterion of the model is analyzed both from local and global point of view. Our results indicate that the stability of the system will not be irreversibly changed by the toxin intrinsic characteristics.

文章引用: 李晓娜. 具有捕获的浮游动植物相互作用模型的研究[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1431-1439.
DOI: 10.12677/pm.2023.135147

Keywords

Phytoplankton-Zooplankton, Toxin, Harvesting, Stability

1. 引言

浮游生物是指能在海洋和其他水体中自由漂浮的微小生物，其中分有浮游植物和浮游动物。作为海洋食物链中的第一营养级，浮游植物通过吸收周围环境中的二氧化碳，将能量、无机化学物质转化为碳水化合物，浮游动物则以浮游植物为食。由于浮游生物的数量很难监测，所以有必要建立数学模型来研究浮游生物数量的变化。

近几年，许多学者对浮游生物系统进行了研究，在文献[1] [2]中，作者建立了不同的浮游动植物模型。在文献[1]中，作者研究了在浮游植物繁盛的水体下，具有营养的浮游动植物系统，在文献[2]中作者研究了季节性和周期性对浮游生物系统的影响。众所周知，有害海藻水华族[3]会造成大量的水生生物死亡或中毒，这不仅会影响人类身体健康，还会造成巨大的社会危害。所以毒素在浮游动植物数量的增长中扮演着重要的角色。在文献[4] [5]中，作者建立了有毒浮游植物与浮游动物相互作用的模型。文献[4]表明，毒素既可以抑制浮游植物与浮游动物数量的增长，还可以抑制它们的营养水平。

随着社会的发展，一方面人类对食物和能源有了更多的需求，在过去的半个世纪里，鱼类的数量已经大大减少；而另一方面，保护生态系统又是全球关注的问题。由于两者的矛盾，可持续发展受到越来越多的重视，在文献[6] [7]中，作者也做了研究。众所周知，最佳的捕获和可持续发展有直接的关系，在文献[8]中，作者建立了具有捕获的浮游生物系统，结论表明，过度的开采会导致物种的灭绝，而适度的捕获会确保物种的可持续性。所以捕获因素对于浮游动植物的研究也非常重要。文献[9]描述了一个包含猎物避难所的猎物－捕食者渔业模型，反映了在存在捕食者和适当税收的情况下，净经济收入与用于捕获猎物的捕捞之间的动力学模型。

在文献[10] [11]中，作者还考虑了同一物种为了生存，而产生的竞争因素。

基于文献[5]中，作者建立的有毒浮游植物与浮游动物相互作用的模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = rp(t)\left(1-\dfrac{p(t)}{K}\right) - \dfrac{\mu_1 p(t)z(t)}{\alpha_1 + p(t)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\beta_1 p(t)z(t)}{\alpha_1 + p(t)} - d_1 z(t) - \dfrac{\rho_1 p(t)z(t)}{\alpha_1 + p(t)}. \end{cases} \tag{1}$$

变量 $p(t)$ 和 $z(t)$ 分别代表在时刻 t，浮游植物和浮游动物的数量。参数 r 和 K 分别是浮游植物的内禀增长率和环境容纳量。$\mu_1(>0)$ 是浮游动物对浮游植物的最大捕食率；$\beta_1(>0)$ 是浮游动物对浮游植物的转换率，满足 $0<\beta_1<\mu_1$。$d_1(>0)$ 代表浮游动物的自然死亡率。$\rho_1(>0)$ 代表每单位浮游植物的毒素释放率，满足 $\rho_1<\beta_1$。$\dfrac{\mu_1 pz}{\alpha_1+p}$ 表示浮游植物被浮游动物捕食的功能反映函数，$\dfrac{\rho_1 pz}{\alpha_1+p}$ 表示毒素释放使得浮游动物死亡。本文建立了具有捕获的一种产毒浮游植物与两种浮游动物相互作用的模型，模型如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=rp\left(1-\dfrac{p}{K}\right)-\dfrac{\mu_1pz_1}{\alpha_1+p}-\dfrac{\mu_2pz_2}{\alpha_2+p}-cEp\\ \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta_1pz_1}{\alpha_1+p}-\dfrac{\rho_1pz_1}{\alpha_1+p}-d_1z_1-g_1z_1^2-c_1Ez_1\\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta_2pz_2}{\alpha_2+p}-\dfrac{\rho_2pz_2}{\alpha_2+p}-d_2z_2-g_2z_2^2-c_2Ez_2\end{cases}\tag{2}$$

