Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1728-1743
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136177

黎曼球面上全纯等价关系的构造及其应用

吕玉兰[1,2]，甘丽宁[1]，黄志明[1]，杨秋花[1,3]，卢卫君[1]

[1]广西民族大学，数学与物理学院，广西 南宁
[2]江门培英高级中学，广东 江门
[3]广西民族师范学院，数理与电子信息工程学院，广西 崇左

收稿日期：2023年5月21日；录用日期：2023年6月22日；发布日期：2023年6月29日

摘 要

本文研究复一维连通复解析流形上的一些特殊黎曼面，包括复一维射影空间$\mathbb{C}P^1$、扩充复平面C_∞和复球面$\mathbb{S}^2$。在全纯映射和双全纯映射意义下，这三个典型的黎曼面是全纯等价。进而在**Hopf** 映射下，推出$\mathbb{S}^3$与$\mathbb{C}P^1$全纯等价。基于**Frankel** 猜想，讨论了复一维射影空间$\mathbb{C}P^1$到紧**Kähler** 流形上关于能量最小化的全纯映射问题。

关键词

黎曼面，全纯映射，全纯等价，**Hopf** 映射，全纯极小化映射

Construction of Holomorphic Equivalence Relations on Riemannian Spheres and Their Applications

Yulan Lv[1,2], Lining Gan[1], Zhiming Huang[1], Qiuhua Yang[1,3], Weijun Lu[1]

[1]College of Mathematics and Physics, Guangxi Minzu University, Nanning Guangxi
[2]Jiangmen Peiying Senior High School, Jiangmen Guangdong
[3]College of Mathematics and Electronic Information Engineering, Guangxi Normal University for Nationalities, Chongzuo Guangxi

Received: May 21st, 2023; accepted: Jun. 22nd, 2023; published: Jun. 29th, 2023

文章引用: 吕玉兰, 甘丽宁, 黄志明, 甘丽宁, 杨秋花, 卢卫君. 黎曼球面上全纯等价关系的构造及其应用[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1728-1743. DOI: 10.12677/pm.2023.136177

Abstract

In this paper, we study some special Riemann surfaces on complex one-dimensional connected complex analytic manifolds, including complex one-dimensional projection space $\mathbb{C}P^1$, extended complex plane C_∞ and complex sphere $\mathbb{S}^2$. In the sense of holomorphic mapping and biholomorphic mapping, these three typical Riemann surfaces are holomorphic equivalent. Furthermore, under Hopf mapping, the holomorphic equivalence between $\mathbb{S}^3$and $\mathbb{C}P^1$ is derived. Based on Frankle's conjecture, the problem of holomorphic mapping of energy minimization on complex one-dimensional projective spaces $\mathbb{C}P^1$ to compact Kähler manifolds is discussed.

Keywords

Riemann Surfaces, Holomorphic Mapping, Holomorphic Equivalence, Hopf Mapping, Holomorphic Minimization Mapping

1. 引言

黎曼面是由德国数学家伯恩哈德·黎曼在19世纪提出的一种复流形, 广泛应用于现代数学、物理学、工程学等领域. 与欧几里德空间相比, 黎曼面具有更加丰富的几何结构和拓扑性质, 在不同领域中都有广泛的应用和研究. 而黎曼球面则是一类特殊的黎曼面, 其曲率为正常数, 是一种非欧几里德几何体. 自从它被引入到几何学和复分析中以来, 已经成为了一个热门的研究领域, 吸引了众多学者的关注和探索. 黎曼面的研究不仅是单复变函数论的基本问题之一, 而且与众多的现代数学分支有紧密联系 [1], 黎曼面在物理中的应用广泛. 在量子力学中, 复射影线上的点是光子极化态, 自旋为1/2 的重亚原子粒子和一般二态粒子的的自旋态的自然取值. 黎曼球面被推荐为天体球面的广义相对论模型. 在弦论中, 弦的世界面是黎曼曲面, 而黎曼球面作为最简单的黎曼曲面有重要的作用 [2]. 由群作用诱导的商映射$h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1\ (\cong \mathbb{S}^2)$ 颠覆了人们之前对高维球面空间向低维球面空间连续变换与常值映射同伦的猜想并创造一个新的研究方向.

由Hopf 纤维化的启发, 人们发现更有趣的高维空间的纤维化特性 [3]. 应用调和映照以及Kobayashi-Ochiai关于复射影空间的特征 [4], 萧荫堂和丘成桐 [5]对任何维数证明了著名的Frankel 猜想: 任何具有正正交双截面曲率的紧Kähler 流形一定双全纯等价于复射影空间$\mathbb{C}P^n$. 在他们的工作之后, Mok [6] 将Frankel 猜想推广到非负曲率的情形, 即广义Frankel 猜想: 任意具有

非负全纯双截面曲率条件的不可约紧Kähler 流形或者等距于一个Hermitian 对称空间, 或者双全纯等价于复投影空间$\mathbb{C}P^n$. 黎曼面是一种具有复平面局部性质的拓扑流形, 而紧Kähler 流形是一种具有复结构和黎曼度量的拓扑流形. 在复几何学中, 全纯等价是指两个复流形在某种意义下具有相同的复结构. 因此, 黎曼面的全纯等价性质在紧Kähler流形的能量最小化中具有重要意义, 它使得我们可以利用复几何的方法来调整黎曼度量, 从而求解能量最小化问题.

关于黎曼曲面的一个重要研究是它们之间全纯映射的构造 [7,8]. 本文从黎曼曲面的概念出发, 通过构造黎曼曲面之间的映射, 使得该映射的局部坐标表示满足全纯映射的条件, 且逆映射成立, 即满足双全纯映射, 从而推出三个黎曼曲面之间是全纯等价的. 在构造全纯映射的过程中, 最大的障碍就是两个黎曼曲面的局部坐标图卡之间的坐标转换. 对复一维投影空间$\mathbb{C}P^1$, 从商拓扑出发, 考虑如何定义开集, 涉及到等价类的情况 [9], 需要对等价类的代表元进行处理, 所以两个黎曼曲面之间的坐标对应就需要一些技巧. 对于二维球面$\mathbb{S}^2$, 本文巧妙地利用了在二维球面上三个坐标必须满足平方和为1这一性质, 从而构造出符合预期想法的全纯映射. Hopf 映射是由一个纤维化映射与两个全纯映射的复合, 进而在Hopf 映射下, 推出$\mathbb{S}^3$ 与$\mathbb{C}P^1$全纯等价. 最后, 针对Frankel 猜想的复一维情形, 给出正的正交双截面曲率的定义, 通过计算能量的第二变分映射$f : (\mathbb{C}P^1, \omega) \to (M, h)$. 证明了在任意能量最小化上复一维射影空间$\mathbb{C}P^1$到紧Kähler 流形上的全纯映射.

