Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2388-2395
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138247

紧致黎曼流形中的梯度Ricci-Yamabe孤立子

马彦芳

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年7月7日；录用日期：2023年8月8日；发布日期：2023年8月15日

摘 要

本文介绍了紧致黎曼流形M中具有势函数f的梯度Ricci-Yamabe孤立子$(M^n, g, V, \lambda, \alpha, \beta)$的相关结果，其中，$g$为黎曼流形$M$上的黎曼度量，$V$是黎曼流形上的向量场，$\lambda \in \mathbf{R}$为黎曼流形$M$的孤立子常数，$\alpha, \beta$为常数。首先得出紧致黎曼流形中具有共形向量场$\nabla f$ 的梯度Ricci-Yamabe孤立子的等距问题和平凡性结果，其次证明了梯度Ricci-Yamabe孤立子是稳定的或收缩的孤立子的条件，最后讨论不同分类下数量曲率的情况。

关键词

紧致黎曼流形，梯度Ricci-Yamabe孤立子，等距，数量曲率，共形向量场

Gradient Ricci-Yamabe Soliton on a Compact Riemannian Manifold

Yanfang Ma

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 7^{th}, 2023; accepted: Aug. 8^{th}, 2023; published: Aug. 15^{th}, 2023

文章引用: 马彦芳. 紧致黎曼流形中的梯度Ricci-Yamabe孤立子[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2388-2395.
DOI: 10.12677/pm.2023.138247

Abstract

This work aims to provide some results of gradient Ricci-Yamabe soliton with potential f on a compact Riemmian manifold. g is Riemmian metric, V is vector field and α, β, λ is constant on M. Firstly, the isometric notes and triviality results of Ricci-Yamabe soliton with conformal vector field on the compact Riemmian manifold are obtained. Then, I got the conditions that gradient Ricci-Yamabe soliton is steady or shrinking. Finally, scalar curvature under different classifications is discussed.

Keywords

Compact Riemmian Manifold, Gradient Ricci-Yamabe, Isometric, Scalar Curvature, Conformal Vector Field

1. 引言及主要结果

若黎曼流形(M^n, g),$(n > 2)$上存在光滑向量场V满足方程

$$2\alpha Ric + \ell_V g = (2\lambda - \beta R)g, \tag{1}$$

则称黎曼流形(M^n, g),$(n > 2)$为Ricci-Yamabe孤立子,记为$(M^n, g, V, \lambda, \alpha, \beta)$,其中,$Ric$为黎曼流形$(M^n, g)$的Ricci曲率,$R$为黎曼流形$(M^n, g)$的数量曲率.$\ell_V g$表示度量$g$沿向量场$V$方向的$Lie$导数,$V$是流形上的向量场,$\lambda \in$R为黎曼流形$(M^n, g)$,$(n > 2)$的孤立子常数,$\alpha, \beta$为常数.Ricci-Yamabe孤立子是Ricci-Yamabe流的自相似解 [1].当λ为M上的光滑函数时,称(M^n, g),$(n > 2)$为Ricci-Yamabe近孤立子,当$\lambda > 0$($\lambda = 0, \lambda < 0$)时,称Ricci-Yamabe孤立子为收缩的(稳定的,扩张的),同理可得收缩的(稳定的,扩张的)Ricci-Yamabe近孤立子.

特别的,当$\alpha = 1, \beta = 0$时,称其为Ricci孤立子.

当$\alpha = 0, \beta = 1$时,称其为Yamabe孤立子.

当$\alpha = 1, \beta = -2\rho$时,称其为Ricci-Bourguignon孤立子.(ρ为M上的光滑函数)

类似的,当λ为M上的光滑函数时,分别为近Ricci孤立子,近Yamabe孤立子,近Ricci-Bourguignon孤

立子.