常数 c,c_1,c_2 表示三种物种的可捕获率，E 表示对物种的捕获，此模型还考虑了浮游动物为了生存而相互竞争的因素，g_1,g_2 表示两种浮游动物的竞争系数。

若 $\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE<0$，则 $z_i'<0$，因此，我们假设 $\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE>0$，$(i=1,2)$。而且从生物意义的角度考虑，我们仅研究模型(2)在 R_+^3 上的动力学行为。

文章的组织结构如下，在第 2 部分，研究模型(2)平衡点的存在性；在第 3 部分研究平衡点的局部及全局稳定性；第 4 部分对文章做简要的总结。

2. 平衡点的存在性

这一部分，我们研究系统(2)平衡点的存在性。

系统(2)可能存在五个非负平衡点，分别为灭绝平衡点 $E_0(0,0,0)$，浮游动物灭绝平衡点 $E^0(p^*,0,0)$，第二种浮游动物灭绝平衡点 $E_1(p_1^*,z_1^*,0)$，第一种浮游动物灭绝平衡点 $E_2(p_2^*,0,z_2^*)$ 和共存平衡点 $E^*(\overline{p}^*,\overline{z}_1^*,\overline{z}_2^*)$。若浮游动物灭绝平衡点 $E^0(p^*,0,0)$ 存在，则 $p_0^*=\dfrac{K(r-cE)}{r}$，且 $r-cE>0$。若第二种浮游动物灭绝平衡点 $E_1(p_1^*,z_1^*,0)$ 和第一种浮游动物灭绝平衡点 $E_2(p_2^*,0,z_2^*)$ 存在，则 p_i^*,z_i^* 满足下面的等式：

$$\begin{cases}p_i=\dfrac{\alpha_i+p}{\mu_i}\left(r-\dfrac{r}{K}p-cE\right),\\ z_i=\dfrac{(\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE)p-(d_i+c_iE)\alpha_i}{g_i(\alpha_i+p)}.\end{cases}\tag{3}$$

$i=1,2$。假设 $\dfrac{(d_i+c_iE)\alpha_i}{\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE}<\dfrac{K(r-cE)}{r}$，则由(3)式可得 $\dfrac{(d_i+c_iE)\alpha_i}{\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE}<p_i^*<\dfrac{K(r-cE)}{r}$，其中 p_i^* 满足以下方程：

$$\begin{aligned}h_i(p)=&-\frac{g_ir}{\mu_iK}p^3+\frac{g_i\left(K(r-cE)-2r\alpha_i\right)}{\mu_iK}p^2\\&+\left(\frac{g_i\alpha_i\left(K^2(r-cE)-r\alpha_i\right)}{\mu_iK}+\rho_i+d_i+c_iE-\beta_i\right)p\\&+\frac{g_i(r-cE)\alpha_i^2}{\mu_i}+(d_i+c_iE)\alpha_i.\end{aligned}$$

因为 $h_i\left(\dfrac{K(r-cE)}{r}\right)<0$，$h_i\left(\dfrac{(d_i+c_iE)\alpha_i}{\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE}\right)>0$ 且 $h_i(0)>0$，所以当 $p\in\left(\dfrac{(d_i+c_iE)\alpha_i}{\beta_i-\rho_i-d_i-c_iE},\dfrac{K(r-cE)}{r}\right)$ 时，方程 $h_i(p)=0$ 至少有一个或至多有三个第一种浮游动物灭绝平衡

点或第二种浮游动物灭绝平衡点。由方程(4)，我们定义 $z_i = l_1(p)$， $z_i = l_2(p)$， $l_1'(p_i^*) < l_2'(p_i^*)$ 则若，系统(2)有唯一的平衡点 E_i。

若共存平衡点 $E^*(\overline{p}^*, \overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*)$ 存在，则 $\overline{p}^*, \overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*$ 满足如下方程：

$$\begin{aligned} r\left(1-\frac{p}{K}\right) &= \frac{\mu_1 z_1}{\alpha_1 + p} + \frac{\mu_2 z_2}{\alpha_2 + p} + cE, \\ z_1 &= \frac{(\beta_1 - \rho_1 - d_1 - c_1 E)p - (d_1 + c_1 E)\alpha_1}{g_1(\alpha_1 + p)}, \\ z_2 &= \frac{(\beta_2 - \rho_2 - d_2 - c_2 E)p - (d_2 + c_2 E)\alpha_2}{g_2(\alpha_2 + p)}. \end{aligned} \tag{4}$$

