

关于 n 元对称群上的有禁排列计数研究

赵彤远¹, 赵 飒², 李晓清¹, 郭 童¹

¹中国石油大学理学院, 北京

²河北师范大学数学科学学院, 河北省数学与交叉科学国际联合研究中心, 河北省计算数学与应用重点实验室, 河北省数学研究中心, 河北 石家庄

收稿日期: 2023年4月23日; 录用日期: 2023年5月24日; 发布日期: 2023年5月31日

摘 要

有禁排列计数问题是计数组合学中的热点问题, 在物理、化学、计算机等学科中有着广泛应用。本文在Kitaev的综述书籍基础上, 对 n 元对称群 S_n 上有禁排列计数的经典结果进行了总结, 并介绍相关研究成果。

关键词

排列, 模式避免, 组合双射

Research on Enumeration of Pattern-Avoiding Permutations on N-Element Symmetric Group

Tongyuan Zhao¹, Feng Zhao², Xiaoqing Li¹, Tong Guo¹

¹College of Sciences, China University of Petroleum, Beijing

²School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Hebei International Joint Research Center of Mathematics and Interscience, Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Hebei Mathematical Research Center, Shijiazhuang Hebei

Received: Apr. 23rd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

The enumeration of pattern-avoiding permutations is a hot topic in enumeration combinatorics and has wide applications in physics, chemistry and computer science. Based on Kitaev's review book, this paper summarizes the classical results of the enumeration of pattern-avoiding permutations n -element symmetric group S_n , and introduces the related research results.

Keywords

Permutation, Pattern Avoidance, Combinatorial Bijection

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

排列集上模式问题的研究有悠久的历史。19 世纪八十年代, MacMahon [1] 在组合对象研究中使用生成函数方法给出了排列和词中逆序数的分布, 即现代观点下的 21 模式问题。在 20 世纪七十年代和八十年代早期, Knuth [2], Rotem [3] 和 Rogers [4] 对排列与词中的模式问题进行了研究, Simion 和 Schimdt [5] 首次对模式问题进行了系统的研究。

现今关于排列中模式的研究是一个活跃的领域, 已经产生了丰富的工具来研究关于模式的各类问题, 相关结果综述参见 Kitaev 的著作 [6]。排列中模式的概念已成为众多领域中的重要工具语言, 如 Kazhdan-Lusztig 的多项式理论、Schubert 簇的奇异点、Chebyshev 多项式、Ferrer 的 rook 多项式以及多种分类算法。此外, 排列中模式的研究也经常被运用于计算生物学与理论物理学中。

记 n 元对称群 S_n 为从 1 到 n 的连续正整数排列全体所组成的集合, 如 $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{12, 21\}$, $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ 。我们称排列 w 中去掉若干字母得到的排列为 w 的子列, 由连续字母组成的子列称为 w 的因子。如排列 123245321 的子列有 324532、232321 等, 前者也是排列 123245321 的因子。

对排列 w 的子列 $\sigma = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r}$ 中的字母进行排序, 最小的用 1 代替, 然后去掉这个字母继续排序, 最小的用 2 代替, 这样一直进行下去可得到子列的简化形式 $red(\sigma)$, 如 $red(453) = 231$ 。对给定的 $k (k \leq n)$ 元排列 τ , 排列 $w \in S_n$ 且 w 所有子列的简化形式都不等于 τ , 这样的 w 全体组成的集合记作 S_n 上的有禁排列集 $S_n(\tau)$, $S_n(\tau)$ 中的元素称为是避免模式 τ 的。如

$$S_4(123) = \{1432, 2143, 2413, 2431, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321\}.$$

在对排列的研究过程中产生了大量有趣的组合双射问题。对于给定的正整数 n , 如果集合 $S_n(\sigma)$ 中的元素个数等于集合 $S_n(\tau)$ 中元素个数, 我们称两个模式 σ 和 τ 在 S_n 上是 Wilf-等价的。近年来, 有众多文献研究模式的 Wilf-等价性 [7] [8] [9], 以及如何用组合双射来证明这些等价类, 也有大量文献给出其他组合对象, 如偏序集、格路径、平面图、有序树与避免某种模式的排列有相同的计数结果 [10] [11]。