2. 相关知识

2.1. 黎曼面

定义2.1.1 [10] 设S是一个连通的Hausdorff 空间, 加上一簇$\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, 满足下列条件:

（1）每个U_α是S的一个开集, 所有的U_α组成S的开覆盖, 即$S \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$.

（2）V_α为$\mathbb{C}$中开集, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$为同胚.

（3）若$U_\alpha \bigcap U_\beta{=}\varnothing$, 则$f_{\alpha\beta}{=}\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$是$\mathbb{C}$中开集的一个全纯映射. 则称$S$是黎曼曲面.

定义中的开覆盖称为局部坐标覆盖, 称$\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$为$S$的局部坐标卡, U_α称为S的一个坐标邻域, φ_α称为U_α上的坐标映射, $\varphi_\alpha(m)(m \in U_\alpha)$ 为m点的局部坐标, 称$f_{\alpha\beta}$为转换函数.

给出以下黎曼面的例子.

命题 2.1.2 二维球面

$$\mathbb{S}^2{=}\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

是一个黎曼曲面.

证明 令

$$U_1{=}\mathbb{S}^2 - \{(0{,}0{,}1)\} \subset \mathbb{S}^2, U_2{=}\mathbb{S}^2 - \{(0{,}0{,}-1)\} \subset \mathbb{S}^2. \tag{2.1}$$

则$U_3{=}\mathbb{S}^2 - \{(0{,}0{,}1)\} - \{(0{,}0{,}-1)\} \subset \mathbb{S}^2$.

给$\mathbb{S}^2$一个拓扑结构$\tau_{\mathbb{S}^2}{=}\{\varnothing, \mathbb{S}^2, U_1, U_2, U_3\}$. 这时$U_1, U_2, U_3$是$\mathbb{S}^2$的开集, $\mathbb{S}^2$是连通的.

考虑映射:

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}.\,(x,y,z) \mapsto w = \varphi_1(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-z},\ z \in [-1,1)\,. \tag{2.2}$$

$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}.\,(x,y,z) \mapsto u = \varphi_2(x,y,z) = \frac{x-iy}{1+z},\ z \in (-1,1]\,. \tag{2.3}$$

易验证φ_1, φ_2是双射, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$是连续的, 故$\varphi_1, \varphi_2$ 是同胚.

φ_1, φ_2之间的转换映射:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.\, w \mapsto u = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(w).$$

从而

$$\begin{aligned} u = f_{21}(w) &= \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\frac{x+iy}{1-z}) = \varphi_2(x,y,z) = \frac{x}{1+z} - \frac{iy}{1+z} \\ &= \frac{1-z}{1+z}(\frac{x}{1-z} - \frac{iy}{1-z}) = \frac{1}{w \cdot \bar{w}}\bar{w} = \frac{1}{w}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

由（2.4）可得

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial(\frac{1}{w})}{\partial \bar{w}} = 0.$$

故$u = f_{21}(w) = \dfrac{1}{w}$是关于$w$ 的全纯函数. 因此, $\mathbb{S}^2$是一个黎曼曲面.

命题 2.1.3 扩充复平面是复平面和此无穷远点构成的平面, 即

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

是一个黎曼面.

证明 令

$$\widetilde{U_1} = \mathbb{C}_\infty - \{\infty\} = \mathbb{C}, \widetilde{U_2} = \mathbb{C}_\infty - \{0\}\,. \tag{2.5}$$

则$\widetilde{U_3} = \mathbb{C}_\infty - \{\infty\} - \{0\} = \mathbb{C} - \{0\}$.

给$\mathbb{C}_\infty$一个拓扑结构$\tau_{\mathbb{C}_\infty} = \left\{\varnothing, \mathbb{C}_\infty, \widetilde{U_1}, \widetilde{U_2}, \widetilde{U_3}\right\}$. 这时$\widetilde{U_1}, \widetilde{U_2}, \widetilde{U_3}$ 是$\mathbb{C}_\infty$的开集, $\mathbb{C}_\infty$是连通的.

考虑映射:

$$\phi_1 : \widetilde{U_1} \to \mathbb{C}.\, z \mapsto w = \phi_1(z) = z. \tag{2.6}$$

$$\phi_2 : \widetilde{U_2} \to \mathbb{C}.\, z \mapsto u = \phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq \infty. \\ 0, & z = \infty. \end{cases} \tag{2.7}$$

易验证ϕ_1,ϕ_2是双射, $\phi_1,\phi_2,\phi_1^{-1},\phi_2^{-1}$是连续的, 故$\phi_1,\phi_2$是同胚.

ϕ_1,ϕ_2之间的转换映射：

$$\phi_2\circ\phi_1^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}.\,w\mapsto u=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(w).$$

从而

$$u{=}\mathrm{g}_{21}(w)=\phi_2\circ\phi_1^{-1}(z){=}\phi_2(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{w} \tag{2.8}$$

由（2.8）可得

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{w}}=\frac{\partial(\frac{1}{w})}{\partial\overline{w}}=0.$$

故$u=g_{21}(w)=\dfrac{1}{w}$是关于w的全纯函数. 因此, $\mathbb{C}_\infty$是一个黎曼曲面.

命题 2.1.4 复一维投影空间$\mathbb{C}P^1{=}\mathbb{C}^2-\{0\}/\sim$上定义的商映射$\pi:\mathbb{C}^2-\{0\}\to\mathbb{C}P^1$

$$(z_0,z_1)\mapsto\pi(z_0,z_1)=(z_0,z_1)/\sim=[(z_0,z_1)].$$

是满射. 定义商拓扑：

$$\tau_{\mathbb{C}^2-\{0\}}=\tau^E_{\mathbb{C}^2}\cap(\mathbb{C}^2-\{0\}),\ \tau_{\mathbb{C}P^1}=\left\{\pi(U)|\forall U\in\tau_{\mathbb{C}^2-\{0\}}\right\}.$$

且$\mathbb{C}P^1$是一个黎曼曲面.