由方程(4)的第一个等式可知 $\overline{p}^* < K$，由第二及第三个等式可知，当

$$p_0 = \max\left\{\frac{(d_1 + c_1 E)\alpha_1}{\beta_1 - \rho_1 - d_1 - c_1 E}, \frac{(d_2 + c_2 E)\alpha_2}{\beta_2 - \rho_2 - d_2 - c_2 E}\right\} < \overline{p}^* < K$$

时，平衡点 $\overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*$ 都为正，将 z_1, z_2 的表达式代入方程组(5)的第一个方程得

$$\begin{aligned} h_3(p) = &\left(r\left(1-\frac{p}{K}\right) - cE\right)(\alpha_1 + p)^2 (\alpha_2 + p)^2, \\ &-\frac{\mu_1}{g_1}\left((\beta_1 - \rho_1 - d_1 - c_1 E)p - \alpha_1(d_1 + c_1 E)\right)(\alpha_2 + p)^2 \\ &-\frac{\mu_2}{g_2}\left((\beta_2 - \rho_2 - d_2 - c_2 E)p - \alpha_2(d_2 + c_2 E)\right)(\alpha_1 + p)^2 \\ = &\,0. \end{aligned}$$

容易计算出 $h_3(K) < 0$，$h_3(p_1^*) < 0$，$h_3(p_2^*) < 0$，且 $h_3(0) > 0$。因此，当 $\overline{p}^* \in (p_0, p_1)$ 时，方程 $h_3(p) = 0$ 至少有一个根 $\overline{p}^*$，其中 $p_1 = \min\{p_1^*, p_2^*\}$。因此，当 $p \in (p_0, p_1)$ 时，若函数 $h_3(p)$ 的导数总是小于零，则系统(2)存在唯一的共存平衡点 E^*。由以上对各个平衡点的讨论，我们给出下面的定理。

定理 2.2 若 $\dfrac{(d_i + c_i E)\alpha_i}{\beta_i - \rho_i - d_i - c_i E} < \dfrac{K(r - cE)}{r}$，则系统(2)存在唯一的第二种浮游动物灭绝平衡点和第一种浮游动物灭绝平衡点 E_i，其中 $p_i^* \in \left(\dfrac{(d_i + c_i E)\alpha_i}{\beta_i - \rho_i - d_i - c_i E}, \dfrac{K(r - cE)}{r}\right)(i = 1, 2)$；若 $\overline{p}^* \in (p_0, p_1)$，则系统(2)存在唯一的共存平衡点 $E^*(\overline{p}^*, \overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*)$，其中 $p_0 = \max\left\{\dfrac{(d_1 + c_1 E)\alpha_1}{\beta_1 - \rho_1 - d_1 - c_1 E}, \dfrac{(d_2 + c_2 E)\alpha_2}{\beta_2 - \rho_2 - d_2 - c_2 E}\right\}$，$p_1 = \min\{p_1^*, p_2^*\}$。

3. 平衡点的稳定性分析

这一部分，我们将分析系统(2)的不同平衡点的稳定性。

定理 3.1 以下叙述成立：

若 $E > \dfrac{r}{c}$，则灭绝平衡点 $E_0(0,0,0)$ 局部渐近稳定，若 $E < \dfrac{r}{c}$，则 $E_0(0,0,0)$ 不稳定；

1) 若 $p_0^* < \min\left\{\dfrac{(d_1 + c_1 E)\alpha_1}{\beta_1 - \rho_1 - d_1 - c_1 E}, \dfrac{(d_2 + c_2 E)\alpha_2}{\beta_2 - \rho_2 - d_2 - c_2 E}\right\}$，则浮游动物灭绝平衡点 $E^0(p^*, 0, 0)$ 局部渐近稳定；

2) 若 $p_1^* < \dfrac{(d_2+c_2E)\alpha_2}{\beta_2-\rho_2-d_2-c_2E}$，$z_1^* < \dfrac{r(\alpha_1+p_1^*)^2}{K\mu_1}$，则第二种浮游动物灭绝平衡点 $E_1(p_1^*, z_1^*, 0)$ 局部渐近稳定；

3) 若 $p_2^* < \dfrac{(d_1+c_1E)\alpha_1}{\beta_1-\rho_1-d_1-c_1E}$，$z_2^* < \dfrac{r(\alpha_2+p_2^*)^2}{K\mu_2}$，则第一种浮游动物灭绝平衡点 $E_2(p_2^*, 0, z_2^*)$ 局部渐近稳定；

4) 假设共存平衡点 $E^*(\overline{p}^*, \overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*)$ 存在，若 $\dfrac{r}{K} > \dfrac{\mu_1\overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^2} + \dfrac{\mu_2\overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^2}$，则共存平衡点 $E^*(\overline{p}^*, \overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*)$ 局部渐近稳定。

