Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1792-1800
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136183

Hans汉斯

图的Domination染色

严旭东

青海师范大学数学与统计学院，青海 西宁

收稿日期：2023年5月21日；录用日期：2023年6月22日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

图 G 的一个 Domination 染色是使得图 G 的每个顶点 v 控制至少一个色类(可能是自身的色类)，并且每一个色类至少被 G 中一个顶点控制的一个正常染色。图 G 的 Domination 色数是图 G 的 Domination 染色所需最小的颜色数目，用 $\chi_{dd}(G)$ 表示。本文研究了图 G 的 Domination 色数与图 G 通过某种操作得到图 G' 的 Domination 色数之间的关系。

关键词

Domination 染色，Domination 色数，操作图

Domination Coloring of Graphs

Xudong Yan

College of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai

Received: May 21st, 2023; accepted: Jun. 22nd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

A domination coloring of a graph G is such that each vertex v of graph G dominates at least one color class (possibly it's own color class), and each color class is dominated by at least one vertex in G. The minimum number of colors among all domination colorings is called the domination chromatic number, denoted by $\chi_{dd}(G)$. In this paper, we study the domination coloring of the graph G and G', where G' obtained through some operation of G.

文章引用: 严旭东. 图的Domination染色[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1792-1800.
DOI: 10.12677/pm.2023.136183

Keywords

Domination Coloring, Domination Chromatic Number, Operations of Graph

1. 引言与预备知识

本文所研究的图均是简单、无向的连通图, 一些常用的专业术语和符号可以参考文献 [1,2]. 设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个 n 阶连通图, 对于 $V(G)$ 中任意顶点 v 的度用 $deg(v)$ 来表示, 是指图 G 中与顶点 v 相邻的顶点数目. 用 $N(v) = \{u|uv \in E(G)\}$ 表示顶点 v 的开邻域, 顶点 v 的闭邻域用 $N[v] = \{u|uv \in E(G)\} \cup \{v\}$ 来表示. 如果集合 S 中的全部顶点与 $V(G)$ 中的顶点 v 相邻, 则称顶点 v 控制了集合 S. 用 P_n 和 C_n 分别表示具有 n 个顶点的路和圈, 用 $mod(a,b)$ 表示 a 除以 b 所得的余数, 用 $[n]$ 表示不超过 n 的所有正整数集合, 即 $[n] = \{1, \ldots, n\}$. 若图 G 中删除顶点 v 后 G 的连通分支个数增多, 则称顶点 v 是图 G 的割点, 若 G 中删除边 e 后图 G 的连通分支个数增大, 则称边 e 是图 G 的割边.

图论中最重要、最活跃的分支之一是图的染色问题, 其中包含了许多非常著名的猜想, 比如满足一些特定条件下的猜想等. 稀缺资源分配的实际问题中就用到了图的染色理论 (例如: 学校排课表问题), 并且图的染色理论在图论和离散数学以及组合优化中起着非常关键的作用. 近几年年来, 随着数学模型实际应用的日益推广, 图染色问题的研究不再是仅仅对图的点染色和边染色, 其他的染色方式相继被提出, 比如图的 Dominator 染色, Dominated 染色, Domination 染色等. 从而使图的染色理论研究内容越来越丰富. 图的染色理论在实际生活中的应用是非常广泛的, 比如图的 Domination 染色在贮藏问题、调度问题、考试日程安排问题、课程与教室的安排问题和最短路径问题都起着非常重要的作用.

图 G 的一个正常染色对应于一个映射 $f : V(G) \to Z^+$, 使得任意两个相邻顶点 $u, v \in V(G)$ 均有 $f(u) \neq f(v)$. 图 G 的色数是图 G 正常染色所需要颜色的最小数目, 用 $\chi(G)$ 表示. 如果用 k 种颜色对 G 进行一个正常染色则是图 G 的一个 k- 正常染色, 用 $f = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ 表示. 事实上, 图 G 的 k- 正常染色可将图 G 的顶点集划分为 k 个颜色类 $V_1, V_2, \ldots, V_k$, 每个颜色类 $V_i = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$ $(i \in [k])$ 是一个独立集.