证明 若$U\subset\mathbb{C}^2-\{0\}$, 则定义$\pi(U)=\{\pi(z_0,z_1)=[(z_0,z_1)]|\forall(z_0,z_1)\in U\}$为$\mathbb{C}P^1$ 的开集. 令

$$V_1=\left\{[(z_0,z_1)]\in\mathbb{C}P^1|(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2-\{0\},z_0\neq0\right\}, \tag{2.9}$$

$$V_2=\left\{[(z_0,z_1)]\in\mathbb{C}P^1|(z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2-\{0\},z_1\neq0\right\}, \tag{2.10}$$

$$V_1\cup V_2=\mathbb{C}P^1,V_1\cap V_2\neq\varnothing.$$

故V_1,V_2为$\mathbb{C}P^1$中的开集.

考虑映射:

$$\psi_1:V_1\to\mathbb{C}.\,[(z_0,z_1)]\mapsto w=\psi_1(z_0,z_1)=\psi_1[(z_0,z_1)]=\frac{z_1}{z_0}, \tag{2.11}$$

$$\psi_2:V_2\to\mathbb{C}.\,[(z_0,z_1)]\mapsto u=\psi_2(z_0,z_1)=\psi_2[(z_0,z_1)]=\frac{z_0}{z_1}. \tag{2.12}$$

易验证ψ_1,ψ_2是双射, $\psi_1,\psi_2,\psi_1^{-1},\psi_2^{-1}$是连续的, 故$\psi_1,\psi_2$是同胚.

ψ_1,ψ_2之间的转移映射:

$$\psi_2\circ\psi_1^{-1}:\psi_1(V_1\cap V_2)\to\psi_2(V_1\cap V_2),w\mapsto u=\psi_2\circ\psi_1^{-1}(w),$$

从而

$$u = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(w) = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(\frac{z_1}{z_0}) = \psi_2([(z_0, z_1)]) = \frac{z_0}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_0}} = \frac{1}{w}. \tag{2.13}$$

由（2.13）可得

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial(\frac{1}{w})}{\partial \overline{w}} = 0.$$

故$u = \dfrac{1}{w}$是关于w的全纯函数. 因此$\mathbb{C}P^1$为黎曼曲面. □

以上三个例子非常相似, 实际上这三个黎曼曲面是全纯等价的, 具体证明在下一节给出.

2.2. 全纯映射与全纯等价

如无特别声明, 假定黎曼曲面是连通的, 且转换函数总是全纯的. 为此引入黎曼面之间的全纯映射和全纯等价的概念.

定义2.2.1 设M、N是两个黎曼曲面, 分别以$\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(\mathrm{V}_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ 为其局部坐标卡, $f: M \to N$为连续映射, 如果对每一对局部坐标卡, 使得$f(U_\alpha) \subset V_\beta, f^{-1}(V_\beta) \cap U \neq \varnothing$. 且复合映射

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta^{-1}) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

是全纯映射, 则称$f: M \to N$为全纯映射. 其中, $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$称为$f$的局部表示.

定义2.2.2 设M、N是两个黎曼曲面, 如果$f: M \to N$, $g: N \to M$均为全纯映射, 且

$$g \circ f = Id_M, f \circ g = Id_N.$$

则称f或g为双全纯映射, 称M与N为全纯等价.

2.3. Hopf纤维化

定义2.3.1 带有纤维$\mathbb{S}^1 \cong U(1) \cong \mathbb{SO}_2$ 的映射$P: \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. 从$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_i(\mathbb{S}^1) = 0$, $i > 1$, 我们可以从纤维化的正合序列中得到以下的同构关系:

$$\pi_i(\mathbb{S}^{2n+1}) \cong \pi_i(\mathbb{C}P^n), i \neq 2,$$

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) \cong \pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z},$$

$$\pi_2(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1).$$

定义2.3.2 称映射$f: X \to Y$是一个纤维化, 如果对于到底空间Y的任意映射$\varphi = \varphi_0$的任何同伦$\Phi = \{\varphi_t\}: K \times I \to Y$ 都存在某个同伦$\widetilde{\Phi} = \{\widetilde{\varphi}_t\}: K \times I \to X$ 覆盖Φ. 其中, 空间Y称为底空间, X 称为纤维化空间. 完全原像$F_y = f^{-1}(y)$称为纤维, 映射f则称为射影.

3. 全纯等价的关系构造

3.1. 黎曼球面之间的全纯等价

在这一节中, 我们为构造出符合预期想法的全纯映射, 最大的问题是解决两个黎曼面的局部坐标图卡之间的坐标转换. 在全纯映射和双全纯映射意义下, 证明了两个黎曼面上全纯等价的关系.

命题3.1 二维球面$\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$与扩充复平面$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$全纯等价.

证明 取二维球面S^2的复解析结构为$\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$, 由命题2.1.2中式（2.1)、（2.2）以及（2.3）给出.

扩充复平面$C_\infty=C\cup\{\infty\}$的一个复结构为$\left\{(\widetilde{U_1},\phi_1),(\widetilde{U_2},\phi_2)\right\}$. 由命题2.1.3中式（2.5)、（2.6）以及（2.7）给出.

构造映射$f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{C}_\infty$.

$$(x,y,z)\mapsto w=f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x+iy}{1-z}, & (x,y,z)\neq(0,0,1).\\ \infty, & (x,y,z)=(0,0,1).\end{cases}\tag{3.1}$$

则易知f是双射,其逆映射为$g=f^{-1}:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{S}^2$.

$$w\mapsto(x,y,z)=g(w)=\begin{cases}(\frac{2\operatorname{Re}w}{|w|^2+1},\frac{2\operatorname{Im}w}{|w|^2+1},\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}), & w\neq\infty.\\ (0,0,1), & w=\infty.\end{cases}\tag{3.2}$$

1）对于映射f, 分两种情况来进行局部坐标考虑.