2. 避免 3 长模式的计数结果

根据递推关系的一致性, 可以证明 $S_n(231)$ 的计数结果是经典的 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 。通过对模式 231 进行翻转和互补(将 i 替换为 $n-i$, $i=1, 2, \dots, n$) 可以证明 $\{132, 231, 213, 312\}$ 在 S_n 上是 Wilf-等价的, 这一方法也能证明 $\{123, 231\}$ 在 S_n 上是 Wilf-等价的。MacMahon [2] 得出 S_n 上避免这六种模式的计数结果都是 Catalan 数 C_n , 但 $\{132, 231, 213, 312\}$ 和 $\{123, 231\}$ 这两类模式之间的 Wilf-等价性不容易进行双射证明。

在构造这两类排列之间双射的过程中, Dyck 路成为重要的辅助工具。 $S_n(132)$ 和 n 长 Dyck 路之间有一个标准的双射, 由此 Knuth [3] 和 Rotem [4] 及 Krattenthaler [12] 分别利用 Dyck 路作为中间桥梁, 建立

了 $S_n(321)$ 到 $S_n(132)$ 和 $S_n(123)$ 到 $S_n(321)$ 之间的双射。除了利用 Dyck 路, Mansour, Deng 和 Du [13] 使用正则约化分解, 构造了 $S_n(321)$ 到 $S_n(231)$ 之间的双射。受计算机思想启发的算法也是学者们构造双射的重要工具。Simion 和 Schmidt [5] 使用算法构造了 $S_n(123)$ 到 $S_n(132)$ 的双射, 称为 Simion-Schmidt 双射。Richards [14] 使用算法构造了 Dyck 路到 $S_n(123)$ 的双射, 与标准双射复合即得到 $S_n(321)$ 到 $S_n(132)$ 的双射, 称为 Knuth-Richards 双射。还有学者通过与其他组合结构构造双射, 如 West [15] 利用生成树建立了 $S_n(123)$ 到 $S_n(132)$ 之间的双射, Reifegerste [16] 利用矩阵变换建立了 $S_n(321)$ 到 $S_n(132)$ 之间的双射, Claesson 和 Kitaev [17] 详细列出了这些双射之间的联系以及相关组合统计量的分布规律。

对于 S_n 中避免两个及以上的 3 长模式, Simion 和 Schmidt [5] 给出了 $S_n(123,132)$ 、 $S_n(123,132,213)$ 等有禁排列集的计数结论。

3. 避免 4 长模式的计数结果

在 S_n 上 4 长模式的 Wilf-等价性研究也有丰富的成果。避免单个 4 长模式的排列上有 3 个 Wilf-等价类, Bóna [18] 得到了 $S_n(1342)$ 的生成函数, Regev [19] 得到了 $S_n(1234)$ 的生成函数, 对于剩下的 Wilf 类中 $S_n(1324)$ 的计数问题仍然是该领域的一个重要的开放问题。Backelin, West 和 Xin [20] 证明了 $\{1243, 2143\}$ 两个模式的等价性, 经过翻转和互补可得 $\{1234, 1243\}$ 等价。Stankova 在两个文献中 [21] [22] 分别证明了 $\{1342, 2413\}$ 和 $\{1234, 3214\}$ 等价, 完成了单个 4 长模式的等价类分类工作。Gessel [23] 和 Bóna [18] 给出了这些等价类的计数结果。

同时避免一个 3 长和一个 4 长模式的排列中, Erdős 和 Szekeres [24] 给出了 $S_n(123, 4321)$ 的计数结果。Billey, Jockusch 和 Stanley [25] 得到 $S_n(123, 3412)$ 的计数结果。West [26] 使用生成树方法解决了所有“3 + 4”计数问题, 其中大部分计数结果和斐波那契数列相关。Tenner [27] 证明了带布尔主序理想的排列集恰好是 $S_n(321, 3412)$, 故这类排列也称为布尔排列。

同时避免 2 个 4 长模式的排列上有 56 个对称类, Le [28] 建立了 38 个 Wilf-等价类。Kremer [29] 证明了 10 种避免两个 4 长模式的排列的计数结果与 Schröder 数相关, 其中 $S_n(1243, 2143)$ 被 Egge 和 Mansour [30] 称为 Schröder 排列。