证明　在平衡点 $E_0(0,0,0)$ 处的特征方程为

$$(\lambda-(r-cE))(\lambda+d_1+c_1E)(\lambda+d_2+c_2E)=0 \tag{5}$$

特征方程(5)的根为 $\lambda_1 = r-cE$，$\lambda_2 = -d_1-c_1E<0$，$\lambda_3=-d_2-c_2E<0$。若 $E>\dfrac{r}{c}$，则 $\lambda_1 = r-cE<0$，根据 Routh-Hurwitz 定理，灭绝平衡点 $E_0(0,0,0)$ 是局部渐近稳定的，若 $E<\dfrac{r}{c}$，则灭绝平衡点 $E_0(0,0,0)$ 是不稳定的。

在平衡点 $E^0(p_0^*,0,0)$ 处的特征方程为

$$(\lambda-(-r+cE))\left(\lambda-\left(\frac{(\beta_1-\rho_1)p_0^*}{\alpha_1+p_0^*}-d_1-c_1E\right)\right)\left(\lambda-\left(\frac{(\beta_2-\rho_2)p_0^*}{\alpha_2+p_0^*}-d_2-c_2E\right)\right)=0 \tag{6}$$

显然，方程有负根 $\lambda_1=-r+cE<0$。若

$$p_0^* < \min\left\{\frac{(d_1+c_1E)\alpha_1}{\beta_1-\rho_1-d_1-c_1E}, \frac{(d_2+c_2E)\alpha_2}{\beta_2-\rho_2-d_2-c_2E}\right\},$$

则

$$\lambda_2 = \frac{(\beta_1-\rho_1-d_1-c_1E)p_0^* - (d_1+c_1E)\alpha_1}{\alpha_1+p_0^*}<0,$$

$$\lambda_3 = \frac{(\beta_2-\rho_2-d_2-c_2E)p_0^* - (d_2+c_2E)\alpha_2}{\alpha_2+p_0^*}<0.$$

因此根据 Routh-Hurwitz 定理，若 $p_0^* < \min\left\{\dfrac{(d_1+c_1E)\alpha_1}{\beta_1-\rho_1-d_1-c_1E}, \dfrac{(d_2+c_2E)\alpha_2}{\beta_2-\rho_2-d_2-c_2E}\right\}$，则浮游动物灭绝平衡点 $E^0(p^*,0,0)$ 局部渐近稳定。

在平衡点 $E_1(p_1^*, z_1^*, 0)$ 处的特征方程为

$$\left(\lambda-\frac{(\beta_2-\rho_2)p_1^*}{\alpha_2+p_1^*}+d_2+c_2E\right)\left[\lambda^2-\left(\frac{\mu_1z_1^*p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^2}-\frac{rp_1^*}{K}-g_1z_1^*\right)\lambda\right.$$
$$\left.+\left(-\left(\frac{\mu_1z_1^*p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^2}-\frac{rp_1^*}{K}\right)g_1z_1^*+\frac{\mu_1(\beta_1-\rho_1)\alpha_1z_1^*p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^3}\right)\right]=0$$

DOI: 10.12677/pm.2023.135147

若 $p_1^* < \frac{(d_2+c_2E)\alpha_2}{\beta_2-\rho_2-d_2-c_2E}$，则特征值 $\lambda_1 = \frac{(\beta_2-\rho_2)p_1^*}{\alpha_2+p_1^*} - d_2 - c_2E < 0$，设 λ_2 和 λ_3 是方程

$$\lambda^2 - \left(\frac{\mu_1 z_1^* p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^2} - \frac{rp_1^*}{K} - g_1 z_1^*\right)\lambda + \left(-\left(\frac{\mu_1 z_1^* p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^2} - \frac{rp_1^*}{K}\right)g_1 z_1^* + \frac{\mu_1(\beta_1-\rho_1)\alpha_1 z_1^* p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^3}\right) = 0$$

的两个根，则若 $z_1^* < \frac{r(\alpha_1+p_1^*)^2}{K\mu_1}$，有

$$\lambda_2+\lambda_3 = \frac{\mu_1 z_1^* p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^2} - \frac{rp_1^*}{K} - g_1 z_1^* < 0,$$

$$\lambda_2\lambda_3 = -\left(\frac{\mu_1 z_1^* p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^2} - \frac{rp_1^*}{K}\right)g_1 z_1^* + \frac{\mu_1(\beta_1-\rho_1)\alpha_1 z_1^* p_1^*}{(\alpha_1+p_1^*)^3} > 0,$$