若$(x,y,z)=(0,0,1)$, 则$f(0,0,1)=\infty$. 分别取点$(0,0,1)\in U_2$, 在$\mathbb{S}^2$ 的局部解析图卡(U_2,φ_2)和∞在$\mathbb{C}_\infty$的局部解析图卡$(\widetilde{U_2},\phi_2)$, 这时f的局部表示：

$$\widetilde{f_{22}}=\phi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}:\varphi_2(U_2\cap f^{-1}(\widetilde{U_2}))\subset\mathbb{C}\to\phi_2(f(U_2)\cap\widetilde{U_2})\subset\mathbb{C}.u\mapsto w=\widetilde{f_{22}}(u).$$

结合（2.3)、（2.7)、（3.1）, 得到

$$\begin{aligned}w=\widetilde{f_{22}}(u)&=\phi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}(u)=\phi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}(\frac{x-iy}{1+z})=\phi_2\circ f(x,y,z)\\ &=\begin{cases}\phi_2(\frac{x+iy}{1-z}), & (x,y,z)\neq(0,0,1)\\ \phi_2(\infty), & (x,y,z)=(0,0,1)\end{cases}=\begin{cases}\frac{1-z}{x+iy}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}u\\ 0\end{cases}.\end{aligned}$$

即$w=\widetilde{f_{22}}(u)=u$. 可见$\dfrac{\partial w}{\partial\overline{u}}=\dfrac{\partial(u)}{\partial(\overline{u})}=0$, 故$w=\widetilde{f_{22}}(w)$关于$u\in\mathbb{C}$是全纯函数.

若$(x,y,z)\neq(0,0,1)$, 则$f(x,y,z)=\dfrac{x+iy}{1-z}\neq\infty$, 取点$(x,y,z)$在$\mathbb{S}^2$的局部坐标图卡$(U_1,\varphi_1)$和复

数$\dfrac{x+iy}{1-z}$在$\mathbb{C}_\infty$的局部领域坐标图卡$(\widetilde{U_1},\phi_1)$, 则f的局部表示为:

$$\widetilde{f_{11}}=\phi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap f^{-1}(\widetilde{U_1}))\subset\mathbb{C}\to\phi_1(f(U_1)\cap\widetilde{U_1})\subset\mathbb{C}.$$

$$w=\frac{x+iy}{1-z}\mapsto u=\widetilde{f_{11}}(w).$$

结合（2.2）、（2.6）、（3.1）, 得到

$$\begin{aligned}u&=\widetilde{f_{11}}(w)=\phi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}(w)=\phi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}(\frac{x+iy}{1-z})=\phi_1\circ f(x,y,z)\\&=\phi_1(\frac{x+iy}{1-z})=id(\frac{x+iy}{1-z})=\frac{x+iy}{1-z}=w.\end{aligned}$$

即$u=\widetilde{f_{11}}(w)=w$. 于是$\dfrac{\partial u}{\partial\overline{w}}=\dfrac{\partial(w)}{\partial(\overline{w})}=0$, 故$u=\widetilde{f_{11}}(w)$关于$w\in\mathbb{C}$是全纯函数.

2）对于映射g,同样分两种情况讨论：

若$w=\infty$, 则$g(w)=(0,0,1)$. 这时∞在$\mathbb{C}_\infty$的局部解析图卡$(\widetilde{U_2},\phi_2)$ 和$g(\infty)=(0,0,1)$在$\mathbb{S}^2$的局部解析图卡(U_2,φ_2), 得g的局部坐标表示为:

$$\widetilde{g_{22}}=\varphi_2\circ g\circ\phi_2^{-1}:\phi_2(\widetilde{U_2}\cap f^{-1}(U_2))\to\varphi_2(f(\widetilde{U_2})\cap U_2).w\mapsto u=\widetilde{g_{22}}(w).$$

结合（2.3）、（2.7）、（3.2）, 得到

$$\begin{aligned}u=\widetilde{g_{22}}(w)=\varphi_2\circ g\circ\phi_2^{-1}(w)&=\begin{cases}\varphi_2\circ g\circ\phi_2^{-1}(\frac{x-iy}{1+z}), & w\neq 0\\ \varphi_2\circ g\circ\phi_2^{-1}(0), & w=0\end{cases}\\&=\begin{cases}\varphi_2\circ g(\frac{x+iy}{1-z})\\ \varphi_2\circ g(\infty)\end{cases}=\begin{cases}\varphi_2(x,y,z)\\ \varphi_2(0,0,1)\end{cases}=\begin{cases}w\\ 0\end{cases}.\end{aligned}$$

其中, $w=\dfrac{x-iy}{1+z},x^2+y^2+z^2=1,g(\dfrac{x+iy}{1-z})$=$(x,y,z)$. 则有

$$\frac{1}{w}=\frac{1+z}{x-iy}=\frac{x+iy}{1-z}.$$

可见, $u=\widetilde{g_{22}}(w)=w$,这是关于$w$的全纯函数.

取w在$\mathbb{C}_\infty$的局部坐标图卡$(\widetilde{U_1},\phi_1)$和$g(w)=(x,y,z)$在$\mathbb{S}^2$的局部坐标图卡(U_1,φ_1), 得g的局部坐标表示为:

$$\widetilde{g_{11}}=\varphi_1\circ g\circ\phi_1^{-1}:\phi_1(\widetilde{U_1}\cap g^{-1}(U_1))\to\varphi_1(g(\widetilde{U_1})\cap U_1).\ w\mapsto u=\widetilde{g_{11}}(w).$$

结合（2.2）、（2.6）、（3.2）, 得到

$$u=\widetilde{g_{11}}(w)=\varphi_1\circ g\circ\phi_1^{-1}(\frac{x+iy}{1-z})=\varphi_1\circ g(\frac{x+iy}{1-z})=\varphi_1(x,y,z)=\frac{x+iy}{1-z}=w.$$

可见, $\widetilde{g_{11}}$是全纯映射.

综上所述, 得知$g=f^{-1}$也是全纯映射, 从而f是一个双全纯映射.

因此, $\mathbb{S}^2$与$\mathbb{C}_\infty$是全纯等价. □

命题3.2 二维球面$\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$与复一维投影空间$\mathbb{C}P^1=\mathbb{C}^2-\{0\}/\sim$ 全纯等价.

