Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1859-1866
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136189

涉及$f'^k - a^k(z)f^{k^2} \neq b(z)$的正规性探讨

鲁凤年*，**杨锦华**†

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年5月22日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

本文对涉及例外函数的正规定则进行了讨论，利用$P-Z$ 引理和构造函数的方法，针对满足条件$f'^k - a^k(z)f^{k^2} \neq b(z)$的一类亚纯函数族的正规性展开研究，我们得到$a(z)(\not\equiv 0), b(z)$ 为区域D内的两个全纯函数。当$a(z)=0$ 时，$f(z)\neq\infty$ 且$k\geq 4$时,则$\mathcal{F}$在D内正规。

关键词

亚纯函数，正规定则，例外函数

Discussion of Normality Involving $f'^k - a^k(z)f^{k^2} \neq b(z)$

Fengnian Lu*, **Jinhua Yang**†

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 22^{nd}, 2023; accepted: Jun. 23^{rd}, 2023; published: Jun. 30^{th}, 2023

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 鲁凤年, 杨锦华. 涉及$f'^k - a^k(z)f^{k^2} \neq b(z)$的正规性探讨[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1859-1866.
DOI: 10.12677/pm.2023.136189

Abstract

In this paper, the normal rules involving omitted functions are discussed, and the method of $P-Z$ lemma and constructor is used to study the normality of a class of meromorphic function family satisfying the condition $(f'(z))^k - a^k(z)f^{k^2}(z) \neq b(z)$. We get that $a(z)(\not\equiv 0), b(z)$ are two holomorphic functios on D, and whenever $a(z) = 0$, $f(z) \neq \infty$ and $k \geq 4$, the family of functions is normal.

Keywords

Meromorphic Function, Normal Criterion, Omitted Function

1. 引言

杨锦华,杨祺和庞学诚在文献 [1]中,将满足条件 $f' - af^k \neq b$ 中的例外值推广至函数, 得到如下结果:

定理 A 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $a(z)(\not\equiv\ 0)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内两个全纯函数. 当 $a(z) = 0$ 时, $f(z) \neq \infty$ 且 $k \geq 4$ 时,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f,

$$f'(z) - a(z)f^k(z) \neq b(z),$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

陈和杨在文献 [2],中证明了以下结果:

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $h(z)$ 为区域D 内不恒为0的全纯函数,k, q 为正整数,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f, $f(z) \neq 0$ 且$(f^{(k)}(z))^q \neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

陈鸿辉,蔡金华,袁文俊 在文献 [3]中证明了以下结果:

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$h(z)$ 为区域D 内不恒为0的全纯函数,k, q 为正整数,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f,$f(z) \neq 0$ 且$(f^{(k)}(z))^q - h(z)^q$ 至多有$q(k+1) - 1$ 个不同零点(不计重

数),则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

杨乐在文献 [4]中证明了以下结果:

定理 D 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$h(z)$ 为区域D 内不恒为0的全纯函数,k 为正整数,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f,$f(z) \neq 0$ 且$f^{(k)}(z) \neq h(z)$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

邓炳茂在文献 [5]中证明了以下结果:

定理 E 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$h(z)$ 为区域D 内不恒为0的全纯函数,k 为正整数,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f,$f(z) \neq 0$ 且$f^{(k)}(z) - h(z)$至多有k个不同零点(不计重数), 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

受到上述文献的启发,我们研究了关于满足条件 $(f'(z))^k - a^k(z)f^{k^2}(z) \neq b(z)$ 的这一类函数族的正规性且我们知道$k = 1$ 时函数族是不正规的,对$k = 2, 3$ 时函数族是不正规的,当$k = 2, 3$时只能举出例外值的例子,无法举出例外函数的例子,但是我们得到了$k \geq 4$ 时的一个特殊的正规定则:

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$a(z)(\not\equiv 0)$, $b(z)$为区域 D 内的两个全纯函数. 当 $a(z) = 0$ 时, $f(z) \neq \infty$ 且 $k \geq 4$ 时,对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f,

$$(f'(z))^k - a^k(z)f^{k^2}(z) \neq b(z)$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

2. 引理

为了证明本文的结果, 我们需要下列引理.