这表明 $\lambda_2 < 0$，$\lambda_3 < 0$。所以，根据 Routh-Hurwitz 定理，若 $p_1^* < \frac{(d_2+c_2E)\alpha_2}{\beta_2-\rho_2-d_2-c_2E}$，$z_1^* < \frac{r(\alpha_1+p_1^*)^2}{K\mu_1}$，则第二种浮游动物灭绝平衡点 $E_1(p_1^*, z_1^*, 0)$ 局部渐近稳定。

同理，若 $p_2^* < \frac{(d_1+c_1E)\alpha_1}{\beta_1-\rho_1-d_1-c_1E}$，$z_2^* < \frac{r(\alpha_2+p_2^*)^2}{K\mu_2}$，则第一种浮游动物灭绝平衡点 $E_2(p_2^*, 0, z_2^*)$ 局部渐近稳定。

在平衡点 $E^*(\overline{p}^*, \overline{z}_1^*, \overline{z}_2^*)$ 处的特征方程为

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \tag{7}$$

其中

$$A = \frac{r}{K}\overline{p}^* - \frac{\mu_1 \overline{p}^* \overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^2} - \frac{\mu_2 \overline{p}^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^2} + g_1\overline{z}_1^* + g_2\overline{z}_2^*,$$

$$B = \left(\frac{r}{K}\overline{p}^* - \frac{\mu_1 \overline{p}^* \overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^2} - \frac{\mu_2 \overline{p}^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^2} + g_1\overline{z}_1^*\right)g_2\overline{z}_2^* + \frac{\mu_2(\beta_2-\rho_2)\alpha_2 \overline{p}^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^3}$$
$$+\frac{\mu_1(\beta_1-\rho_1)\alpha_1 \overline{p}^* \overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^3} + \left(\frac{r}{K}\overline{p}^* - \frac{\mu_1 \overline{p}^* \overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^2} - \frac{\mu_2 \overline{p}^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^2}\right)g_1\overline{z}_1^*,$$

$$C = \frac{\mu_2(\beta_2-\rho_2)\alpha_2 g_1 \overline{p}^* \overline{z}_1^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^3} + \frac{\mu_1(\beta_1-\rho_1)\alpha_1 g_2 \overline{p}^* \overline{z}_1^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^3}$$
$$+\left(\frac{r}{K}\overline{p}^* - \frac{\mu_1 \overline{p}^* \overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^2} - \frac{\mu_2 \overline{p}^* \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^2}\right)g_1 g_2 \overline{z}_1^* \overline{z}_2^*.$$

若 $\frac{r}{K} > \frac{\mu_1 \overline{z}_1^*}{(\alpha_1+\overline{p}^*)^2} + \frac{\mu_2 \overline{z}_2^*}{(\alpha_2+\overline{p}^*)^2}$，则 $A>0$，$B>0$，$C>0$，进一步可得

$$AB-C=\left(\frac{r}{K}\overline{p}^{*}-\frac{\mu_1\overline{p}^{*}\overline{z}_1^{*}}{\left(\alpha_1+\overline{p}^{*}\right)^2}-\frac{\mu_2\overline{p}^{*}\overline{z}_2^{*}}{\left(\alpha_2+\overline{p}^{*}\right)^2}\right)^2\left(g_1\overline{z}_1^{*}+g_2\overline{z}_2^{*}\right)$$
$$+\left(\frac{r}{K}\overline{p}^{*}-\frac{\mu_1\overline{p}^{*}\overline{z}_1^{*}}{\left(\alpha_1+\overline{p}^{*}\right)^2}-\frac{\mu_2\overline{p}^{*}\overline{z}_2^{*}}{\left(\alpha_2+\overline{p}^{*}\right)^2}\right)\left(\frac{\mu_2\left(\beta_2-\rho_2\right)\alpha_2\overline{p}^{*}\overline{z}_2^{*}}{\left(\alpha_2+\overline{p}^{*}\right)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_1\left(\beta_1-\rho_1\right)\alpha_1\overline{p}^{*}\overline{z}_1^{*}}{\left(\alpha_1+\overline{p}^{*}\right)^3}\right)+\left(g_1\overline{z}_1^{*}+g_2\overline{z}_2^{*}\right)^2+\frac{\mu_2\left(\beta_2-\rho_2\right)\alpha_2 g_2\overline{p}^{*}\overline{z}_2^{*}}{\left(\alpha_2+\overline{p}^{*}\right)^3}$$
$$+\frac{\mu_1\left(\beta_1-\rho_1\right)\alpha_1 g_1\overline{p}^{*}\overline{z}_1^{*}}{\left(\alpha_1+\overline{p}^{*}\right)^3}>0$$

