Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1508-1515
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135153

态射和短正合列的预包络关于直和的封闭性

刘诗瑶*，**杨晓燕**

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月23日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

本文利用左 R-模的预包络关于直和的封闭性, 研究了态射和短正合序列的预包络关于直和的封闭性。

关键词

预包络，直和，封闭性

Preenvelope of Morphisms and Short Exact Sequences on the Closure of Direct Sum

Shiyao Liu*, **Xiaoyan Yang**

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 23^{rd}, 2023; accepted: May 24^{th}, 2023; published: May 31^{st}, 2023

Abstract

In this paper, we study that the preenvelopes of morphisms and short exact sequences

∗ 第一作者。

文章引用: 刘诗瑶, 杨晓燕. 态射和短正合列的预包络关于直和的封闭性[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1508-1515.
DOI: 10.12677/pm.2023.135153

are closed under direct sums using the fact that the preenvelope of left R-module is closed under direct sums.

Keywords

Preenvelope, Direct Sum, Closure

1. 引言

在本文中, 如果没有特别指出, 所有的模都是左 R-模, 并用 R-Mod 表示左 R-模范畴. 模的逼近理论即模的预包络和预覆盖的存在性是相对同调代数中最基本的概念之一. 在 20 世纪 80 年代初期, Enochs 在 [1] 中和 Auslander 等人在 [2] 中提出了用同调代数的方法研究模的 (预) 包络和 (预) 覆盖. 作为逼近理论的推广, 2013 年, 扶先辉和 Guil Asensio 等人在 [3] 中给出了理想逼近理论的定义并证明了模范畴关于预包络与预覆盖的一些经典引理在理想逼近中也是成立的.

在理想逼近理论中, 探讨一些特殊理想的(预)包络和(预)覆盖的存在性具有重要的意义. 设 $\mathcal{I}$ 是左 R-模范畴的一个左或右理想, 2018 年, Mao 在 [4] 中研究了 R-模的 $\mathcal{I}$- 预包络和 $\mathcal{I}$-预覆盖关于直积和直和以及扩张的封闭性, 并建立了 R-模的预包络预覆盖和态射的预包络预覆盖之间的关系. 2020 年, Mao 在 [5] 中介绍了短正合序列的预包络和预覆盖, 并得到了 R- 模的预覆盖和短正合列的预覆盖之间的联系.

受此启发, 本文我们从左 R-模的预包络关于直和封闭性出发, 讨论了态射和短正合序列的预包络关于直和的封闭性. 对偶地, 也可以利用 R-模的预覆盖关于直积的封闭性, 讨论态射和短正合列的预覆盖关于直积的封闭性. 因为证明是完全对偶的, 所以在本文中不作陈述.

2. 预备知识

下面给出本文用到的一些基本概念.

定义 1 [6] 称 R-Mor 是态射范畴, 其中,

(1) R-Mor 中的对象是 R-Mod 中的左 R-模同态,

(2) R-Mor 中的从 $(f: M_1 \to M_2)$ 到 $(g: N_1 \to N_2)$ 的态射为 R-Mod 中态射的对子 (d, s)

$$(M_1 \xrightarrow{d} N_1, M_2 \xrightarrow{s} N_2)$$

满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"'] & N_1 \arrow[d, "g"] \\ M_2 \arrow[r, "s"] & N_2 \end{tikzcd}$$

则态射范畴 R-Mor 是局部有限表示 Grothendieck 范畴.

定义 2 [5] 称 ${}_R\varepsilon$ 是短正合序列范畴, 其中,

(2) ${}_R\varepsilon$ 中的对象是所有的左 R-模短正合序列,

(3) ${}_R\varepsilon$ 中的从短正合序列 $(0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0)$ 到短正合列 $(0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0)$ 的态射为左 R-模的一个态射三元组 (f_1, f_2, f_3)

$$(A_1 \xrightarrow{f_1} B_1, A_2 \xrightarrow{f_2} B_2, A_3 \xrightarrow{f_3} B_3)$$

满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

设 $\mathcal{C}$ 是一个左 R-模类. 记

$${}_c\mathcal{C} \ = \ \{ 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \in \ {}_R\varepsilon \ : \ X \ \in \mathcal{C} \}$$

定义 3 [6] 设 $\mathcal{A}$ 是任意范畴, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象类.