下面介绍避免两个 4 长模式的计数结果。对于模式集 A , 用 $s_n(A)$ 表示 S_n 中避免 A 中模式的排列数量, Kremer 和 Shiu [31] 使用有限转移矩阵得到如下结果:

定理 1.

$$s_n(1234, 3214) = s_n(4123, 3214) = s_n(2341, 2143) = s_n(1234, 2143) = \frac{1}{3}(4^{n-1} + 2).$$

Stankova [21] 证明了 $S_n(2143, 3412)$ 是 Skew-merged 排列, 即由一个递增子列和一个递减子列合并而成的排列。Atkinson [32] 由下面定理给出了计数结果。

定理 2.

$$s_n(2143, 3412) = \binom{2n}{n} - \sum_{m=0}^{n-1} 2^{n-m-1} \binom{2m}{m},$$

相应的生成函数为

$$\sum_{n \geq 0} s_n(2143, 3412) x^n = \frac{1-3x}{(1-2x)\sqrt{1-4x}}.$$

对于 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{s_n(2143,3412)}{\binom{2n}{n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

此外, Miner [33] 计算了等价类 $\{4123,1324\}$ 、 $\{4123,1243\}$ 、 $\{4123,1342\}$ 的生成函数。Miner 和 Pantone [34] 研究了最后两个 Wilf-等价类 $\{2413,3412\}$ 和 $\{3412,4123\}$ 。Callan, Mansour 和 Shattuck [35] [36] 得到避免 3 个 4 长模式的排列上有 242 个 Wilf-等价类。Mansour [37] 给出了 $S_n(1324,2134,1243)$ (称为极大偏序排列) 的计数结果如下:

定理 3.

$$\sum_{n \geq 0} s_n(1324,2134,1243)x^n = \frac{2-C(x)}{2-x-C(x)},$$

其中 $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 。

$$s_n(1324,2134,1243) = P_{5n} - 4P_{5(n-1)} + 2P_{5(n-2)} - \sum_{j=0}^{n-2} C_j P_{5(n-2-j)},$$

其中 P_n 是第 n 个 Padovan 数。

进一步, Mansour [38] 通过生成树、递归关系和左右极大值分解证明了避免 3 个 4 长模式(其中有一个是模式 1324)对应的生成函数并利用 Kuszmau 的软件和 INSENC 软件得到并证明避免 4 个 4 长模式的排列上有 1100 个 Wilf-等价类。

Green 和 Losonczy [39] 引入了自由编织排列, 即对于 $S_n(3421,4231,4312,4321)$, Mansour [40] 给出了其计数结果如下:

定理 4.

$$\sum_{n \geq 0} s_n(3421,4231,4312,4321)x^n = \frac{1-3x-2x^2+(1+x)\sqrt{1-4x}}{1-4x-x^2+(1-x^2)\sqrt{1-4x}}.$$

Albert 等人[41]使用编码插入的方法得到 $s_n(3124,4123,3142,4132) = \binom{2n-2}{n-1}$ 。

4. 多长模式的计数结果

Babson 和 West [42] 证明了 $s_n(12 \cdots kP) = s_n(k(k-1) \cdots 1P)$ 中 $k=2,3$ 的情形, 这里 P 是由 $\{k+1, \dots, l\}$ 组成的排列。这样就完成了 5 长模式的 Wilf-等价类的分类工作。

Stankova 和 West [43] 证明了 $s_n(231P) = s_n(312P)$, 这里 P 是由 $\{4, \dots, l\}$ 组成的排列, 并证明了 $\{546213, 465213\}$ 是 Wilf-等价的, 完成了 6 长模式的 Wilf-等价类分类。7 长模式的 Wilf-等价类分类也可用类似的方法完成。

经典 $S_n(12 \cdots (k+1))$ 的计数研究和杨表密切相关。设 n 个元素组成的每行长度不超过 k 的杨表个数为 $y_k(n)$, 其指数型生成函数记为 $Y_k(x)$ 。Wilf [44] 证明了

$$\sum_{n \geq 0} s_n(12 \cdots (k+1)) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = Y_k(x) Y_k(-x) (k=2,4,6, \dots).$$