引理 1.1 [4] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $-1 < \alpha < 1$. 若 $\mathcal{F}$ 在 D 内一点 z_0 不正规, 则存在

(1) 点列 $z_n \in D$, $z_n \to z_0$;

(2) $\mathcal{F}$ 中函数列 f_n;

(3) 正数序列 $\rho_n \to 0^+$;

使得函数列 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$, 且满足 $g^{(\sharp)}(\zeta) \leq g^{(\sharp)}(0) = 1$.

引理 1.2 [5] 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, 对于每一个 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重数至少为 k, 存在一个数 $A \geq 1$, 使得当 $f \in \mathcal{F}$ 且 $f(z) = 0$ 时, $|f^{(k)}(z)| \leq A$. 若 $\mathcal{F}$ 在 D 内一点 z_0 不正规, 则对 $0 \leq \alpha \leq k$, 存在

(1) 点列 $z_n \in D$, $z_n \to z_0$;

(2) $\mathcal{F}$ 中函数列 f_n;

(3) 正数序列 $\rho_n \to 0^+$;

使得函数列 $g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函

数 $g(\zeta)$, 其零点重数至少为 k,且满足 $g^{(\sharp)}(\zeta) \leq g^{(\sharp)}(0) = kA + 1$.

引理 1.3 [6] 设 f 是一个超越亚纯函数, R 是一个不恒为 0 的有理函数. 若 f 的零点和极点除有限个外均为重级, 则 $f' - R$ 有无限多个零点.

引理 1.4 [7] 设 Q 是一个非常数有理函数, m, k 是正整数. 若 Q 的零点重级至少是 $\geq k+2$, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z) = 1$ 有解.

引理 1.5 [8] 设 Q 是一个非常数有理函数, m, k 是正整数. 若 Q 的零点重级均 $\geq k+2$, 且它的极点的重级除 $z = 0$ 外均 ≥ 2, 对于任意的正整数 m, 在复平面 $\mathbb{C}$ 上 $Q^{(k)}(z) = z^m$ 有解.

引理 1.6 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $k \geq 3, a(z)(\neq 0)$ 和 $b(z)$ 为区域 D 内两个全纯函数. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数 f,

$$(f'(z))^k - a^k(z) f^{k^2}(z) \neq b(z),$$

则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

证明 不失一般性，假设 $\mathcal{F}$ 在单位圆 Δ 内一点 z_0 处不正规, $a(z_0) \neq 0$. 由引理 1.1 知,存在 $f_n \in \mathcal{F}, z_n \to z_0, \rho_n \to 0^+$, 使得

$$g_n(\zeta) = \rho_n^{\frac{1}{k-1}} f_n(z_n + \rho_n \zeta)$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$. 并且有在 Δ 去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内有

$$(g_n'(\zeta))^k - a^k(z_n + \rho_n \zeta) g_n^{k^2}(\zeta) \rightrightarrows (g'(\zeta))^k - a^k(z_0) g^{k^2}(\zeta) \tag{1}$$

成立

由于

$$\begin{aligned}(g_n'(\zeta))^k - a^k(z_n + \rho_n \zeta) g_n^{k^2}(\zeta) &= \rho_n^{\frac{k^2}{k-1}} \left[f_n'(z_n + \rho_n \zeta) - a(z_n + \rho_n \zeta) f_n^k(z_n + \rho_n \zeta) \right] \\ &\neq \rho_n^{\frac{k^2}{k-1}} b(z_n + \rho_n \zeta),\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n^{\frac{k^2}{k-1}} b(z_n + \rho_n \zeta) = 0,$$

且 $(g_n'(\zeta))^k - a(z_n + \rho_n \zeta) g_n^{k^2}(\zeta)$ 在 Δ 去掉 $g(\zeta)$ 的极点的区域内内闭一致收敛于 $(g'(\zeta))^k - a(z_0) g^{k^2}(\zeta)$. 根据(1)和 Hurwitz 定理知, $(g'(\zeta))^k - a^k(z_0) g^{k^2}(\zeta) \equiv 0$ 或 $(g'(\zeta))^k - a^k(z_0) g^{k^2}(\zeta) \neq 0$.