(1) 称 $\mathcal{A}$ 中的态射 ϕ: $M \to N$ 是 M 的 $\mathcal{C}$-预包络, 如果 $N \in \mathcal{C}$ 并且对任意的态射 f: $M \to N'$, 其中 $N' \in \mathcal{C}$, 存在态射 g: $N \to N'$ 使得 $g\phi = f$. 称 $\mathcal{C}$-预包络 ϕ: $M \to N$ 是 M 的 $\mathcal{C}$-包络, 如果满足 $\eta\phi = \phi$ 的自同态 η 是自同构.

(2) 称 $\mathcal{A}$ 中的态射 ψ: $M \to N$ 是 N 的 $\mathcal{C}$-预覆盖, 如果 $M \in \mathcal{C}$ 并且对任意的态射 f: $M' \to N$, 其中 $M' \in \mathcal{C}$, 存在态射 h: $M' \to M$ 使得 $\psi h = f$. 称 $\mathcal{C}$-预覆盖 ψ: $M \to N$ 是 N 的 $\mathcal{C}$-覆盖, 如果满足 $\psi\beta = \psi$ 的自同态 β 是自同构.

定义 4 [4] 称 $\mathcal{I}$ 是 R-Mod 的理想, 如果对任意的左 R-模 M 和 N, M 到 N 的在 $\mathcal{I}$ 中的所有态射是 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 的子群, 并且满足对任意的左 R-模同态 f, g 和 h, 若 fgh 有意义且 $g \in \mathcal{I}$, 则 $fgh \in \mathcal{I}$.

定义 5 [7] 设 $\mathcal{C}$ 是一个左 R-Mod 类, $\mathcal{I}_c = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid M$ 是任意左 R模, $N \in \mathcal{C}\}$, ${}_c\mathcal{I} = \{g \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid N$ 是任意左 R模, $M \in \mathcal{C}\}$. 则 $\mathcal{I}_c$ 是由$\{1_N :\ N \in \mathcal{C}\}$生成的 R-模的右理想, ${}_c\mathcal{I}$是由$\{1_M :\ M \in \mathcal{C}\}$生成的 R-模的左理想.

定义 6 [3] 称 ${}_c\mathcal{I}$ 中的态射 $\phi\colon M \to N$ 是 M 的 ${}_c\mathcal{I}$-预包络, 如果对 ${}_c\mathcal{I}$ 中任意的态射 $\varphi\colon M \to D$, 存在态射 $\eta\colon N \to D$, 使得 $\eta\phi = \varphi$. 称 ${}_c\mathcal{I}$-预包络 $\phi\colon M \to N$ 是 ${}_c\mathcal{I}$-包络, 如果满足 $h\phi = \phi$ 的自同态 h 是自同构.

定义 7 [3] 称 $\mathcal{I}_c$ 中的态射 $\phi\colon M \to N$ 是 N 的 $\mathcal{I}_c$-预覆盖, 如果对 $\mathcal{I}_c$ 中任意的态射 $\psi\colon C \to N$, 存在态射 $\theta\colon C \to M$, 使得 $\phi\theta = \psi$. 称 $\mathcal{I}_c$-预覆盖 $\phi\colon M \to N$ 是 $\mathcal{I}_c$-覆盖, 如果满足 $\phi\gamma = \phi$ 的自同态 γ 是自同构.

3. 主要结果

我们首先给出如下一个有用的引理.

引理 1 [4] (1) 设 $\mathcal{I}$ 是 R-Mod 中关于直和封闭的一个右理想. 则 $\mathcal{I}$ 中的态射 $(\varphi_i\colon M_i \to N_i)_{i\in J}$ 是 M_i 的一个 $\mathcal{I}$-预包络当且仅当 $\oplus_{i\in J}\varphi_i\colon \oplus_{i\in I}M_i \to \oplus_{i\in J}N_i$ 是 $\oplus_{i\in J}$
M_i 的一个 $\mathcal{I}$- 预包络.

(2) 设 $\mathcal{I}$ 是 R-Mod 中关于直积封闭的一个左理想. 则 $\mathcal{I}$ 中的态射 $(\varphi_i\colon M_i \to N_i)_{i\in J}$ 是 N_i 的一个 $\mathcal{I}$-预覆盖当且仅当 $\Pi_{i\in J}\varphi_i\colon \Pi_{i\in I}M_i \to \Pi_{i\in J}N_i$ 是 $\Pi_{i\in J}N_i$ 的一个 $\mathcal{I}$-预覆盖.

以下定理是本文的主要结论.