使用初等工具, Bóna [45] 证明了 $s_n(12 \cdots k) \leq (k-1)^{2n}$ 。

5. 渐近计数

对任意的 $p \in S_3$, $s_n(p)$ 是 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, 从而有近似估计 $s_n(p) \sim \frac{4^n}{n^2 \sqrt{\pi}}$ 。

Bóna [46] 证明了 $s_n(1k2 \cdots (k-1)) < s_n(12 \cdots k)$ 。

Marcus 和 Tardos [47] 解决了著名的 Stanley-Wilf 猜想, 即下面定理:

定理 5. 对任意的正整数 k , 任意 $p \in S_k$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(p))^{\frac{1}{n}}$ 存在。

这一极限称为 Stanley-Wilf 极限, 记为 $L(p)$ 。数列 $\left\{ (s_n(p))^{\frac{1}{n}} \right\}$ 称为 Stanley-Wilf 数列。上面的结果即

$$L(p) = 4, p \in S_3.$$

$$L(12 \cdots k) = (k-1)^2.$$

Bóna [48] 得到 $L(12453) = 9 + 4\sqrt{2}$, 证明了 $L(p)$ 也可以是无理数。其一般形式为如下定理:

定理 6. 对 $k \geq 4$, $L(12 \cdots (k-3)(k-1)k(k-2)) = (k-4 + 2\sqrt{2})^2$ 。

Albert, Elder 和 Rechnitzer [49] 证明了 $L(4231) \geq 9.47$, 这是避免单个 4 长模式中 Stanley-Wilf 极限的最大值。

Kaiser 和 Klazar [50] 提到 Valtr 一个未发表的工作是证明了 $L(p) \geq \frac{(k-1)^2}{e^3}$, 对任意的 $p \in S_k$ 成立。

使用 Bóna [51] 的方法可得

$$L(1324567 \cdots k) = \left(k - 4 + \sqrt{L(1324)} \right)^2 \geq \left(k - 4 + \sqrt{9.47} \right)^2.$$

限于篇幅, 以上仅对有禁排列的一些经典成果做了综述, 还有一些新的研究未及论述, 如[52]。希望以后可以另起篇幅, 对相关进展进行介绍。

基金项目

国家自然科学基金青年基金(项目编号: 12201641); 河北省自然科学基金青年科学基金(项目编号: A2021205003)。

参考文献

- [1] MacMahon, P.A. (2001) *Combinatory Analysis, Volumes I and II*. American Mathematical Society, Washington DC.
- [2] Knuth, D.E. (1973) *The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching*. Pearson Education India, London.
- [3] Rotem, D. (1975) On a Correspondence between Binary Trees and a Certain Type of Permutation. *Information Processing Letters*, **4**, 58-61. [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(75\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0020-0190(75)90002-2)
- [4] Rogers, D.G. (1978) Ascending Sequences in Permutations. *Discrete Mathematics*, **22**, 35-40. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(78\)90044-4](https://doi.org/10.1016/0012-365X(78)90044-4)
- [5] Simion, R. and Schmidt, F.W. (1985) Restricted Permutations. *European Journal of Combinatorics*, **6**, 383-406. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(85\)80052-4](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(85)80052-4)
- [6] Kitaev, S. (2011) *Patterns in Permutations and Words*. Springer, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17333-2>
- [7] Callan, D. and Mansour, T. (2017) Enumeration of 2-Wilf Classes of Four 4-Letter Patterns. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, **5**, 210-225. <https://doi.org/10.12691/tjant-5-6-3>