若向量场V是黎曼流形M^n上一些光滑函数f的梯度,则称Ricci-Yamabe孤立子(M^n,g)为梯度Ricci-Yamabe孤立子,记为$(M^n,g,f,\lambda,\alpha,\beta)$.在这种情况下,(1)式写为

$$2\alpha Ric+2\nabla\nabla f=(2\lambda-\beta R)g, \tag{2}$$

其中$\nabla\nabla f$表示势函数f的Hessian算子.当势函数f为常数时,我们称梯度Ricci-Yamabe孤立子为平凡的,否则称为是非平凡的.

Ricci-Yamabe孤立子的介绍最初是在2019年, Güler和Crasmareanu在文献 [1]中提到,Ricci-Yamabe孤立子是Ricci孤立子和Yamabe孤立子的数量组合. 因此许多研究Ricci孤立子和Yamabe孤立子的文章 [2] [3] [4]在Ricci-Yamabe孤立子的研究过程中发挥了巨大的作用.近些年,许多文章中介绍了关于Ricci-Yamabe孤立子的相关内容,文献 [5]介绍了卷积流形上的Ricci-Yamabe孤立子.文献 [6] [7]研究了不同空间形中的Ricci-Yamabe孤立子.文献 [8]介绍了近Ricci-Yamabe孤立子的等距问题.文献 [9]研究了三维黎曼流形中的Ricci-Yamabe孤立子.因此,对紧致黎曼流形中的梯度Ricci-Yamabe孤立子等距问题和数量曲率的研究是有意义的.

孤立子的相关内容是几何学家研究的热门话题,例如Ricci孤立子,Yamabe孤立子和Ricci-Bourguignon孤立子等,相关文章更是层出不穷.而等距问题和数量曲率的研究则是孤立子研究的重要问题. Antonio等人 [10]通过Ricci曲率非负来研究梯度Yamabe孤立子数量曲率的情况.文献 [11]给出了梯度收缩ρ-Einstein孤立子等距于一些球面的商的条件.Chandan [12]通过限制梯度ρ-Einstein孤立子中的光滑函数ρ的值讨论数量曲率的情况.Dwivedi [13]介绍了Ricci-Bourguignon孤立子等距于欧氏球面的充要条件,以及具有共形向量场的紧致Ricci-Bourguignon孤立子是平凡的孤立子.

基于上述工作,本文将 [8]和 [10]的结果推广到梯度Ricci-Yamabe孤立子上.即给出紧致黎曼流形中的梯度Ricci-Yamabe孤立子的相关结果.首先得出梯度Ricci-Yamabe孤立子的等距问题和平凡性结果,其次给出梯度Ricci-Yamabe孤立子是稳定的或收缩的孤立子的条件,最后讨论,当f是次调和函数或调和函数,数量曲率在不同分类下的情况.

定理1:设$(M^n,g,f,\lambda,\alpha,\beta),(n>3,\alpha\neq 0.)$是具有势函数$f$的梯度Ricci-Yamabe孤立子.

(i)如果M是紧致的,且∇f是共形向量场. 那么,一方面, $\varphi=0$, 则∇f是Killing向量场, 孤立子是平凡的. 另一方面, $\int_M\varphi=0,(\varphi\neq 0)$, 则孤立子$(M^n,g,f,\lambda,\alpha,\beta),(n>3,\alpha\neq 0.)$等距于欧氏球面.

(ii)如果$\alpha,\beta>0$,且∇f是共形向量场.那么孤立子$(M^n,g,f,\lambda,\alpha,\beta),(n>3,\alpha\neq 0.)$是收缩的或稳定的.

(iii)如果∇f是满足Hodge-de Rham分解定理的向量场,且$\int_M g(\nabla f,\nabla h)\leq 0$,这里的$h$是Hodge-de Rham势函数,那么孤立子$(M^n,g,f,\lambda,\alpha,\beta),(n>3,\alpha\neq 0.)$是平凡的.

定理2:设$(M^n,g,f,\lambda,\alpha,\beta),(n>3,\alpha\neq 0.)$是具有势函数$f$的紧致的,稳定的或扩张的梯度Ricci-Yamabe孤立子,并且$\alpha,\beta>0$.如果f是次调和函数,那么M有非正数量曲率.特别地, 如果,孤立子是平凡的，f是调和函数,那么M的数量曲率为0.