因此，方程(7)的所有根都有负实部，由 Routh-Hurwitz 定理可知共存平衡点 $E^{*}\left(\overline{p}^{*},\overline{z}_1^{*},\overline{z}_2^{*}\right)$ 是局部渐近稳定的。

下面，我们分析各个平衡点的全局稳定性。

定理 3.2 若 $K<\min\left\{\frac{d_1\alpha_1}{\beta_1-\rho_1}\frac{r}{r-cE},\frac{d_2\alpha_2}{\beta_2-\rho_2}\frac{r}{r-cE}\right\}$，则浮游动物灭绝平衡点 $E^{0}\left(p^{*},0,0\right)$ 是全局渐近稳定的。

证明 定义如下正定函数：

$$V_0=\left(p-p_0^{*}-p_0^{*}p\ln\frac{p}{p_0^{*}}\right)+\frac{\mu_1 z_1}{\beta_1-\rho_1}+\frac{\mu_2 z_2}{\beta_2-\rho_2}.$$

沿着系统(2)对 $V_0\left(t\right)$ 求导可得

$$V_0'\big|_{(1)}\left(t\right)=-\frac{r}{K}\left(p-\frac{K\left(r-cE\right)}{r}\right)^2+\mu_1 z_1\left(\frac{K\left(r-cE\right)}{r}\frac{1}{\alpha_1+p}-\frac{d_1}{\beta_1-\rho_1}\right)$$
$$+\mu_2 z_2\left(\frac{K\left(r-cE\right)}{r}\frac{1}{\alpha_2+p}-\frac{d_2}{\beta_2-\rho_2}\right)-\frac{\mu_1}{\beta_1-\rho_1}\left(g_1 z_1^2+c_1 E z_1\right)$$
$$-\frac{\mu_2}{\beta_2-\rho_2}\left(g_2 z_2^2+c_2 E z_2\right)$$
$$\le-\frac{r}{K}\left(p-\frac{K\left(r-cE\right)}{r}\right)^2+\mu_1 z_1\left(\frac{K\left(r-cE\right)}{r}\frac{1}{\alpha_1}-\frac{d_1}{\beta_1-\rho_1}\right)$$
$$+\mu_2 z_2\left(\frac{K\left(r-cE\right)}{r}\frac{1}{\alpha_2}-\frac{d_2}{\beta_2-\rho_2}\right)-\frac{\mu_1}{\beta_1-\rho_1}\left(g_1 z_1^2+c_1 E z_1\right)$$
$$-\frac{\mu_2}{\beta_2-\rho_2}\left(g_2 z_2^2+c_2 E z_2\right).$$

由于 $p\left(t\right),z_1\left(t\right),z_2\left(t\right)$ 都是正的，则若 $K<\min\left\{\frac{d_1\alpha_1}{\beta_1-\rho_1}\frac{r}{r-cE},\frac{d_2\alpha_2}{\beta_2-\rho_2}\frac{r}{r-cE}\right\}$ 成立，$V_0'\big|_{(1)}\le 0$。$V_0'\big|_{(1)}=0$ 当且仅当 $\left(p\left(t\right),z_1\left(t\right),z_2\left(t\right)\right)=\left(p_0^{*},0,0\right)$。因此由 Lyapunov-LaSalle 原理可得平衡点 $E^{0}\left(p^{*},0,0\right)$ 是全局渐近稳定的。

定理 3.3 若 $K-\alpha_1<p_1^{*}<\frac{d_2\alpha_2}{\beta_2-\rho_2}$，则第二种浮游动物灭绝平衡点 $E_1\left(p_1^{*},z_1^{*},0\right)$ 是全局渐近稳定的。

证明　定义如下正定函数：

$$V_1=\left(p-p_1^*-p_1^*\ln\frac{p}{p_1^*}\right)+\frac{\mu_1\left(\alpha_1+p_1^*\right)}{\alpha_1\left(\beta_1-\rho_1\right)}\left(z_1-z_1^*-z_1^*\ln\frac{z_1}{z_1^*}\right)+\frac{\mu_2 z_2}{\beta_2-\rho_2}.$$