- [8] Callan, D. and Mansour, T. (2018) Enumeration of 3- and 4-Wilf Classes of Four 4-Letter Patterns. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **24**, 115-130. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2018.24.3.115-130>
- [9] Callan, D. and Mansour, T. (2018) Enumeration of Small Wilf Classes Avoiding 1342 and Two Other 4-Letter Patterns. *Pure Mathematics and Applications*, **27**, 62-97. <https://doi.org/10.1515/puma-2015-0027>
- [10] Hou, Q.H. and Mansour, T. (2006) Horse Paths, Restricted 132-Avoiding Permutations, Continued Fractions, and Chebyshev Polynomials. *Discrete Applied Mathematics*, **154**, 1183-1197. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2005.11.004>
- [11] Claesson, A., Kitaev, S. and Steingrímsson, E. (2009) Decompositions and Statistics for $\beta(1,0)$ -Trees and Nonseparable Permutations. *Advances in Applied Mathematics*, **42**, 313-328. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2008.09.001>
- [12] Krattenthaler, C. (2001) Permutations with Restricted Patterns and Dyck Paths. *Advances in Applied Mathematics*, **27**, 510-530. <https://doi.org/10.1006/aama.2001.0747>
- [13] Mansour, T., Deng, E.Y.P. and Du, R.R.X. (2006) Dyck Paths and Restricted Permutations. *Discrete Applied Mathematics*, **154**, 1593-1605. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2006.02.004>
- [14] Richards, D. (1988) Ballot Sequences and Restricted Permutations. *ARS Combinatoria*, **25**, 83-86.
- [15] West, J. (1995) Generating Trees and the Catalan and Schröder Numbers. *Discrete Mathematics*, **146**, 247-262. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(94\)00067-1](https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00067-1)
- [16] Reifegerste, A. (2003) A Generalization of Simion-Schmidt's Bijection for Restricted Permutations. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **9**, R14. <https://doi.org/10.37236/1686>
- [17] Claesson, A. and Kitaev, S. (2008) Classification of Bijections between 321- and 132-Avoiding Permutations. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, **60**, B60d. <https://doi.org/10.46298/dmtcs.3594>
- [18] Bóna, M. (1997) Exact Enumeration of 1342-Avoiding Permutations: A Close Link with Labeled Trees and Planar Maps. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **80**, 257-272. <https://doi.org/10.1006/jcta.1997.2800>
- [19] Regev, A. (1981) Asymptotic Values for Degrees Associated with Strips of Young Diagrams. *Advances in Mathematics*, **41**, 115-136. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(81\)90012-8](https://doi.org/10.1016/0001-8708(81)90012-8)
- [20] Backelin, J., West, J. and Xin, G. (2007) Wilf-Equivalence for Singleton Classes. *Advances in Applied Mathematics*, **38**, 133-148. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2004.11.006>
- [21] Stankova, Z.E. (1994) Forbidden Subsequences. *Discrete Mathematics*, **132**, 291-316. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(94\)90242-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)90242-9)
- [22] Stankova, Z. (1996) Classification of Forbidden Subsequences of Length 4. *European Journal of Combinatorics*, **17**, 501-517. <https://doi.org/10.1006/eujc.1996.0044>
- [23] Gessel, I.M. (1990) Symmetric Functions and P-Recursiveness. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **53**, 257-285. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(90\)90060-A](https://doi.org/10.1016/0097-3165(90)90060-A)
- [24] Erdős, P. and Szekeres, G. (1935) A Combinatorial Problem in Geometry. *Compositio Mathematica*, **2**, 463-470.
- [25] Billey, S.C., Jockusch, W. and Stanley, R.P. (1993) Some Combinatorial Properties of Schubert Polynomials. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **2**, 345-374. <https://doi.org/10.1023/A:1022419800503>
- [26] West, J. (1996) Generating Trees and Forbidden Subsequences. *Discrete Mathematics*, **157**, 363-374. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)83023-8](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)83023-8)
- [27] Tenner, B.E. (2007) Pattern Avoidance and the Bruhat Order. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **114**, 888-905. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2006.10.003>
- [28] Le, I. (2005) Wilf Classes of Pairs of Permutations of Length 4. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **12**, R25. <https://doi.org/10.37236/1922>
- [29] Kremer, D. (2000) Permutations with Forbidden Subsequences and a Generalized Schröder Number. *Discrete Mathematics*, **218**, 121-130. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(99\)00302-7](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00302-7)
- [30] Egge, E.S. and Mansour, T. (2003) Permutations Which Avoid 1243 and 2143, Continued Fractions, and Chebyshev Polynomials. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **9**, R7. <https://doi.org/10.37236/1679>
- [31] Kremer, D. and Shiu, W.C. (2003) Finite Transition Matrices for Permutations Avoiding Pairs of Length Four Patterns. *Discrete Mathematics*, **268**, 171-183. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(03\)00042-6](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00042-6)
- [32] Atkinson, M.D. (1998) Permutations Which Are the Union of an Increasing and a Decreasing Subsequence. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **5**, R6. <https://doi.org/10.37236/1344>
- [33] Miner, S. (2016) Enumeration of Several Two-by-Four Classes.
- [34] Miner, S. and Pantone, J. (2018) Completing the Structural Analysis of the 2×4 Permutation Classes.
- [35] Callan, D., Mansour, T. and Shattuck, M. (2017) Wilf Classification of Triples of 4-Letter Patterns I. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **19**, Article No. 5. <https://doi.org/10.18576/jant/050104>