Gera 等人在文献 [3]中提出了图的 Dominator 染色的概念. 图 G 的 Dominator 染色是图 G 的每个顶点 v 至少控制一个色类 (可能是自身的色类) 的一个正常染色. 图 G 的 Dominator 色数是图 G 的 Dominator 染色所需颜色的最小数目, 用 $\chi_d(G)$ 表示.

Boumediene Merouane H 等人在文献 [4]中提出了图的 Dominated染色的概念. 图 G 的 Dominated 染色是指图 G 的每一个色类都至少被 G 中一个顶点控制的一个正常染色. 图 G 的

Dominated 色数是图 G 的 Dominated 染色所需颜色的最小数目, 用 $\chi_{dom}(G)$ 表示.

定义 1 [5]　图 G 的一个 Domination 染色是使得图 G 的每个顶点 v 控制至少一个色类(可能是自身的色类), 并且每一个色类至少被 G 中一个顶点控制的一个正常染色. 图 G 的 Domination 色数是指图 G 的所有 Domination 染色中所用颜色数目最小的所对应的颜色数目, 用 $\chi_{dd}(G)$ 表示.

Kavitha. K 等人在文献 [6]中研究了圈 C_n 的 Dominator 色数. Qin Chen, Chenye Zhao, Min Zhao 等人在文献 [7]研究了笛卡尔乘积图 $P_n \square P_m, P_n \square C_m, C_n \square C_m$ 的 Dominator 色数. Nazanin Movarraei 等人在文献 [8]研究了广义 Petersen 图的 Dominator 色数. Wayne Goddard, Michael A. Henning 等人在文献 [9]研究了具有小直径的平面图的 Dominator 色数. Saeid Alikhani 和 Mohammad R. Piri 等人在文献 [10]研究了多边形仙人掌图的 Dominated 色数. Klavzar S, Tavakoli M 等人在文献 [11]研究了皇冠图的 Dominated 色数. Zhou 等人在文献 [5]中研究了路、圈、团、完全 k-部图、星图以及轮图的 Domination 色数, 研究了$\chi_{dd}(H) = \chi(H)$ 的几种图结构, 并且得到了对于任意图的 Domination 染色是 NP-完全的. 在文献 [12]中Caiyun Wang 研究了图 G 与图 G' 的 Total-Domination 色数之间的关系, 这里的图 G' 是图 G 通过某种操作得到的图. 文献 [13]中杨雪等人计算出了 Mycielskian 图的全控制色数.

我们知道对于任意图的 Domination 染色是 NP-完全的, 所以本文探讨的是 $\chi_{dd}(G)$ 与 $\chi_{dd}(G')$ 之间的关系, 其中 G' 是图 G 通过某种操作(删除顶点或边以及收缩顶点或边)所得到的图.

2. 图 $G-e$ 和 $G-v$ 的 domination 色数

在本节中, 我们考虑图 $G-e$ 和 $G-v$ 的 domination 色数. 图 $G-v$ 是指从图 G 中删除顶点 v 与 v 相邻的边所得到的图. 图 $G-e$ 是从图 G 种删除边 e 得到的图. 在本节中得到图 $G-e$ 和 $G-v$ 的 domination 色数的界. 为了证明下面的定理, 我们先介绍以下一个引理.

引理 2.1 [5]　对于正整数n:

(1) 若$n \geq 2$, $\chi_{dd}(P_n) = 2 \cdot \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + mod(n,3)$;

(2) 若$n \geq 3$,

$$\chi_{dd}(C_n) = \begin{cases} 2, & n = 4; \\ 3, & n = 3, 5; \\ 2 \cdot \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + mod(n,3), & \text{否则}. \end{cases}$$

定理 2.2　设 G 是一个连通图, 并且边 $e = uv \in E(G)$ 不是割边, 则

$$\chi_{dd}(G) - 1 \leq \chi_{dd}(G-e) \leq \chi_{dd}(G) + 1.$$

证明 首先证明不等式的左边. 设 $f = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$ 是删除边之后得到图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 下面对图 G 进行染色.

情形1 $f(u) = f(v) = i(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$.

给顶点 u 或者 v 染一种新的颜色 $j(j \notin \{1, 2, \ldots, k\})$. 不失一般性, 假设 $f(u) = j$. 图 G 中剩余没有染色的顶点保持图 $G-e$ 的染色方式不改变, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 G 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G) - 1 \leq \chi_{dd}(G-e)$.