沿着系统(2)对$V_1(t)$求导可得

$$\begin{aligned}V_1'\big|_{(1)}(t)=&\left(p-p_1^*\right)\left(r\left(1-\frac{p}{K}\right)-\frac{\mu_1 z_1}{\alpha_1+p}-\frac{\mu_2 z_2}{\alpha_2+p}-cE\right)\\&+\frac{\mu_1\left(\alpha_1+p_1^*\right)}{\alpha_1\left(\beta_1-\rho_1\right)}\left(z_1-z_1^*\right)\left(\frac{\left(\beta_1-\rho_1\right)p}{\alpha_1+p}-d_1-g_1 z_1-c_1E\right)\\&+\frac{\mu_2}{\beta_2-\rho_2}\left(\frac{\left(\beta_2-\rho_2\right)pz_2}{\alpha_2+p}-d_2z_2-g_2z_2^2-c_2Ez_2\right)\\\le&\left(p-p_1^*\right)^2\left(-\frac{r}{K}+\frac{\mu_1 z_1^*}{\left(\alpha_1+p_1^*\right)\alpha_1}\right)-\frac{g_1\mu_1\left(\alpha_1+p_1^*\right)}{\alpha_1\left(\beta_1-\rho_1\right)}\left(z_1-z_1^*\right)^2\\&+\mu_2 z_2\left(\frac{p_1^*}{\alpha_2}-\frac{d_2}{\beta_2-\rho_2}\right)-\frac{\mu_2 z_2}{\beta_2-\rho_2}\left(g_2z_2+c_2E\right).\end{aligned}$$

若 $K-\alpha_1<p_1^*<\dfrac{d_2\alpha_2}{\beta_2-\rho_2}$，则 $V_1'\big|_{(1)}\le 0$。$V_1'\big|_{(1)}=0$ 当且仅当 $\left(p(t),z_1(t),z_2(t)\right)=\left(p_1^*,z_1^*,0\right)$。因此由 Lyapunov-LaSalle 原理可得平衡点 $E_1\left(p_1^*,z_1^*,0\right)$ 是全局渐近稳定的。

与定理 3.3 的证明方法类似，我们可以得到第一种浮游动物灭绝平衡点 $E_2\left(p_2^*,0,z_2^*\right)$ 是全局渐近稳定的。

定理 3.4 若 $K-\alpha_2<p_2^*<\dfrac{d_1\alpha_1}{\beta_1-\rho_1}$，则第一种浮游动物灭绝平衡点 $E_2\left(p_2^*,0,z_2^*\right)$ 是全局渐近稳定的。

定理 3.5 假设共存平衡点 $E^*\left(\overline{p}^*,\overline{z}_1^*,\overline{z}_2^*\right)$ 存在，则若 $-\dfrac{r}{K}+\dfrac{\mu_1\overline{z}_1^*}{\alpha_1\left(\alpha_1+\overline{p}^*\right)}+\dfrac{\mu_2\overline{z}_2^*}{\alpha_2\left(\alpha_2+\overline{p}^*\right)}<0$，则共存平衡点 $E^*\left(\overline{p}^*,\overline{z}_1^*,\overline{z}_2^*\right)$ 是全局渐近稳定的。

证明　定义如下正定函数：

$$\begin{aligned}V_2=&\left(p-\overline{p}^*-\overline{p}^*\ln\frac{p}{\overline{p}^*}\right)+\frac{\mu_1\left(\alpha_1+\overline{p}^*\right)}{\alpha_1\left(\beta_1-\rho_1\right)}\left(z_1-\overline{z}_1^*-\overline{z}_1^*\ln\frac{z_1}{\overline{z}_1^*}\right)\\&+\frac{\mu_2\left(\alpha_2+\overline{p}^*\right)}{\alpha_2\left(\beta_2-\rho_2\right)}\left(z_2-\overline{z}_2^*-\overline{z}_2^*\ln\frac{z_2}{\overline{z}_2^*}\right).\end{aligned}$$

沿着系统(2)对$V_2(t)$求导可得

$$\begin{aligned}V_2'\big|_{(1)}(t)=&\left(p-p_1^*\right)\left(r\left(1-\frac{p}{K}\right)-\frac{\mu_1 z_1}{\alpha_1+p}-\frac{\mu_2 z_2}{\alpha_2+p}-cE\right)\\&+\frac{\mu_1\left(\alpha_1+\overline{p}^*\right)}{\alpha_1\left(\beta_1-\rho_1\right)}\left(z_1-\overline{z}_1^*\right)\left(\frac{\left(\beta_1-\rho_1\right)p}{\alpha_1+p}-d_1-g_1z_1-c_1E\right)\\&+\frac{\mu_2\left(\alpha_2+\overline{p}^*\right)}{\alpha_2\left(\beta_2-\rho_2\right)}\left(z_2-\overline{z}_2^*\right)\left(\frac{\left(\beta_2-\rho_2\right)p}{\alpha_2+p}-d_2-g_2z_2-c_2E\right)\end{aligned}$$