2. 预备知识及引理

设X是任意黎曼流形上的向量场,如果存在光滑函数φ,使得

$$\ell_X g = 2\varphi g, \tag{3}$$

则称向量场X为共形向量场.函数φ称为向量场X的势函数.当$\varphi \neq 0$时,称向量场X为非平凡共形向量场,当$\varphi = 0$时,称向量场X为Killing向量场.

为了完成定理的证明，我们需要如下的定理以及引理:

Hodge-de Rham分解定理: [14]设M为紧致定向的黎曼流形,X为流形上的任意一个向量场,则有

$$X = Y + \nabla h,$$

其中Y是流形上散度自由的向量场,即$divY = 0$, h称为Hodge-de Rham势函数.

Hopf定理:假设(M, g)是紧致无边可定向连通的n维黎曼流形,如果f是M上的调和函数，即$\Delta f = 0$,则f是常值函数.

散度定理:假设(M, g)是有向紧致的n维无边黎曼流形,则对于任意向量场X,有如下积分公式:

$$\int_M (divX)dV = 0.$$

特别的,当$X = \nabla f$时,有

$$\int_M \Delta f dV = 0.$$

其中dV表示黎曼流形M的体积元.

引理1 [15]:设(M^n, g)是有常数量曲率的紧致黎曼流形.假设流形M上存在非平凡共形向量场X.如果有$\ell_X Ric = \theta g$成立,其中$\theta \in C^\infty(M)$.那么M等距于欧氏球面S^n.

引理2:设$(M^n, g, X, \lambda, \alpha, \beta)$, $(n > 2, \alpha \neq 0.)$是Ricci-Yamabe孤立子.如果X是势函数为φ的共形向量场,那么R和φ是常数.

证明: 由于X是共形向量场,那么(3)成立.将(3)代入孤立子方程(1)得

$$\alpha Ric = (\lambda - \frac{1}{2}\beta R - \varphi)g, \tag{4}$$

对(4)两边同时求迹得

$$(2\alpha + n\beta)R = 2n(\lambda - \varphi),$$

再求协变导数得

$$(2\alpha + n\beta)\nabla R = -2n\nabla\varphi, \tag{5}$$

对(4)两边同时求散度得

$$\alpha divRic = \nabla(-\frac{1}{2}\beta R - \varphi), \tag{6}$$

将(5)代入(6)得

$$\alpha divRic = \frac{\alpha}{n}\nabla R.$$

由收缩的Bianchi恒等式有$divRic = \frac{1}{2}R$,并且$\alpha \neq 0$,那么$(n-2)\nabla R = 0$.因为$n > 2$,所以$\nabla R = 0$.即R为常数,由(5)可知φ也为常数.证毕.

文献 [8]给出了近Ricci-Yamabe孤立子R和$\lambda-\varphi$是常数的结论,引理2讨论的是λ为常数的特殊情形.

引理3 [14]:如果紧致流形M有常数量曲率,并且存在非平凡共形向量场X,使得$\ell_X g=2\varphi g, \varphi\neq 0$,那么

$$\int_M \varphi dV=0. \tag{7}$$

引理4 [8]:设$(M^n,g,X,\lambda,\alpha,\beta)$.)是具有势函数$f$的紧致梯度Ricci-Yamabe孤立子.那么$f=h+c$,其中, f为孤立子的势函数，h为Hodge-de Rham势函数.

3. 定理的证明

定理1的证明:(i)因为∇f是共形向量场,所以(3)成立,即$\nabla^2 f=\varphi g$,对其求迹得

$$\Delta f=\varphi n.$$

如果M紧致,对上式两边同时积分

$$\int_M \Delta f dV=\int_M \varphi n dV.$$

由散度定理,等式左边为0,则等式右边也为0,由引理2,$\lambda-\varphi$为常数,λ又为常数,即φ也为常数.那么

$$\int_M \varphi n dV=n\int_M \varphi dV=\varphi n Vol(M)=0.$$

即要么$\varphi=0$, 要么$\int_M \varphi dV=0(\varphi\neq 0)$.其中$Vol(M)$表示紧致流形$M$的体积.