证明 取二维球面S^2的复解析结构为$\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$,由命题2.1.2中式（2.1）、（2.2）以及（2.3）给出.

复一维投影空间$\mathbb{C}P^1$的自然投影

$$\pi:\mathbb{C}^2-\{0\}\to\mathbb{C}P^1.\,(z_0,z_1)\mapsto\pi(z_0,z_1)=(z_0,z_1)/\sim=[(z_0,z_1)].$$

取商拓扑

$$\forall A\in\tau^E_{\mathbb{C}^2-\{0\}}=\tau^E_{\mathbb{C}^2}\cap(\mathbb{C}^2-\{0\}),$$

定义$\pi(A)=\{\pi(z_0,z_1)\in\mathbb{C}P^1|\forall(z_0,z_1)\in A\}$ 为$\mathbb{C}P^1$的开集. 即

$$\tau=\left\{\pi(A)|\forall A\in\tau_{\mathbb{C}^2-\{0\}}\right\}.$$

复一维投影空间$\mathbb{C}P^1$的一个复解析结构为$\{(V_1,\psi_1),(V_2,\psi_2)\}$. 由命题2.1.4中式（2.9）-（2.12）给出.

构造映射$F:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{S}^2$,

$$[(z_0,z_1)]\mapsto F([(z_0,z_1)])=(x,y,z)=\begin{cases}\left(\dfrac{2\mathrm{Re}\dfrac{z_1}{z_0}}{\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^2+1},\dfrac{2\mathrm{Im}\dfrac{z_1}{z_0}}{\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^2+1},\dfrac{\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^2-1}{\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^2+1}\right), & z_0\neq0.\\(0,0,1), & z_0=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

则F是双射. 其逆映射为$G=F^{-1}:\mathbb{S}^2\to\mathbb{C}P^1$,

$$(x,y,z)\mapsto G(x,y,z)=[(z_0,z_1)]=\begin{cases}[(1-z,x+iy)], & (x,y,z)\neq(0,0,1).\\ [(0,z_1)], & (x,y,z)=(0,0,1).\end{cases}\tag{3.4}$$

1）对于映射F, 分两种情况来进行局部坐标考虑.

若$z_0=0$时, 则$F([(0,z_1)])=(0,0,1)\in\mathbb{S}^2$. 由于$[(0,z_1)]$属于$V_2$, 取局部坐标图卡$(V_2,\psi_2)$和点(0,0,1)在$\mathbb{S}^2$的局部坐标图卡$(U_2,\varphi_2)$, 这时$F$的局部表示：

$$\widetilde{F_{22}}=\varphi_2\circ F\circ\psi_2^{-1}:\psi_2(V_2\cap F^{-1}(U_2))\to\varphi_2(F(V_2)\cap U_2).\,w\mapsto u=\widetilde{F_{22}}(w).$$

结合（2.3)、(2.12)、(3.3)，得到

$$u=\widetilde{F_{22}}(w)=\varphi_2\circ F\circ\psi_2^{-1}(w)=\begin{cases}\varphi_2\circ F\circ\psi_2^{-1}(\frac{z_0}{z_1}),z_0\neq 0\\ \varphi_2\circ F\circ\psi_2^{-1}(\frac{z_0}{z_1}),z_0=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\varphi_2\circ F([(z_0,z_1)])\\ \varphi_2\circ F([(0,z_1)])\end{cases}=\begin{cases}\varphi_2\left(\frac{2\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_0}}{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+1},\frac{2\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_0}}{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+1},\frac{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2-1}{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+1}\right)\\ \varphi_2(0,0,1)\end{cases}=\begin{cases}\frac{z_0}{z_1}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}w\\ 0\end{cases}.$$

于是$\dfrac{\partial u}{\partial\overline{w}}=\dfrac{\partial(w)}{\partial(\overline{w})}=0$, 故$\widetilde{F_{22}}$是全纯映射. 若$z_0\neq 0$时, $F([z_0,z_1])\neq(0,0,1)$. 取$[(z_0,z_1)]$在$\mathbb{C}P^1$的局部坐标图卡(V_1,ψ_1)和$\mathbb{S}^2$的局部坐标图卡(U_1,φ_1), 这时F的局部表示：

$$\widetilde{F_{11}}=\varphi_1\circ F\circ\psi_1^{-1}:\psi_1(V_1\cap F^{-1}(U_1))\to\varphi_1(F(V_1)\cap U_1).\,u\mapsto w=\widetilde{F_{11}}(u).$$

结合（2.2)、(2.11)、(3.3)，得到

$$w=\widetilde{F_{11}}(u)=\varphi_1\circ F\circ\psi_1^{-1}(\frac{z_1}{z_0})=\varphi_1\circ F([z_0,z_1])$$

$$=\varphi_1\left(\frac{2\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_0}}{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+1},\frac{2\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_0}}{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+1},\frac{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2-1}{\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+1}\right)=\frac{x+iy}{1-z}=\frac{z_1}{z_0}.$$

由$w=\widetilde{F_{11}}(u)=u$知$\widetilde{F_{11}}$是全纯映射.

综上两种情形, 便知$F:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{S}^2$是全纯映射.

2）对于映射G, 同样分两种情况讨论：

若$(x,y,z)=(0,0,1)$时, 则$G(0,0,1)=[(0,z_1)]$.这时取$(0,0,1)$在$\mathbb{S}^2$的局部坐标图卡(U_2,φ_2)和$\mathbb{C}P^1$的局部坐标图卡(V_2,ψ_2), 得到G的局部表示：

$$\widetilde{G_{22}}=\psi_2\circ G\circ\varphi_2^{-1}:\varphi_2(U_2\cap G^{-1}(V_2))\to\psi_2(G(U_2)\cap V_2).\,u\mapsto w=\widetilde{G_{22}}(u).$$

结合（2.3)、(2.12)、(3.4)，得到

$$w=\widetilde{G_{22}}(u)=\psi_2\circ G\circ\varphi_2^{-1}(u)=\begin{cases}\psi_2\circ G\circ\varphi_2^{-1}(\frac{x-iy}{1+z}), & u\neq 0\\ \psi_2\circ G\circ\varphi_2^{-1}(0), & u=0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\psi_2\circ G(x,-y,-z)\\ \psi_2\circ G(0,0,1)\end{cases}=\begin{cases}\psi_2([(1+z,x-iy)])\\ \psi_2([(0,z_1)])\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{u}\\ 0\end{cases}.$$

从而由$w=\widetilde{G_{22}}(u)=\dfrac{1}{u}$知$\widetilde{G_{22}}$是全纯映射.