若 $(g'(\zeta))^k - a^k(z_0) g^{k^2}(\zeta) \equiv 0$ 则

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sqrt[k-1]{(1-k)(a(z_0)\zeta + c)}},$$

其中 c 为常数. 因为 $k \geq 3, a(z_0) \neq 0$, 所以与 $g(\zeta)$ 是亚纯函数矛盾.

DOI: 10.12677/pm.2023.136189

若$(g'(\zeta))^k - a^k(z_0)g^{k^2}(\zeta) \neq 0$则
$$\frac{g'(\zeta)}{g^k(\zeta)} \neq a(z_0).$$

这是因为：对$\zeta_0 \in \mathbb{C}$,

(1)当$g(\zeta_0) \neq 0, \infty$时, $\frac{g'(\zeta_0)}{g^k(\zeta_0)} \neq a(z_0)$成立.

(2)当$g(\zeta_0) = 0$时, 此时$g'(\zeta_0) \neq 0$, 从而ζ_0是$\frac{g'(\zeta)}{g^k(\zeta)}$的极点, 故$\frac{g'(\zeta_0)}{g^k(\zeta_0)} \neq a(z_0)$.

(3)当$g(\zeta_0) = \infty$时, 此时ζ_0是$\frac{g'(\zeta)}{g^k(\zeta)}$的至少1 重零点, 故$\frac{g'(\zeta_0)}{g^k(\zeta_0)} \neq a(z_0)$.

令$G(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta)}$, 有
$$G^{k-2}(\zeta)G'(\zeta) \neq -a(z_0).$$

由于$k \geq 3$, 得$G(\zeta)$是一常数, 故$g(\zeta)$也是常数, 这与$g(\zeta)$是非常数的亚纯函数矛盾. 综上, $\mathcal{F}$在z_0处正规, 从而$\mathcal{F}$在单位圆Δ内正规.

注引理2.1 与引理2.2中$\alpha = 0$的情形是由以色列数学家$zalcmna$ 证明的,庞学诚证明了$-1 < \alpha < 1$的情形,这两种情形对零点不做任何要求.陈怀惠,顾永兴在零点重级$\geq k$的情况下,证明了$-1 < \alpha < k$的情形,这里我们指出$A \geq 1$不是本质的,仅是为了叙述上的方便.

3. 定理的证明

证明 由引理1.6, 我们只需证明$\mathcal{F}$在0处正规就可以了. 不妨设$D = \Delta$, 并且其中$m \geq 1, \varphi(0) = 1$, 且在$0 < |z| < 1$内$a(z) \neq 0$. 由于$(f'(z))^k) - a^k(z)f^{k^2}(z) \neq b(z)$且$a(0) = 0$时, $f(0) \neq \infty$, 得
$$\frac{(f'(z))^k}{a^k(z)f^{k^2}(z)} - \frac{b(z)}{a^k(z)f^{k^2}(z)} \neq 1.$$

这是因为, 对于$z_0 \in \Delta$,

(1)当$a(z_0) \neq 0$且$f(z_0) \neq 0, \infty$时, $\frac{(f'(z_0))^k}{a^k(z_0)f^{k^2}(z_0)} - \frac{b(z_0)}{a^k(z_0)f^{k^2}(z_0)} \neq 1$成立.