定理 1 设 $\mathcal{C}$ 是一个左 R-模类, 下图是 (f,d) 的推出:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] & B_1 \arrow[d, "s"] \\ A_2 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd}$$

则 $d\colon A_1 \to A_2$ 是 A_1 的一个 $\mathcal{C}$-预包络当且仅当

$$(A_1 \xrightarrow{f} B_1) \xrightarrow{(d,s)} (A_2 \xrightarrow{g} B_2)$$

是态射 $f\colon A_1 \to B_1$ 的一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络.

证明: 充分性: 任取 R-Mod 中的态射对 $(A_1 \xrightarrow{f} B_1) \xrightarrow{(\omega,\gamma)} (X \xrightarrow{\alpha} Y)$, 其中 $X \in \mathcal{C}$. 因为 $d\colon A_1 \to A_2$ 是 A_1 的一个 $\mathcal{C}$-预包络, $A_2 \in \mathcal{C}$, 所以存在态射 $\xi\colon A_2 \to X$, 使得 $\xi d = \omega$, 从而有 $\gamma f = \alpha\omega = \alpha\xi d$, 所以由推出的性质知, 存在态射 $\beta\colon B_2 \to Y$, 使得 $\beta g = \alpha\xi$, $\beta s = \gamma$. 因此

$(\xi,\beta)(d,s)=(\omega,\gamma)$, 即有下列交换图:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] \arrow[ddr, bend left, "\omega"] & B_1 \arrow[d, "s"'] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
A_2 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\xi"] & B_2 \arrow[dr, dotted, "\beta"] & \\
 & X \arrow[r, "\alpha"] & Y
\end{tikzcd}
$$

故 $(A_1 \xrightarrow{f} B_1) \xrightarrow{(d,s)} (A_2 \xrightarrow{g} B_2)$ 是一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络.

必要性: 由题意可得, $A_2\in\mathcal{C}$, 现取 $X\in\mathcal{C}$, ω: $A_1\to X$ 是任意左 R-模态射, 则

$$(A_1 \xrightarrow{f} B_1) \xrightarrow{(\alpha,0)} (X \xrightarrow{0} 0)$$

为 R-Mod 中的态射对, 且 $X \xrightarrow{0} 0 \in {}_c\mathcal{I}$. 因为 $(A_1 \xrightarrow{f_i} B_1) \xrightarrow{(d,s)} (A_2 \xrightarrow{g} B_2)$ 是一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络, 所以存在态射对 $(A_2 \xrightarrow{g} B_2) \xrightarrow{(\xi,0)} (X \xrightarrow{0} 0)$, 使得下列图交换:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"'] \arrow[ddr, bend left, "\omega"] & B_1 \arrow[d, "s"'] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
A_2 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\xi"] & B_2 \arrow[dr, dotted, "0"] & \\
 & X \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}
$$

即 $(\xi,0)(d,s)=(\omega,0)$, 因此 $\xi d=\omega$, 所以 d: $A_1\to A_2$ 是 A_1 的一个 $\mathcal{C}$-预包络.

推论 1 令 $\mathcal{C}$ 是关于直和封闭的一个左 R-Mod 类, 且对任意 $i\in\mathcal{I}$, 下图是 (f_i,d_i) 的推出:

$$
\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_i"'] & B_i \arrow[d, "s_i"'] \\
A_i' \arrow[r, "g_i"] & B_i'
\end{tikzcd}
$$

如果 $\oplus_{i\in J}B_i'$ 是 $\oplus_{i\in J}f_i$ 与 $\oplus_{i\in J}d_i$ 的推出, 那么 $(A_i \xrightarrow{f_i} B_i) \xrightarrow{(d_i,s_i)} (A_i' \xrightarrow{g_i} B_i')$ 是态射 f_i: $A_i\to B_i$ 的一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络当且仅当

$$(\oplus_{i\in J}A_i \to \oplus_{i\in J}B_i) \xrightarrow{(\oplus_{i\in J}d_i,\oplus_{i\in J}s_i)} (\oplus_{i\in J}A_i' \to \oplus_{i\in J}B_i')$$

是态射 $\oplus_{i\in J}f_i$: $\oplus_{i\in I}A_i\to\oplus_{i\in J}B_i$ 的一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络.