若$(x,y,z)\neq(0,0,1)$时, 则$G(x,y,z)=[(z_0,z_1)]=[(1-z,x+iy)]$. 取$\mathbb{S}^2$的局部坐标图卡$(U_1,\varphi_1)$

和$\mathbb{C}P^1$的局部坐标图卡(V_1,ψ_1), 得到G的局部表示:

$$\widetilde{G_{11}}=\psi_1\circ G\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap G^{-1}(V_1))\to\psi_1(G(U_1)\cap V_1).\, w\mapsto u=\widetilde{G_{11}}(w).$$

结合（2.2)、（2.11)、（3.4）, 得到

$$\begin{aligned}u=\widetilde{G_{11}}(w)&=\psi_1\circ G\circ\varphi_1^{-1}(w)=\psi_1\circ G\circ\varphi_1^{-1}(\frac{x+iy}{1-z})\\&=\psi_1\circ G(x,y,z)=\psi_1([(z_0,z_1)])=\frac{x+iy}{1-z}=w.\end{aligned}$$

从而由$w=\widetilde{G_{11}}(u)=u$知$\widetilde{G_{12}}$是全纯映射.

最后, 由1）, 2）知$F:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{S}^2$为双全纯映射, 故$\mathbb{C}P^1$与$\mathbb{S}^2$是全纯等价. □

以上两个命题是黎曼面之间全纯等价的基本事实, 同理可得$\mathbb{C}P^1$与$\mathbb{C}_\infty$也是全纯等价的. 在黎曼曲面论中, 全纯等价的黎曼曲面, 等同为一个黎曼曲面, 统称黎曼球面.

3.2. Hopf纤维化下的全纯等价

在本节中, 给出了Hopf 纤维化下的调和映射, 由黎曼面之间的全纯等价关系, 推出三维球面S^3在Hopf纤维化后与复一维射影空间$\mathbb{C}P^1$ 之间的全纯等价.

命题3.3 [11] 在同伦理论中重要的Hopf 映射$h:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2$ 是调和映射.

证明 设$\mathbb{S}^3=\{(z_1,z_2)\in C^2||z_1|^2+|z_2|^2=1\}$, 对$\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{S}^2$, 定义

$$h(z_1,z_2)=(2\mathrm{Re}z_1\overline{z_2},2\,\mathrm{Im}\,z_1\overline{z_2},|z_1|^2-|z_2|^2).\tag{3.5}$$

则

$$\begin{aligned}|h(z_1,z_2)|^2=|2z_1\overline{z_2}|^2+\left||z_1|^2-|z_2|^2\right|^2&=(2\overline{z_1}z_2)\cdot(2z_1\overline{z_2})+|z_1|^4-2|z_1|^2|z_2|^2+|z_2|^4\\&=|z_1|^4+2|z_1|^2|z_2|^2+|z_2|^4=|z_1|^2+|z_2|^{22}=1.\end{aligned}$$

$h(z_1,z_2)$的两个分量函数

$$h_1(z_1,z_2)=2z_1\overline{z_2}=2(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)=2(x_1x_2+y_1y_2)+i(-x_1y_2+x_2y_1),$$

$$h_2(z_1,z_2)=|z_1|^2-|z_2|^2=x_1{}^2+y_1{}^2-x_2{}^2-y_2{}^2.$$

都是$\mathbb{C}^2\cong\mathbb{R}^4$上的2次齐次调和函数.

从事实由$n+1$个k次齐次调和多项式$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, 则$f$在球面$\mathbb{S}^n$上的限制$f|_{\mathbb{S}^n}=\mathbb{S}^m\to\mathbb{S}^n$ 是调和映射知, h 定义了$\mathbb{S}^3$到$\mathbb{S}^2$上的调和映射.

作Hopf 纤维化映射, $\pi:\mathbb{S}^3\to\mathbb{C}P^1$, 对$\forall(z_1^{'},z_2^{'})\in\mathbb{S}^3$, 即$\left|z_1^{'}\right|^2+\left|z_2^{'}\right|^2=1$. 若$\exists\lambda\in\mathbb{C}$,$|\lambda|=1$, 使得$(z_1^{'},z_2^{'})$=$\lambda(z_1,z_2)$. 则称$(z_1^{'},z_2^{'})$等价于$(z_1,z_2)$. $\mathbb{S}^3$关于这个等价关系的商空间为

$$\mathbb{C}P^1{=}\mathbb{C}^2-\{0\}/\sim=\{[(z_1,z_2)]=(z_1,z_2)/\sim|\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2-\{0\}\}.$$

定义全纯映射$h_1:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 如下: $\forall[(z_1,z_2)]\in\mathbb{C}P^1$, 有

$$h_1[(z_1,z_2)]=\begin{cases}\frac{z_1}{z_2},z_2\neq 0,\\ \infty,z_2{=}0.\end{cases}\tag{3.6}$$

由命题3.1, 定义全纯映射$g:\mathbb{C}_\infty\to S^2$如下：对$\forall z\in\mathbb{C}_\infty$, 有

$$g(z)=\begin{cases}(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1},\frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}),z\neq\infty\\ (0,0,1),z=\infty\end{cases}\tag{3.7}$$

可以看出, Hopf 映射是由一个纤维化映射与两个全纯映射复合的结果, 即$h=g\circ h_1\circ\pi$. □

由此可得, 三维球面S^3在Hopf 纤维化后与$\mathbb{C}P^1$全纯等价.

4. 复一维射影空间$\mathbb{C}P^1$的全纯映射问题

Frankel 在 [12]中曾作如下猜想: 每个紧Kähler 流形, 如果它的全纯双截曲率为正, 那么它全纯等价于复射影空间$\mathbb{C}P^n$ [13] . 对于复一维情形, 本节在任意能量最小化上定义复一维射影空间$\mathbb{C}P^1$到Kähler 流形上的全纯映射, 为此做一些准备工作.