情形2 $f(u)=i, f(v)=j(i\neq j\in\{1,2,\ldots,k\})$.

图 G 中剩余没有染色的顶点保持图 $G-e$ 的染色方式不改变, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 G 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G)\leq\chi_{dd}(G-e)$.

综上所述, $\chi_{dd}(G)-1\leq\chi_{dd}(G-e)$.

接下来证明不等式的右边. 设 $f=(V_1,V_2,\cdots,V_k)$ 是图 G 的一个 Domination 染色, 且有 $f(u)=m, f(v)=n(m\neq n\in\{1,2,\ldots,k\})$. 接下来对图 $G-e$ 进行 Domination 染色. 可以以下三种情形进行讨论.

情形1 顶点 v 没有控制颜色类 V_m, 而且顶点 u 也没有控制颜色类 V_n.

图 $G-e$ 中的所有顶点的染色继续按照 G 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)$.

情形2 顶点 v 没有控制颜色类 V_m, 但是顶点 u 控制了颜色类 V_n.

若顶点 u 是一个染单色的顶点, 则图 $G-e$ 中的所有顶点继续按照 G 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)$. 如果顶点 u 不是一个单色顶点, 则分为以下两种情形进行讨论:

情形2.1 在图 $G-e$ 中, 存在顶点 u 的邻点染色 n, 则给一种新的颜色 $l(l\notin\{1,2,\ldots,k\})$ 给 u 的所有邻点染色, 并且图 $G-e$ 中剩余没有染色的顶点继续按照 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)+1$.

情形2.2 在图 $G-e$ 中, 顶点 u 的邻点没有染色 n, 则给一种新的颜色 $l(l\notin\{1,2,\ldots,k\})$ 给 u 的任意一个邻点染色, 并且图 $G-e$ 中剩余没有染色的顶点按照 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)+1$.

情形3 顶点 v 控制了颜色类 V_m, 顶点 u 也控制了颜色类 V_n.

如果顶点 u,v 都是染单色的顶点, 则图 $G-e$ 中的所有顶点保持 f 的染色方式不变, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)$. 如果顶点 u,v 中至少一个不是单色顶点, 则分为以下两种情形进行讨论:

情形3.1 顶点 u,v 其中一个不是单色顶点.

不妨设 u 是单色顶点, 在图 $G-e$ 中, 存在顶点 v 的邻点染色 m, 则给一种新的颜色 $l(l\notin\{1,2,\ldots,k\})$ 给 v 的任意一个邻点染色, 并且图 $G-e$ 中剩余没有染色的顶点按照 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)+1$.

情形3.2 顶点 u,v 都不是单色顶点.

在图 $G-e$ 中, 存在顶点 u 的邻点染色 n, 顶点 v 的邻点染色 m, 用一种新的颜色 p $(p\notin\{1,2,\ldots,k\})$ 给 u 或 v 任意一个顶点进行染色, 并且图 $G-e$ 中剩余没有染色的顶点按照 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-e$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)+1$.

综上所述, $\chi_{dd}(G-e)\leq\chi_{dd}(G)+1$. □

例 1 定理 2.2 中的下界是紧的, 给出一个紧的下界刻画. 当图 G 是完全图 K_3 时, $K_3-e\cong P_3$. 则 $\chi_{dd}(K_3)=3, \chi_{dd}(P_3)=2$. 其上界也是紧的, 紧的上界的刻画如图 1所示, $\chi_{dd}(G)=3, \chi_{dd}(G-$

$e) = 2$.