$$\leq \left(p-\overline{p}^*\right)^2\left(-\frac{r}{K}+\frac{\mu_1\overline{z}_1^*}{\left(\alpha_1+\overline{p}^*\right)\alpha_1}+\frac{\mu_2\overline{z}_2^*}{\left(\alpha_2+\overline{p}^*\right)\alpha_2}\right)$$
$$-\frac{g_1\mu_1\left(\alpha_1+\overline{p}^*\right)}{\alpha_1\left(\beta_1-\rho_1\right)}\left(z_1-\overline{z}_1^*\right)^2-\frac{g_2\mu_2\left(\alpha_2+\overline{p}^*\right)}{\alpha_2\left(\beta_2-\rho_2\right)}\left(z_2-\overline{z}_2^*\right)^2.$$

若 $-\frac{r}{K}+\frac{\mu_1\overline{z}_1^*}{\alpha_1\left(\alpha_1+\overline{p}^*\right)}+\frac{\mu_2\overline{z}_2^*}{\alpha_2\left(\alpha_2+\overline{p}^*\right)}<0$，则 $V_2'\big|_{(1)}\leq 0$。$V_2'\big|_{(1)}=0$ 当且仅当 $\left(p(t),z_1(t),z_2(t)\right)=\left(\overline{p}^*,\overline{z}_1^*,\overline{z}_2^*\right)$。因此由 Lyapunov-LaSalle 原理可得共存平衡点 $E^*\left(\overline{p}^*,\overline{z}_1^*,\overline{z}_2^*\right)$ 是全局渐近稳定的。

4. 总结

本文研究了具有捕获的一种产毒浮游植物和两种浮游动物相互作用的模型。首先讨论了模型平衡点的存在性，模型可能存在五个平衡点。接下来，文章分别讨论了模型平衡点的局部和全局稳定性(见定理3.1~3.5)。文章所得到的结论可能对研究生物系统的可持续性起到一定的作用，但是影响浮游动植物系统的因素可能并不止这些，这将是我们以后研究的方向。

基金项目

伊犁师范大学资助项目(2021YSYB074)。

参考文献

[1] Mukhopadhyay, B. and Bhattacharyya, R. (2006) Modelling Phytoplankton Allelopathy in a Nutrient-Plankton Model with Spatial Heterogeneity. *Ecological Modelling*, **198**, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2006.04.005

[2] Gao, M., Shi, H.H. and Li, Z.Z. (2009) Chaos in a Seasonally and Periodically Forced Phytoplankton-Zooplankton System. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **10**, 1643-1650. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.02.005

[3] Anderson, D.M., *et al.* (1993) Marine Biotoxins and Harmful Algae: A National Plan. Woods Hole Oceanographic Institution Technical Report WHOI93-102. https://doi.org/10.1575/1912/614

[4] Janga, S., Baglama, J. and Rick, J. (2006) Nutrient-Phytoplankton-Zooplankton Models with a Toxin. *Mathematical and Computer Modelling*, **43**, 105-118. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.030

[5] Saha, T. and Bandopahaya, M. (2009) Dynamical Analysis of Toxin Producingphytoplankton-Zooplankton Interaction. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **10**, 314-332. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.09.001

[6] Clark, C.W. (1985) Bioeconomic Moddelling and Fisheries Management. John Wiley and Sons, New York, NY.

[7] Clark, C.W. (1990) Mathematical Bio-Economics: The Optimal Management of Renewable Resources. John Wiley and Sons, New York, NY.

[8] Lv, Y.F., Pei, Y.Z., Gao, S.J. and Li, C.G. (2010) Harvesting of a Phytoplankton-Zooplankton Model. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **11**, 3608-3619. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.01.007

[9] Chakraborty, K., Chakraborty, M. and Kar, T.K. (2011) Regulation of a Prey-Predator Fifishery Incorporating Prey Refuge by Taxation: A Dynamic Reaction Model. *Journal of Biological Systems*, **19**, 417-444. https://doi.org/10.1142/S0218339011003993

[10] Barton, A.D., Dutkiewicz, S., *et al.* (2010) Patterns of Diversity in Marine Phytoplankton. *Science*, **327**, 1509-1511. https://doi.org/10.1126/science.1184961

[11] Jana, S., Chakraborty, M. and Chakraborty, K. (2012) Global Stability and Bifurcation of Time Delayed Prey-Predator System Incorporating Prey Refuge. *Mathematics and Computers in Simulation*, **85**, 57-77. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.10.003