-
- [36] Shattuck, M., Mansour, T. and Callan, D. (2017) Wilf Classification of Triples of 4-Letter Patterns II. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **19**, Article No. 6.
- [37] Mansour, T. (2006) The Enumeration of Permutations Whose Posets Have a Maximum Element. *Advances in Applied Mathematics*, **37**, 434-442. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2005.11.003>
- [38] Mansour, T. (2020) Enumeration and Wilf-Classification of Permutations Avoiding Four Patterns of Length 4. *Discrete Mathematics Letters*, **3**, 67-94.
- [39] Greene, R.M. and Losonczy, J. (2002) Freely Braided Elements in Coxeter Groups. *Annals of Combinatorics*, **6**, 337-348. <https://doi.org/10.1007/s000260200008>
- [40] Mansour, T. (2004) On an Open Problem of Green and Losonczy: Exact Enumeration of Freely Braided Permutations. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **6**, 461-470. <https://doi.org/10.46298/dmtcs.327>
- [41] Albert, M.H., Linton, S. and Ruškuc, N. (2005) The Insertion Encoding of Permutations. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **12**, R47. <https://doi.org/10.37236/1944>
- [42] Babson, E. and West, J. (2000) The Permutations $123p_4 \cdots p_m$ and $321p_4 \cdots p_m$ Are Wilf-Equivalent. *Graphs and Combinatorics*, **16**, 373-380. <https://doi.org/10.1007/s003730070001>
- [43] Stankova, Z. and West, J. (2002) A New Class of Wilf-Equivalent Permutations. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **15**, 271-290. <https://doi.org/10.1023/A:1015016625432>
- [44] Wilf, H.S. (1992) Ascending Subsequences of Permutations and the Shapes of Tableaux. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **60**, 155-157. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(92\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0097-3165(92)90047-X)
- [45] Bóna, M. (2010) On Three Different Notions of Monotone Subsequences. *Permutation Patterns*, **376**, 89-114. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511902499.005>
- [46] Bóna, M. (1997) Permutations Avoiding Certain Patterns: The Case of Length 4 and Some Generalizations. *Discrete Mathematics*, **175**, 55-67. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00140-9](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00140-9)
- [47] Marcus, A. and Tardos, G. (2004) Excluded Permutation Matrices and the Stanley-Wilf Conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **107**, 153-160. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.04.002>
- [48] Bóna, M. (2005) The Limit of a Stanley-Wilf Sequence Is Not Always Rational, and Layered Patterns Beat Monotone Patterns. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **110**, 223-235. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.07.014>
- [49] Albert, H., Elder, M., Rechnitzer, A., *et al.* (2006) On the Stanley-Wilf Limit of 4231-Avoiding Permutations and a Conjecture of Arratia. *Advances in Applied Mathematics*, **36**, 96-105. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2005.05.007>
- [50] Kaiser, T. and Klazar, M. (2002) On Growth Rates of Closed Permutation Classes. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **9**, R10. <https://doi.org/10.37236/1682>
- [51] Bóna, M. (2007) New Records in Stanley-Wilf Limits. *European Journal of Combinatorics*, **28**, 75-85. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2005.09.005>
- [52] Mansour, T. and Rastegar, R. (2022) Pattern Occurrences in K-Ary Words Revisited: A Few New and Old Observations. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **188**, Article ID: 105596. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2022.105596>