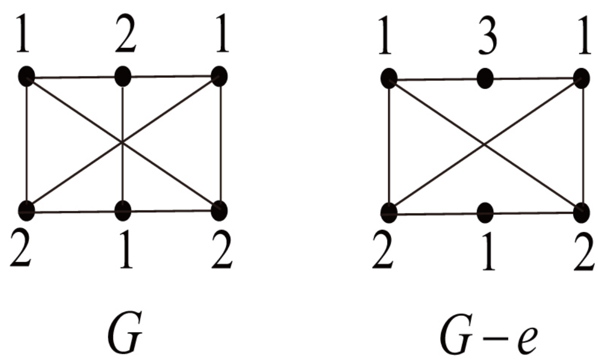

Figure 1. A domination coloring of graphs G and $G-e$

图 1. G 和 $G-e$ 的一个 domination 染色

定理 2.3 设 G 是一个 n ($n \geq 2$) 阶连通图, 并且顶点 $v \in V(G)$ 不是割点, 则

$$\chi_{dd}(G) - 1 \leq \chi_{dd}(G-v) \leq \chi_{dd}(G) + deg(v) - 1.$$

证明 首先证明不等式的左边. 设 $f = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$ 是图 $G-v$ 的一个 Domination 染色. 下面对图 G 进行染色.

给顶点 v 染一种新的颜色 $j(j \notin \{1, 2, \ldots, k\})$. 图 G 中剩余没有染色的顶点继续按照 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 G 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G) - 1 \leq \chi_{dd}(G-v)$.

接下来证明不等式的右边. 设 $f = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$ 是图 G 的一个 Domination 染色, 且有 $f(v) = m(m \in \{1, 2, \ldots, k\})$. 下面对图 $G-e$ 进行染色. 分以下两种情形进行讨论:

情形1 图 G 中不至顶点 v 染 m 色.

图 $G-v$ 中的所有顶点继续按照 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-v$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-v) \leq \chi_{dd}(G)$.

情形2 图 G 中只有顶点 v 染 m 色.

用顶点 v 的度种颜色 $c_n(n = 1, 2, \cdots, k, c_n \notin \{1, 2, \cdots, k\})$ 和颜色 i 对顶点 v 的开邻域中的顶点进行染色, 图 $G-v$ 中剩余没有染色的顶点的顶点继续按照图 $G-v$ 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G-v$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G-v) \leq \chi_{dd}(G) + deg(v) - 1$.

通过情形1和情形2可知, $\chi_{dd}(G-v) \leq \chi_{dd}(G) + deg(v) - 1$. □

例 2 定理 2.3 中的下界是紧的, 给出一个紧的下界刻画. 当图 G 是完全图 C_{10} 时, $C_{10} - v \cong P_9$. 则 $\chi_{dd}(C_{10}) = 7, \chi_{dd}(P_9) = 6$.

由定理2.2, 可以得到下面的推论:

推论 2.4 设 n ($n \geq 2$) 阶连通图 G , 满足顶点 $v \in V(G)$ 不是割点, 则$|\chi_{dd}(G) - \chi_{dd}(G-v)|$ 可以任意大.

证明 顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 用 $\chi_{dd}(P_n)$ 种颜色进行染色, 给顶点 v 的所有邻点一种新的颜色 $\chi_{dd}(P_n) + 1$, 给顶点 v 一种新的颜色 $\chi_{dd}(P_n) + 2$, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所

以此染色是图 G 的一个 Domination 染色. 此时删除图 G 中的顶点 v, 可以得到 $G-v=P_n\circ K_1$. 因为

$$\chi_{dd}(G)=2+\chi_{dd}(P_n)=\begin{cases}2\lceil\frac{n}{3}\rceil+1, & n\equiv 1(mod3);\\ 2\lceil\frac{n}{3}\rceil+2, & \text{否则}.\end{cases}$$

$$\chi_{dd}(P_n\circ K_1)=\begin{cases}\frac{2n}{3}+\chi_{dd}(P_n) & n\equiv 0\ (mod3),\\ \frac{2n+1}{3}+\chi_{dd}(P_n) & n\equiv 1\ (mod3),\\ \frac{2n-1}{3}+\chi_{dd}(P_n) & n\equiv 2\ (mod3).\end{cases}$$

如图 2所示是图 G 的 Domination 染色. 所以 $|\chi_{dd}(G)-\chi_{dd}(G-v)|$ 可以任意大. □

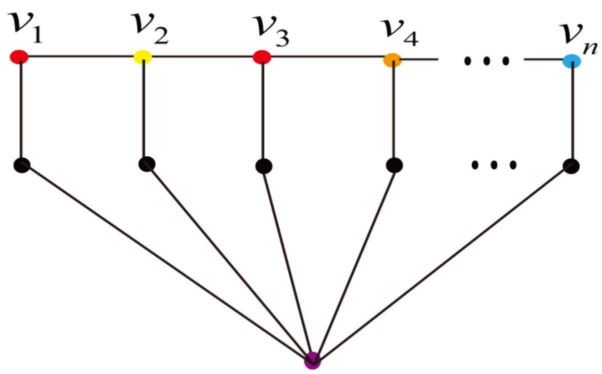

Figure 2. A domination coloring of graph G

图 2. G 的一个 domination 染色

下面研究对图 G 进行顶点和边的收缩后的图的 Domination 色数.