(2)当$a(z_0) = 0$或$f(z_0) = 0$时, 此时$a^k(z_0)f^{k^2}(z_0) = 0$, 但是$(f'(z_0))^k(z_0) \neq b(z_0)$, 从而$z_0$是函数$\frac{(f'(z))^k}{a^k(z)f^{k^2}(z)} - \frac{b(z)}{a^k(z)f^{k^2}(z)}$的极点, 故$\frac{(f'(z_0))^k}{a^k(z_0)f^{k^2}(z_0)} - \frac{b(z_0)}{a^k(z_0)f^{k^2}(z_0)} \neq 1$成立.

(3)当$a(z_0) \neq 0, f(z_0) = \infty$时, 此时$z_0$是$\frac{(f'(z))^k}{a^k(z)f^{k^2}(z)}$的至少8重零点, 从而$\frac{(f'(z_0))^k}{a^k(z_0)f^{k^2}(z_0)} - \frac{b(z_0)}{a^k(z_0)f^{k^2}(z_0)} \neq 1$成立.

令
$$\mathcal{F}_1 = \left\{ g_n | g_n(z) = \frac{1}{a(z)f_n^{k-1}(z)}, f \in \mathcal{F} \right\},$$

则g_n的零点至少是$k-1$重, 0是g_n的至少m重极点, 其余极点至少是$k-1$重.

假设$\mathcal{F}_1$在$z = 0$处不正规. 由引理1.2知, 存在$g_n \in \mathcal{F}_1, z_n \to 0, \rho_n \to 0^+$, 使得
$$G_n(\zeta) = \frac{g_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.136189

在复平面$\mathbb{C}$上按球距内闭一致收敛到一个非常数的亚纯函数$G(\zeta)$. G_n的零点至少是$k-1$重, 0是G_n的至少m重极点, 其余极点至少是$k-1$重. 以下分两种情况讨论：

情形1. 情形1. $\frac{z_n}{\rho_n}\to\infty$. 则$G(\zeta)$的极点至少为$k-1$重. 我们断言:在$\{\mathbb{C}\setminus G$ 的极点$\}$内

$$(1-k)^k\left[\frac{(f_n'(z_n+\rho_n\zeta))^k}{a^k(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(z_n+\rho_n\zeta)}-\frac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{a^k(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(z_n+\rho_n\zeta)}\right]\rightrightarrows(G'(\zeta))^k$$

事实上

$$\begin{aligned}G_n'(\zeta)&=\left[\frac{1}{\rho_n a(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n+\rho_n\zeta)}\right]'\\&=(1-k)\frac{f_n'(z_n+\rho_n\zeta)}{a(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k}(z_n+\rho_n\zeta)}-\frac{a'(z_n+\rho_n\zeta)}{a^2(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n+\rho_n\zeta)}\end{aligned}$$

记

$$I_1=\frac{a'(z_n+\rho_n\zeta)}{a^2(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k-1}(z_n+\rho_n\zeta)},I_2=(1-k)^k\frac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{a^k(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(z_n+\rho_n\zeta)}$$

注意到：

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{m(z_n+\rho_n\zeta)^{m-1}\varphi(z_n+\rho_n\zeta)+(z_n+\rho_n\zeta)^m\varphi'(z_n+\rho_n\zeta)}{(z_n+\rho_n\zeta)^m\varphi(z_n+\rho_n\zeta)}G_n(\zeta)\rho_n\\&=\frac{m\rho_n}{z_n+\rho_n\zeta}G_n(\zeta)+\frac{\rho_n\varphi'(z_n+\rho_n\zeta)}{\varphi(z_n+\rho_n\zeta)}G_n(\zeta)\rightrightarrows 0.\end{aligned}$$

$$I_2^{k-1}=a^k(z_n+\rho_n\zeta)[(1-k)^k b(z_n+\rho_n\zeta)]^{k-1}[\rho_n G_n(\zeta)]^{k^2}\rightrightarrows 0.$$