当$\varphi=0$时,∇f是Killing向量场,则f是常数,孤立子是平凡的,那么$Ric=\frac{1}{\alpha}(\lambda-\frac{1}{2}\beta R)g$,其中$\alpha,\beta,\lambda$均为常数,由引理2，$R$也为常数.则可得满足以上条件的Ricci-Yamabe孤立子是爱因斯坦流形.

当$\int_M \varphi dV=0(\varphi\neq 0)$时，由引理3知, 黎曼流形$M$上存在非平凡共形向量场.假设$\nabla f$是非平凡共形向量场,由引理2可知,数量曲率$R$是常数,并且有$\ell_{\nabla f}g=2\varphi g$,即$\nabla^2 f=\varphi g, \varphi\neq 0$.由孤立子方程(2)得

$$Ric=\frac{1}{\alpha}[(\lambda-\frac{1}{2}\beta R)g-\nabla^2 f].$$

对上式两边同时沿势向量场∇f求lie导数,并将$\nabla^2 f=\varphi g$代入

$$\ell_{\nabla f}Ric=\frac{1}{\alpha}(\lambda-\frac{1}{2}\beta R-\varphi)\ell_{\nabla f}g.$$

由引理1,当$X=\nabla f$时,有$\ell_X Ric=\theta g$成立,其中$\theta=\frac{1}{\alpha}(\lambda-\frac{1}{2}\beta R-\varphi)2\varphi$,所以Ricci-Yamabe孤立子$(M^n,g,X,\lambda,\alpha,\beta)$等距于欧氏球面$S^n$.

(ii)当$\alpha,\beta>0$时, 对孤立子方程(2)求迹并将$\ell_X g=2\varphi g,\varphi\neq 0$,代入得

$$R=\frac{1}{\alpha}(\lambda-\frac{1}{2}\beta R-\varphi)n. \tag{8}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.138247

对(8)两边同时积分

$$\int_M (1+\frac{\beta n}{2\alpha})RdV = \frac{1}{\alpha}\int_M (\lambda-\varphi)ndV. \tag{9}$$

由引理3,M有常数量曲率,且存在非平凡共形向量场,那么(3)成立.将(3)代入(9)得

$$\alpha\int_M (1+\frac{\beta n}{2\alpha})RdV = \int_M \lambda ndV. \tag{10}$$

由于M等距于欧氏球面S^n,所以$R > 0$.如果$\lambda < 0, \alpha, \beta > 0$,由(10)式可得$R < 0$,与等距矛盾.即得$\lambda \geq 0$,孤立子要么是收缩的,要么是稳定的.

(iii)由Hodge-de Rham分解定理,有$\nabla f = \nabla h + Y$且$divY = 0$.由引理4,$f = h + c$,进而$\nabla h = \nabla f$.因为M是紧致的,所以

$$\begin{aligned}\int_M g(\nabla h, \nabla f)dV &= \int_M g(\nabla h + Y, \nabla h)dV\\ &= \int_M g(\nabla h, \nabla h)dV + \int_M g(Y, \nabla h)dV\\ &= \int_M g(\nabla h, \nabla h)dV + \int_M div(hY)dV - \int_M hdivY dV\\ &= \int_M g(\nabla h, \nabla h)dV\\ &= \int_M |\nabla h|^2 dV\\ &= \int_M |\nabla f|^2 dV.\end{aligned}$$

后半部分的计算运用了散度定理.如果$\int_M g(\nabla f, \nabla h) \leq 0$,那么$\nabla f = 0$,即$f$是常数,则孤立子平凡.