3. 图 $G\backslash v, G\backslash e$ 和 $G\bigodot v$ 的 domination 色数

设 $v\in V(G), e\in E(G), e=uv$, 图 $G\backslash v$ 是指从 G 中删除顶点 v, 并且将顶点 v 的所有邻点两两相连所形成的图. 图 $G\backslash e$ 是指从 G 中删除边 e 后加入一个新的顶点 x, 并且将顶点 x 与顶点 u 和 v 的所有邻点相连所形成的图. 图 $G\bigodot v$ 是指从 G 中删除顶点 v 的邻域中顶点之间的边所形成的图, 其顶点 v 并未从图 G 中删除. 首先考虑边收缩:

定理 3.1 设 G 是一个连通图, 并且 $e\in E(G)$, 则

$$\chi_{dd}(G)-2\le\chi_{dd}(G\backslash e)\le\chi_{dd}(G)+1.$$

首先证明 $\chi_{dd}(G\backslash e)\le\chi_{dd}(G)+1$. 设 $f=(V_1,V_2,\cdots,V_k)$ 是图 G 的一个 Domination 染色, 并且 $f(u)=i, f(v)=j(i,j\in\{1,2,\ldots,k\})$. 下面对图 $G\backslash e$ 进行染色. 分以下三种情形进行讨论:

情形1 若顶点 u 和 v 都是单色顶点.

给顶点 x 染颜色 i, 图 $G\backslash e$ 剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 f 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G\backslash e$ 的一

DOI: 10.12677/pm.2023.136183

个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G\backslash e) \leq \chi_{dd}(G) - 1$.

情形2 若顶点 u是单色顶点, 顶点 v 不是单色顶点, 并且顶点 v 控制色类 V_i.

给顶点 x 染颜色 i, 图 $G\backslash e$ 剩余没有染色的顶点的顶点保持 G 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色是图 $G\backslash e$ 的一个Domination 染色, 则$\chi_{dd}(G\backslash e) \leq \chi_{dd}(G)$.

情形3 若顶点 u 不是单色顶点, 顶点 v 也不是单色顶点, 并且顶点 u 控制了颜色类 V_j, 顶点 v 也控制了颜色类 V_i.

给顶点 x 染一种新的颜色 $m(m \notin 1, 2, \cdots, k)$, 图 $G\backslash e$ 剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 G 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色是图 $G\backslash e$ 的一个Domination 染色, 则$\chi_{dd}(G\backslash e) \leq \chi_{dd}(G) + 1$.

综上所述, 有$\chi_{dd}(G\backslash e) \leq \chi_{dd}(G) + 1$.

下面证明 $\chi_{dd}(G) - 2 \leq \chi_{dd}(G\backslash e)$. 设 $f = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$ 是图 $G\backslash e$ 的一个 Domination 染色. 下面对图 G 进行染色.

用两种新颜色 $m, n(m, n \notin 1, 2, \cdots, k)$ 对顶点 u 和 v 进行染色, 图 G 剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 $G\backslash e$ 上 f 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色是图 G 的一个Domination 染色, 则 $\chi_{dd}(G) - 2 \leq \chi_{dd}(G\backslash e)$. □

由定理 2.2 和 3.1 可以得到以下的推论:

推论 3.2 设图 G 是连通图, 并且 $e \in E(G)$ 不是割边, 则

$$\frac{\chi_{dd}(G-e) + \chi_{dd}(G\backslash e)}{2} - 1 \leq \chi_{dd}(G) \leq \frac{\chi_{dd}(G-e) + \chi_{dd}(G\backslash e) + 3}{2}.$$

接下来考虑顶点的收缩:

定理 3.3 设 G 是一个连通图, 并且 $v \in V(G)$, 则

$$\chi_{dd}(G) - 2 \leq \chi_{dd}(G\backslash v) \leq \chi_{dd}(G) + deg(v) - 1.$$

首先证明 $\chi_{dd}(G\backslash v) \leq \chi_{dd}(G) + deg(v) - 1$. 设 $f \to [k]$ 是图 G 的一个 Domination 染色, v 的其中一个邻点是 u. 下面对图 $G\backslash v$ 进行染色.