设$\mathbb{C}P^1$是具有固定保形结构ω的复一维射影空间, M是具有Kähler 度量h的紧Kähler 流形. 在$(\mathbb{C}P^1,\omega)$和(M,h)的全纯局部坐标上, 分别有：

$$\omega=\lambda^2d\omega\otimes d\bar{\omega},\ \ h=\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j.$$

其中$h_{i\bar{j}}=\left\langle\dfrac{\partial}{\partial z^i},\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^j}\right\rangle$.

对任意光滑映射$f:(\mathbb{C}P^1,\omega)\to(M,h)$, f的能量泛函为

$$\begin{aligned}E(f)&=\int_{\mathbb{C}P^1}\left\langle\frac{\partial f}{\partial\omega},\frac{\partial f}{\partial\omega}\right\rangle\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar{\omega}\\&=\int_{\mathbb{C}P^1}\left(\frac{\partial f^i}{\partial\omega}\overline{\frac{\partial f^j}{\partial\omega}}+\frac{\partial f^i}{\partial\bar{\omega}}\overline{\frac{\partial f^j}{\partial\bar{\omega}}}\right)h_{i\bar{j}}\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar{\omega}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中, $\dfrac{\partial f^i}{\partial \omega}=f^i_\omega, \dfrac{\partial f^i}{\partial \bar\omega}=f^i_{\bar\omega}$. $\dfrac{\partial f}{\partial \omega}=f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial\omega}\right)=f^i_\omega\dfrac{\partial}{\partial z^i}+\overline{f^i_{\bar\omega}}\dfrac{\partial}{\partial \bar z^i}$.

引理4.1 $E(f)$关于f是可微的, 则有能量的第一变分公式

$$E'(f)|_{t=0}=-2\int_{\mathbb{C}P^1}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{D}{\partial\bar\omega}\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)\right\rangle\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega. \tag{4.2}$$

证明 设$f(t):\mathbb{C}P^1\to M, t\in\mathbb{C}, |t|\le\varepsilon$是开放圆盘$\mathbb{C}$上参数化的光滑映射簇, 由（4.1）有

$$\begin{aligned}
E'(f)&=\int_{\mathbb{C}P^1}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial f}{\partial \omega},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega\\
&=\int_{\mathbb{C}P^1}\left(\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial \omega},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial f}{\partial \omega},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar t}}\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right)\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega\\
&=\int_{\mathbb{C}P^1}\left(\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}}\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial f}{\partial \omega},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}}\frac{\partial f}{\partial \bar t}\right\rangle\right)\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega\\
&=\int_{\mathbb{C}P^1}\left(\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle+\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right)\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega\\
&=\int_{\mathbb{C}P^1}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial\omega}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right)\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega\\
&=-2\int_{\mathbb{C}P^1}\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega.
\end{aligned}$$

□

f是调和映射, 即f满足

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial\omega}=0. \tag{4.3}$$

等价于

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial\omega\partial\bar\omega}+\Gamma^i_{kj}\frac{\partial f^k}{\partial\bar\omega}\frac{\partial f^j}{\partial\omega}=0. \tag{4.4}$$

现在要对第二变分公式进行计算, 当且仅当$E'(f)=0$时, $E''(f)$才有意义

引理4.2 [14] 设$f:(\mathbb{C}P^1,\omega)\to(M,h)$是调和映射, 则有能量的第二变分公式

$$E''(f)|_{t=0}=2\int_{\mathbb{C}P^1}\left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\omega}}\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2-\left\langle\frac{\partial f}{\partial t},R\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial\bar\omega}\right)\frac{\partial f}{\partial\omega}\right\rangle\right)\sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega. \tag{4.5}$$

证明 由引理4.1得到

$$
\begin{aligned}
E''(f) &= -2\int_{\mathbb{C}P^1} \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}} \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle \sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega \\
&= -2\int_{\mathbb{C}P^1} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}} \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle \sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega \\
&= -2\int_{\mathbb{C}P^1} \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, R\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \bar\omega}\right)\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right) \sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega \\
&= -2\int_{\mathbb{C}P^1} \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, R\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \bar\omega}\right)\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial \omega}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar\omega}}\frac{\partial f}{\partial t}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right) \sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega \\
&= 2\int_{\mathbb{C}P^1} \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}}\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, R\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial \bar\omega}\right)\frac{\partial f}{\partial \omega}\right\rangle\right) \sqrt{-1}d\omega\wedge d\bar\omega.
\end{aligned}
$$

□

定义4.3 [15] 设(M,h)是一个维数$n\geq 2$的紧Kähler 流形, 对任意非零向量场$X,Y\in T^{1,0}M$, $X,Y >= 0$, 则

$$R(X,\bar X,Y,\bar Y)>0$$

称为Kähler 流形上正的正交双截面曲率.

定理4.4 设(M,h)是一个维数$n\geq 2$的紧Kähler 流形, 具有正的正交双截面曲率, 则任意能量最小化映射$f:(\mathbb{C}P^1,\omega)\to(M,h)$必须是全纯或者共轭全纯的.

证明 假设能量最小化映射f既不是全纯, 也不是共轭全纯的.

注意$\dim H^0(\mathbb{C}P^1,T\mathbb{C}P^1)=3$,可以取$\mathbb{C}P^1$的非零全纯向量$v\dfrac{\partial}{\partial\omega}$, 得到两个$M$上非0的（1, 0）型向量场

$$X=\left[f_*(v\frac{\partial}{\partial\omega})\right]^{(1,0)} = v\frac{\partial f^i}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial z^i},\ Y=\left[\overline{f_*(v\frac{\partial}{\partial\omega})}\right]^{(1,0)} = \bar v\frac{\partial f^i}{\partial\bar\omega}\frac{\partial}{\partial z^i}.$$

f是调和映射, 满足（4.4）, 则有

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar\omega}}X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar\omega}}\left(v\frac{\partial f^i}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = v\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar\omega}}\frac{\partial f^i}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial z^i} \\
&= v\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial\omega\partial\bar\omega}+\Gamma^i_{kj}\frac{\partial f^k}{\partial\bar\omega}\frac{\partial f^j}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial z^i}=0.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial\omega}}Y &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial\omega}}\left(\bar v\frac{\partial f^i}{\partial\bar\omega}\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \bar v\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\omega}}\frac{\partial f^i}{\partial\bar\omega}\right)\frac{\partial}{\partial z^i} \\
&= \bar v\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial\omega\partial\bar\omega}+\Gamma^i_{kj}\frac{\partial f^k}{\partial\bar\omega}\frac{\partial f^j}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial z^i}=0.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