定理2的证明: 对孤立子方程(2)求迹得

$$\Delta f = (\lambda - \frac{1}{2}\beta R)n - \alpha R. \tag{11}$$

由于f是次调和函数,即$\Delta f \geq 0$,那么

$$n\lambda - (\frac{1}{2}\beta n + \alpha)R \geq 0. \tag{12}$$

孤立子是稳定的或扩张的,即$\lambda \leq 0$.由(10)以及$\alpha, \beta > 0$,可得$R \leq 0$.
特别地，当f是调和函数,即$\Delta f = 0$,那么

$$n\lambda - (\frac{1}{2}\beta n + \alpha)R = 0.$$

并且孤立子是稳定的, 即$\lambda = 0$.由$\alpha, \beta > 0$,可得$R = 0$.定理2得证.

注:从定理2的证明过程中可以发现,当$\alpha, \beta > 0$时,紧致黎曼流形中具有势函数f的梯度Ricci-

Yamabe孤立子的数量曲率R与孤立子常数λ同号,但与∇f异号.

参考文献

[1] Güler, S. and Crasmareanu, M. (2019) Ricci-Yamabe Maps for Riemmannian Flow and Their Volume Variation and Volume Entropy. *Turkish Journal of Mathematics*, **43**, 2631-2641. https://doi.org/10.3906/mat-1902-38

[2] Cao, H.D. (2009) Recent Progress on Ricci Solitons. *Advanced Lectures in Mathematics*, **11**, 1-38.

[3] Cunha, A.W. (2022) Remarks on Scalar Curvature of Gradient Yamabe Solitons with Non-Positive Ricci Curvature. *Differential Geometry and its Applications*, **80**, Article 101843. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2021.101843

[4] Ma, L. and Miquel, V. (2012) Remarks on Scalar Curvature of Yamabe Solitons. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **42**, 195-205. https://doi.org/10.1007/s10455-011-9308-7

[5] Karaca, F. (2023) Gradient Ricci-Yamabe Solitons on Warped Product Manifolds. *Filomat*, **37**, 2199-2207.

[6] Danish, S.M., de Uday, C. and Sharief, D. (2022) Estimation of Almost Ricci-Yamabe Solitons on Static Spacetimes. *Filomat*, **36**, 397-407. https://doi.org/10.2298/FIL2202397S

[7] Singh, J.P. and Khatri, M. (2021) On Riccci-Yamabe Soliton and Geometrical Structure in a Perfect Fiuid Spacetime. *Afrika Mathmatika*, **32**, 1645-1656. https://doi.org/10.1007/s13370-021-00925-2

[8] Khatri, M., Zosangzuala, C. and Singh, J.P. (2023) Isometries on Almost Ricci-Yamabe Solitons. *Arabian Journal of Mathematics*, **12**, 127-138. https://doi.org/10.1007/s40065-022-00404-x

[9] Chand De, U., Sardar, A. and De, K. (2022) Ricci-Yamabe Solitons and 3-Dimensional Riemannian Manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, **46**, 1078-1088. https://doi.org/10.55730/1300-0098.3143

[10] Mondal, C.K. and Shaikh, A.A. (2019) Some Results in η-Ricci Soliton and Gradient ρ-Einstein Soliton in a Complete Riemannian Manifold. *Communications of the Korean Mathematical Society*, **34**, 1279-1287.

[11] Huang, G. (2017) Integral Pinched Gradient Shrinking ρ-Einstein Solitons. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **451**, 1045-1055. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.02.051

[12] Ghosh, G. and Chand De, U. (2022) Generalized Ricci Solitons on Contact Metric Manifolds. *Afrika Matematika*, **33**, Article No. 32. https://doi.org/10.1007/s13370-021-00944-z

[13] Dwivedi, S. (2021) Some Results on Ricci-Bourguignon Solitons and Almost Solitons. *Canadian Mathematical Bulletin*, **64**, 591-604. https://doi.org/10.4153/S0008439520000673

[14] Kentaro, Y. (1970) Integral Formulas in Riemannian Geometry. Marcel Dekker, Inc., New York.

[15] Warner, F. (1983) Foundations of Differentiable Manifoldss and Lie Groups. Springer Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1799-0