不改变顶点 u 的颜色, 用 $deg(v) - 1$ 种颜色 $c_j(j = 1, 2, \cdots, deg(v) - 1, c_j \notin \{1, 2, \cdots, k\})$ 给顶点 v 的开邻域种的顶点进行染色(不包含顶点 u), 图 $G\backslash v$ 剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 G 上 f 的染色方式进行染色, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G\backslash v$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G\backslash v) \leq \chi_{dd}(G) + deg(v) - 1$.

接下来证明 $\chi_{dd}(G) - 1 \leq \chi_{dd}(G\backslash v)$. 设 $f \to [k]$ 是图 $G\backslash v$ 的一个 Domination 染色. 下面对图 G 进行染色.

用两种新颜色 $m, n(m, n \notin \{1, 2, \cdots, k\})$ 给顶点 v 进行染色, 图 G 中剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 $G\backslash v$ 上 f 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色是图 G 的一个Domination 染色, 则 $\chi_{dd}(G) - 2 \leq \chi_{dd}(G\backslash v)$. □

例 3 定理 3.3 中的下界是紧的, 给出一个紧的下界刻画. 当图 G 是圈 C_5 时, $C_5\backslash v \cong C_4$, 则 $\chi_{dd}(C_5) = 4, \chi_{dd}(C_4) = 2$. 其上界也是紧的, 紧的上界的刻画, 图 G 是完全二部图 $K_{2,4}$ 时, $K_{2,4}\backslash v \cong K_5$, 则 $\chi_{dd}(K_5) = 5, \chi_{dd}(K_{2,4}) = 2$.

由定理 2.3 和定理 3.3 可以得到以下的推论:

DOI: 10.12677/pm.2023.136183

推论3.4 设连通图 G 的顶点 v 不是割点, 则

$$\frac{\chi_{dd}(G-v)+\chi_{dd}(G\backslash v)}{2}-deg(v)+1\leq\chi_{dd}(G)\leq\frac{\chi_{dd}(G-v)+\chi_{dd}(G\backslash v)}{2}+1.$$

定理3.5 设 G 是一个连通图, 并且 $v\in V(G)$, 则

$$\chi_{dd}(G)-deg(v)+1\leq\chi_{dd}(G\bigodot v)\leq\chi_{dd}(G)+1.$$

首先证明 $\chi_{dd}(G\bigodot v)\leq\chi_{dd}(G)+1$. 设 $f=(V_1,V_2,\cdots,V_k)$ 是图 G 的一个 Domination 染色, 并且$f(v)=i$. 下面对图 $G\bigodot v$ 进行染色. 可以分以下两种情形进行探讨:

情形1 若顶点 v 是单色顶点.

图 $G\bigodot v$ 的顶点的顶点继续按照 G 上 f 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G\bigodot v$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G\bigodot v)\leq\chi_{dd}(G)$.

情形2 若顶点顶点 v 不是单色顶点.

用一种新的颜色 $m(m\notin 1,2,\cdots,k)$ 给染颜色 i 的顶点进行染色, 除了顶点 v. 图 $G\bigodot v$ 剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 G 上 f 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G\bigodot v$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G\bigodot v)\leq\chi_{dd}(G)+1$.

接下来证明 $\chi_{dd}(G)-deg(v)+1\leq\chi_{dd}(G\bigodot v)$. 设 $f\to[k]$ 是图 $G\bigodot v$ 的一个 Domination 染色, v 的其中一个邻点是 u. 下面对图 G 进行染色.