由（4.6）、（4.7）有$\dfrac{\partial}{\partial\bar\omega}\langle X,Y\rangle = \left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar\omega}}X,Y\right\rangle+\left\langle X,\nabla_{\frac{\partial}{\partial\omega}}Y\right\rangle=0$. 这意味着$\langle X,Y\rangle$是$\mathbb{C}P^1$的全纯函数. 即$\langle X,Y\rangle$在$\mathbb{C}P^1$上有零点$\langle X,Y\rangle\equiv 0$. 也就是说, (1, 0)型向量场$X,Y$相互正交, 在$M$上只有有限

DOI: 10.12677/pm.2023.136177

个公共零点.

由（4.7）以及变分方向 $\left.\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = Y$, 可得

$$\left.\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}} \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right|_{t=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}} Y = 0. \tag{4.8}$$

从而根据第二变分公式（4.5）, 得到

$$\begin{aligned}
E''(f) &= 2\int_{\mathbb{C}P^1} \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \omega}} \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, R\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}}\right) \frac{\partial f}{\partial \omega} \right\rangle \right) \sqrt{-1} d\omega \wedge d\bar{\omega} \\
&= -2 \int_{\mathbb{C}P^1} \left\langle R\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial f}{\partial \omega}\right) \frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}}, \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} \right\rangle \sqrt{-1} d\omega \wedge d\bar{\omega} \\
&= -2 \int_{\mathbb{C}P^1} R_{i\bar{j}k\bar{l}} \left(f_{\bar{t}}^i \overline{f_{\bar{\omega}}^j} - f_{\omega}^i \overline{f_t^j} \right) \left(f_{\bar{\omega}}^k \overline{f_{\bar{t}}^l} - f_t^k \overline{f_{\omega}^l} \right) \sqrt{-1} d\omega \wedge d\bar{\omega} \\
&= -2 \int_{\mathbb{C}P^1} |v|^2 R_{i\bar{j}k\bar{l}} f_{\omega}^i \overline{f_{\bar{\omega}}^j} f_{\bar{\omega}}^k \overline{f_{\omega}^l} \sqrt{-1} d\omega \wedge d\bar{\omega} \\
&= -2 \int_{\mathbb{C}P^1} |v|^{-2} R(X, \bar{X}, Y, \bar{Y}) \sqrt{-1} d\omega \wedge d\bar{\omega}.
\end{aligned}$$

其中$|v|^{-2} R(X, \bar{X}, Y, \bar{Y})$在$v$的零点处处为0.

进而由定义4.3, 得

$$E''(f) = -2 \int_{\mathbb{C}P^1} |v|^{-2} R(X, \bar{X}, Y, \bar{Y}) \sqrt{-1} d\omega \wedge d\bar{\omega} < 0.$$

另一方面, 由于f是能量最小化映射, 得$E''(f) \geq 0$. 这给出了一个矛盾.

因此任意能量最小化映射$f : (\mathbb{C}P^1, \omega) \to (M, h)$必须是全纯或者共轭全纯的. □

注记 萧荫堂和丘成桐在文献 [5]应用这个定理证明了Frankel 猜想. 此外，冯惠涛、刘克峰和万学远在文献 [15]也利用这个定理进一步证明了广义的Frankel 猜想.

基金项目

课题部分受到国家自然科研基金项目(项目编号：20101A9)和广西自科基金项目(项目编号：2020437)的资助。

参考文献

[1] 李鸿军. 多复变数全纯映射的性质[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 河南大学, 2014.

[2] Jiang, Y.F. (2004) Realizability of Some Classes of Abstract Branch Data over Riemann Sphere. *Journal of the Graduate School of the Chinese Academy of Science*, **42**, 299-304.

[3] Lyons, D.W. (2003) An Elementary Introduction to the Hopf Fibration. *Mathematics Magazine*, **76**, 87-98. https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953158

[4] Kobayashi, S. and Ochiai, T. (1973) Characterizations of Complex Projective Spaces and Hyperquadrics. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **13**, 31-47. https://doi.org/10.1215/kjm/1250523432

[5] Siu, Y.T. and Yau, S.T. (1980) Compact Kähler Manifolds of Positive Bisectional Curvature. *Inventiones Mathematicae*, **59**, 189-204. https://doi.org/10.1007/BF01390043

[6] Mok, N. (1988) The Uniformization Theorem for Compact Kähler Manifolds of Nonnegative Holomorphic Bisectional Curvature. *Journal of Differential Geometry*, **27**, 179-214. https://doi.org/10.4310/jdg/1214441778

[7] 童昱博. 紧黎曼曲面的自同构[D]: [硕士学位论文]. 厦门: 厦门大学, 2019.

[8] Guerra, L. (2022) Note about Holomorphic Maps on a Compact Riemann Surface. arXiv preprint arXiv:2201.09289

[9] 杨刘. 到复射影空间的全纯映射及亚纯映射的正规性和值分布[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2016.

[10] 梅加强. 黎曼曲面讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 2013.

[11] 忻元龙. 调和映照[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.

[12] Frankel, T. (1961) Manifolds with Positive Curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, **11**, 165-174. https://doi.org/10.2140/pjm.1961.11.165

[13] 丘成桐, 孙理察. 忻元龙. 调和映照讲义: Lectures on Harmonic Maps [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[14] Moore, J.D. (2007) Second Variation of Energy for Minimal Surfaces in Riemannian Manifolds. *Matemática Contemporanea*, **33**, 215-243. https://doi.org/10.21711/231766362007/rmc3310

[15] Feng, H., Liu, K. and Wan, X. (2017) Compact Kähler Manifolds with Positive Orthogonal Bisectional Curvature. arXiv preprint arXiv:1710.10240