证明: 充分性: $(A_i \xrightarrow{f_i} B_i) \xrightarrow{(d_i,s_i)} (A_i^{'} \xrightarrow{g_i} B_i^{'})$ 是态射 f_i: $A_i \to B_i$ 的一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络, 由定理 1 的必要性可知, d_i: $A_i \to A_i^{'}$ 是 A_i 的一个 $\mathcal{C}$-预包络. 则由引理 1 及 $\mathcal{C}$ 关于直和封闭可知, $\oplus_{i\in J}d_i$: $\oplus_{i\in J}A_i \to \oplus_{i\in J}A_i^{'}$ 是 $\oplus_{i\in J}A_i$ 的一个 $\mathcal{C}$-预包络. 因为 $\oplus_{i\in J}B_i^{'}$ 是 $(\oplus_{i\in J}f_i, \oplus_{i\in J}d_i)$ 的推出. 所以

$$(\oplus_{i\in J}A_i \to \oplus_{i\in J}B_i) \xrightarrow{(\oplus_{i\in J}d_i, \oplus_{i\in J}s_i)} (\oplus_{i\in J}A_i^{'} \to \oplus_{i\in J}B_i^{'})$$

是态射 $\oplus_{i\in J}f_i$: $\oplus_{i\in I}A_i \to \oplus_{i\in J}B_i$ 的一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络.

必要性: $(\oplus_{i\in J}A_i \to \oplus_{i\in J}B_i) \xrightarrow{(\oplus_{i\in J}d_i, \oplus_{i\in J}s_i)} (\oplus_{i\in J}A_i^{'} \to \oplus_{i\in J}B_i^{'})$ 是态射 $\oplus_{i\in J}f_i$: $\oplus_{i\in I}A_i \to \oplus_{i\in J}B_i$ 的一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络. 由定理 1 的必要性可知, $\oplus_{i\in J}d_i$: $\oplus_{i\in J}A_i \to \oplus_{i\in J}A_i^{'}$ 是 $\oplus_{i\in J}A_i$ 的一个 $\mathcal{C}$-预包络. 则由引理 1 可知, d_i: $A_i \to A_i^{'}$ 是 A_i 的一个 $\mathcal{C}$-预包络, 因为 $B_i^{'}$ 为 (f_i, d_i) 的推出, 所以 $(A_i \xrightarrow{f_i} B_i) \xrightarrow{(d_i,s_i)} (A_i^{'} \xrightarrow{g_i} B_i^{'})$ 是一个 ${}_c\mathcal{I}$-预包络.

命题 1 设 $\mathcal{C}$ 是一个左 R-模类, 下图是 (f,α) 的推出:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[d, "\beta"] \\ A_2 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd}$$

则 α: $A_1 \to A_2$ 是 A_1 的一个 $\mathcal{C}$-预包络当且仅当

$$(0 \to A_1 \to B_1 \to C \to 0) \xrightarrow{(\alpha,\beta,1)} (0 \to A_2 \to B_2 \to C \to 0)$$

是正合列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} B_1 \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 在 ${}_R\varepsilon$ 中的一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络.

证明: 充分性由 ([5], 定理 2.1) 可得.

必要性: 取 $X \in \mathcal{C}$, δ: $A_1 \to X$ 是任意左 R-模态射,

$$(0 \to A_1 \to B_1 \to C \to 0) \xrightarrow{(\delta,0,0)} (0 \to X \to 0 \to 0 \to 0)$$

为 ${}_R\varepsilon$ 中的态射三元组, 因为

$$(0 \to A_1 \to B_1 \to C \to 0) \xrightarrow{(\alpha,\beta,1)} (0 \to A_2 \to B_2 \to C \to 0)$$

是正合列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f} B_1 \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 的一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络, 所以存在 ${}_R\varepsilon$ 中的态射三元组

$$(0 \to A_2 \to B_2 \to C \to 0) \xrightarrow{(h,0,0)} (0 \to X \to 0 \to 0 \to 0)$$

使得 $(h,0,0)(\alpha,\beta,1) = (\delta,0,0)$, 因此 $h\alpha = \delta$, 所以 d: $A_1 \to A_2$ 是 A_1 的一个 $\mathcal{C}$-预包络.