则当n充分大时

$$(1-k)^k\left[\frac{(f_n'(z_n+\rho_n\zeta))^k}{a^k(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(z_n+\rho_n\zeta)}-\frac{b(z_n+\rho_n\zeta)}{a^k(z_n+\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(z_n+\rho_n\zeta)}\right]\rightrightarrows(G'(\zeta))^k$$

由条件$\frac{(f'(z))^k}{a^k(z)f^{k^2}(z)}-\frac{b(z)}{a^k(z)f^{k^2}(z)}\neq 1$. 由Hurwitz定理有$G'(\zeta)\equiv(1-k)^k$或$G'(\zeta)\neq(1-k)^k$.

若$G'(\zeta)\equiv(1-k)^k$, 则$G(\zeta)$是一个一次多项式, 而这与$G(\zeta)$的零点重级至少是$k-1$矛盾.

若$G'(\zeta)\neq(1-k)^k$, 则由引理1.2知$G(\zeta)$是一个有理函数,这与引理1.4矛盾

情形2. $\frac{z_n}{\rho_n}\to\alpha\neq\infty$. 则

$$\frac{g_n(\rho_n\zeta)}{\rho_n}=\frac{g_n(z_n+\rho_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n}=G_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n})$$

$$\Phi_n(\zeta)=\frac{1}{\rho_n^{1+m}f_n^{k-1}(\rho_n\zeta)}=\zeta^m\varphi(\rho_n\zeta)\frac{g_n(z_n+\rho_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n},$$

有

$$\Phi_n(\zeta) \rightrightarrows \zeta^m G(\zeta-\alpha)=\Phi(\zeta)$$

在复平面的任意紧子集上按照球面距离一致成立. 因为 $G(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 处有至少 m 重极点, 因此 $\Phi(0)\neq 0$.

$$\Phi_n'(\zeta)=\left[\frac{f_n^{1-k}(\rho_n\zeta)}{\rho_n^{1+m}}\right]'=(1-k)\frac{f_n'(\rho_n\zeta)}{\rho_n^m f_n^k(\rho_n\zeta)}$$

从而

$$\begin{aligned}(\Phi_n'(\zeta))^k&=(1-k)^k\frac{(f_n'(\rho_n\zeta))^k}{\rho_n^{mk}f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}\\&=(1-k)^k\zeta^{mk}\varphi^k(\rho_n\zeta)\frac{(f_n'(\rho_n\zeta))^k}{\rho_n^{mk}f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}\\&=(1-k)^k\zeta^{mk}\varphi^k(\rho_n\zeta)\left[\frac{(f_n'(\rho_n\zeta))^k}{a^k(\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}-\frac{b(\rho_n\zeta)}{a^k(\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}\right]\\&+(1-k)^k\zeta^m\varphi^k(\rho_n\zeta)\frac{b(\rho_n\zeta)}{a^k(\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}\end{aligned}$$

记

$$I_1=(1-k)^k\zeta^{mk}\varphi^k(\rho_n\zeta)\frac{b(\rho_n\zeta)}{a^k(\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}$$

其中

$$\begin{aligned}I^{k-1}&=\left[(1-k)^k\zeta^{mk}\varphi^k(\rho_n\zeta)\frac{b(\rho_n\zeta)}{a^k(\rho_n\zeta)f_n^{k^2}(\rho_n\zeta)}\right]^{k-1}\\&=a^k(\rho_n\zeta)[(1-k)^k\zeta^{mk}\varphi^k(\rho_n\zeta)b(\rho_n\zeta)]^{k-1}[\rho_n G_n(\zeta-\frac{z_n}{\rho_n})]^{k^2}\rightrightarrows 0.\end{aligned}$$

由条件, $\frac{(f'(z))^k}{a^k(z)f^{k^2}(z)}-\frac{b(z)}{a^k(z)f^{k^2}(z)}\neq 1$. 则由 Hurwitz 定理可得 $(\Phi')^k(\zeta)\equiv(1-k)^k\zeta^{mk}$ 或 $(\Phi')^k(\zeta)\neq(1-k)^k\zeta^{mk}$.