不改变顶点 u 的颜色, 用 $deg(v)-1$ 种颜色 $c_j(j=1,2,\cdots,deg(v)-1,c_j\notin\{1,2,\cdots,k\})$ 对顶点 v 的开邻域中的顶点进行染色(不包括顶点 u), 图 $G\backslash v$ 剩余没有染色的顶点的顶点继续按照 G 上 f 的染色方式进行染色, 根据 Domination 染色的定义, 显然这种染色满足图的 Domination 染色定义, 所以此染色是图 $G\bigodot v$ 的一个 Domination 染色. 即 $\chi_{dd}(G)-deg(v)+1\leq\chi_{dd}(G\bigodot v)$. □

例 4 定理 3.5 中的下界是紧的, 给出一个紧的下界刻画. 当图 G 是完全图 K_n 时, $K_n\bigodot v\cong K_{1,n}$. 则 $\chi_{dd}(K_n)=n,\chi_{dd}(K_{1,n})=2$. 其上界也是紧的, 紧的上界的刻画如图 3所示, $\chi_{dd}(G)=4,\chi_{dd}(G\bigodot v)=5$.

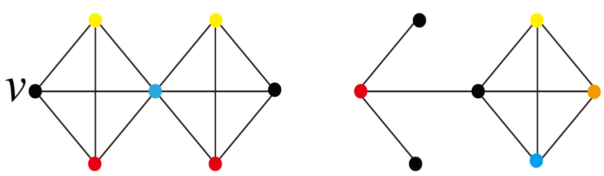

Figure 3. A domination coloring of graphs G and $G\bigodot v$

图 3. G 和 $G\bigodot v$ 的一个 domination 染色

推论3.6 设 G 是一个连通图, 并且顶点 $v\in V(G)$, 则$|\frac{\chi_{dd}(G)}{\chi_{dd}(G\bigodot v)}|$ 可以任意大.

4. 总结

本文在 Domination 染色的定义与 Ghanbari N 介绍的一些图操作的基础上, 研究了图 $G-e$ $G-v$, $G\backslash v, G\backslash e$ 和 $G\bigodot v$ 的 domination 色数与图 G 的 domination 色数之间的关系, 并且刻画了几个紧的界所满足的图.

参考文献

[1] Bondy, B.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

[2] Haynes, T.W., Hedetniemt, S.T. and Slater, P.J. (1998) Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker, New York.

[3] Gera, R., Rasmussen, C. and Horton, S. (2006) Dominator Colorings and Safe Clique Partitions. *Congres Numerantium*, **181**, 19-32.

[4] Boumediene Merouane, H., Haddad, M., Chellali, M. and Kheddouci, H. (1995) On the Dominator Coloring in Trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **32**, 677-683. https://doi.org/10.7151/dmgt.1635

[5] Zhou, Y. and Zhao, D. (2022) On Domination Coloring in Graphs. *Mathematics*, **10**, Article 998. https://doi.org/10.3390/math10060998

[6] Kavitha, K. and David, N.G. (2012) Dominator Coloring on Star and Double Star Graph Families. *International Journal of Computer Applications*, **48**, 22-25. https://doi.org/10.5120/7328-0185

[7] Chen, Q., Zhao, C. and Zhao, M. (2017) Dominator Coloring of Cartesian Products of Paths and Cycles. *Graphs and Combinatorics*, **33**, 73-83. https://doi.org/10.1007/s00373-016-1742-7

[8] Malaguti, E. and Toth, P. (2010) A Survey on Vertex Coloring Problems. *International Transactions in Operational Research*, **17**, 1-34. https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2009.00696.x

[9] Goddard, W. and Henning, M.A. (2022) Domination and Dominator Coloring in Planar Graphs with Small Diameter. *Discrete Applied Mathematics*, **313**, 80-92. https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.02.003

[10] Alikhani, S. and Piri, M.R. (2019) On the Dominated Chromatic Number of Certain Graphs. arXiv: 1910.02685

[11] Klavžar, S. and Tavakoli, M. (2021) Dominated and Dominator Colorings over (Edge) Corona and Hierarchical Products. *Applied Mathematics and Computation*, **390**, Article 125647. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125647

[12] 王彩云. 图的全-Domination染色[J]. 安徽师范大学学报, 2022, 45(1): 23-28.

[13] 杨雪, 边红, 于海征, 魏丽娜. Mycielskian图的全控制着色数[J]. 理论数学, 2021, 11(11): 1911-1917. https://doi.org/10.12677/PM.2021.1111213