推论 2 令 $\mathcal{C}$ 是关于直和封闭的一个左 R-Mod 类, 且对任意 $i\in\mathcal{I}$, 下图是 (f_i,α_i) 的推出:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & B_i \arrow[d, "\beta_i"] \\ A_i' \arrow[r, "g_i"] & B_i' \end{tikzcd}$$

如果 $\oplus_{i\in J}B_i'$ 是 $\oplus_{i\in J}f_i$ 与 $\oplus_{i\in J}d_i$ 的推出, 那么

$$(0\to A_i\to B_i\to C_i\to 0)\xrightarrow{(\alpha_i,\beta_i,1)}(0\to A_i'\to B_i'\to C_i\to 0)$$

是正合列 $0\longrightarrow A_i\xrightarrow{f_i}B_i\xrightarrow{g_i}C_i\longrightarrow 0$ 在 ${}_R\varepsilon$ 中的一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络当且仅当

$$(0\to\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}B_i\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0)\xrightarrow{(\oplus_{i\in J}\alpha_i,\oplus_{i\in J}\beta_i,1)}(0\to\oplus_{i\in J}A_i'\to\oplus_{i\in J}B_i'\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0)$$

是正合列 $0\to\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}B_i\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0$ 在 ${}_R\varepsilon$ 中的一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络.

证明: 充分性: $(0\to A_i\to B_i\to C_i\to 0)\xrightarrow{(\alpha_i,\beta_i,1)}(0\to A_i'\to B_i'\to C_i\to 0)$ 是正合列 $0\longrightarrow A_i\xrightarrow{f_i}B_i\xrightarrow{g_i}C_i\longrightarrow 0$ 的一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络, 由命题 1 的必要性可知, α_i: $A_i\to A_i'$ 是 A_i 的一个 $\mathcal{C}$-预包络, 由引理 1 及 $\mathcal{C}$ 关于直和封闭可知, $\oplus_{i\in J}\alpha_i$: $\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}A_i'$ 是 $\oplus_{i\in J}A_i$ 的一个 $\mathcal{C}$-预包络. 因为 $\oplus_{i\in J}B_i'$ 是 $(\oplus_{i\in J}f_i,\oplus_{i\in J}\alpha_i)$ 的推出, 所以

$$(0\to\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}B_i\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0)\xrightarrow{(\oplus_{i\in J}\alpha_i,\oplus_{i\in J}\beta_i,1)}(0\to\oplus_{i\in J}A_i'\to B\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0)$$

是一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络.

必要性: 因为

$$(0\to\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}B_i\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0)\xrightarrow{(\oplus_{i\in J}\alpha_i,\oplus_{i\in J}\beta_i,1)}(0\to\oplus_{i\in J}A_i'\to\oplus_{i\in J}B_i'\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0)$$

是正合列 $0\to\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}B_i\to\oplus_{i\in J}C_i\to 0$ 的一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络, 所以由命题 1 的必要性可知, $\oplus_{i\in J}\alpha_i$: $\oplus_{i\in J}A_i\to\oplus_{i\in J}A_i'$ 是 $\oplus_{i\in J}A_i$ 的一个 $\mathcal{C}$-预包络. 则由引理 1 可知, α_i: $A_i\to A_i'$ 是 A_i 的一个 $\mathcal{C}$-预包络, 因为 B_i' 为 (f_i,α_i) 的推出, 所以

$$(0\to A_i\to B_i\to C_i\to 0)\xrightarrow{(\alpha_i,\beta_i,1)}(0\to A_i'\to B_i'\to C_i\to 0)$$

是一个 ${}_c\mathcal{C}$-预包络.

参考文献

[1] Enochs, E.E. (1981) Injective and Flat Covers, Envelopes and Resolents. *Israel Journal of Mathematics*, **39**, 189-209. https://doi.org/10.1007/BF02760849

[2] Auslander, M. and Smalø, S. (1980) Preprojective Modules over Artin Algebras. *Journal of Algebra*, **66**, 61-122. https://doi.org/10.1016/0021-8693(80)90113-1

[3] Fu, X.H., Guil Asensio, P.A., Herzog, I. and Torrecillas, B. (2013) Ideal Approximation Theory. *Advances in Mathematics*, **244**, 750-790. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.05.020

[4] Mao, L.X. (2018) On Preenvelopes and Precovers by Ideals of Morphisms of Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **222**, 4004-4019. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2018.02.017

[5] Mao, L.X. (2020) On Envelopes and Covers in the Category of Short Exact Sequences. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 3457-3480. https://doi.org/10.1007/s40840-019-00878-7

[6] Mao, L.X. (2016) Precovers and Preenvelopes by Phantom and Ext-Phantom Morphisms. *Communications in Algebra*, **44**, 1704-1721. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1027388

[7] Mao, L.X. (2018) Higher Phantom and Ext-Phantom Morphisms. *Journal of Algebra and Its Applications*, **17**, Article 1850012. https://doi.org/10.1142/S0219498818500123