若 $(\Phi')^k(\zeta)\equiv(1-k)^k\zeta^{mk}$. 令 $\Phi(\zeta_0)=0$, 则 ζ_0 是 $\Phi(\zeta)$ 的至少 $k-1$ 重零点, 故 $\Phi'(\zeta_0)=0=(1-k)\zeta_0^m$, 从而 $\zeta_0=0$, 而这与 $\Phi(0)\neq 0$. 矛盾.

若 $(\Phi')^k(\zeta)\neq(1-k)^k\zeta^{mk}$. 由引理 1.3 知, $\Phi(\zeta)$ 是一个有理函数, 但这又与引理 1.5 矛盾.

因此, $\mathcal{F}_1$ 在 0 处正规, 从而 $\mathcal{F}_1$ 在 Δ 内正规.

下面我们将证明 $\mathcal{F}$ 在 0 处正规.

根据 $\mathcal{F}_1$ 在 0 处正规且 $g_n(0)=\infty$, 存在 $\delta>0$ 使得 Δ_δ 内 $|g_n(z)|\geq 1$; 又因为 $f_n(0)\neq\infty$, 因此 Δ_δ 内 $f_n(z)\neq\infty$, 于是 f_n 在 Δ_δ 内全纯. 选取 δ 足够小, 使得当 n 足够大时 $|z|\leq\delta$ 内 $|a(z)|\geq\frac{|z|^m}{2}$. 我们有

$$|f_n(z)|=\left|\frac{1}{a(z)g_n(z)}\right|^{\frac{1}{k-1}}\leq\left(\frac{2^{m+1}}{\delta^m}\right)^{\frac{1}{k-1}},|z|=\frac{\delta}{2}$$

由最大模原理和 $Marty$ 正规定则知, 存在 $\mathcal{F}$ 的子列在 Δ_δ 内正规, 即 $\mathcal{F}$ 在0 处正规.

因此我们证明了$k\geq 4$这样一个特殊情形,$k=2,3$时函数族是不正规的, 但是我们无法举出范例

说明例外函数是全纯函数时,函数族是不正规的. 接下来我们将要沿着这个思路来举出范例或者运用新的方法来证明说明$k=2,3$时函数族是不正规的.

参考文献

[1] Yang, J.H., Yang, Q. and Pang, X.C. (2019) Normal Criterion of Meromorphic Functions. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **35**, 1972-1978. https://doi.org/10.1007/s10114-019-9058-1

[2] 陈鹏斌, 杨祺. 涉及不取零点的亚纯函数族的正规性[J]. 龙岩学院学报, 2023, 41(2): 13-16.

[3] 陈鸿辉, 蔡金华, 袁文俊. 涉及零点与多项式的无零点亚纯函数族的正规性[J]. 西南师范大学学报, 2018, 43(8): 10-17.

[4] Yang, L. (1986) Normality for Families of Meromorphic Functions. *Scientia Sinica*, **9**, 898-908.

[5] Deng, B.M., Fang, M.L. and Liu, D. (2011) Normal Families of Zero-Free Meromorphic Functions. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **91**, 313-322. https://doi.org/10.1017/S1446788711001571

[6] 庞学诚. 微分多项式的正规定则[J]. 科学通报, 1988, 33(22): 1690-1693.

[7] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normality Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **32**, 325-331. https://doi.org/10.1112/S002460939900644X

[8] Pang, X.C., Nevo, S. and Zalcman, L. (2008) Derivatives of Meromorphic Functions with Multiple Zeros and Rational Functions. *Computational Methods and Function Theory*, **8**, 483-491. https://doi.org/10.1007/BF03321700