Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2718-2724
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139279

一道中考平面几何题的解法赏析

袁士通*，杨　祺#

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年8月17日；录用日期：2023年9月19日；发布日期：2023年9月26日

摘　要

平面几何内容是初中数学的重要组成部分，也是后续高中立体几何与解析几何的学习基础。中点问题是初中平面几何的一类比较重要的考查内容，本文利用中点构造全等、相似三角形等方法，梳理了2022年天津市中考平面几何题的八种解法，旨在让学生掌握这些方法的同时能够触类旁通，培养数学思维，提高核心素养。

关键词

中点，平面几何，一题多解

Appreciation of the Solution to a Plane Geometry Problem in the Middle School Entrance Examination

Shitong Yuan*, Qi Yang#

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Aug. 17th, 2023; accepted: Sep. 19th, 2023; published: Sep. 26th, 2023

Abstract

The content of plane geometry is an important component of junior high school mathematics, and it is also the foundation for subsequent learning of solid geometry and analytical geometry in senior high school. The midpoint problem is a relatively important examination content in middle school plane geometry. This article uses methods such as midpoint construction congruence and similar triangles to sort out eight solutions for plane geometry problems in the 2022 Tianjin high school entrance examination. The aim is to enable students to master these methods while also being able to touch the class, cultivate mathematical thinking, and improve core literacy.

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用：袁士通，杨祺．一道中考平面几何题的解法赏析[J]．理论数学, 2023, 13(9): 2718-2724.
DOI: 10.12677/pm.2023.139279

Keywords

Midpoint, Plane Geometry, Multiple Solutions to the Problem

1. 引言

新课标中三维目标被核心素养所取代，数学核心素养被提升到了新的高度[1]。以核心素养目标取代三维目标，使学生获得基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验，发展发现、提出、分析和解决问题的能力[2]。培养学生以数学的角度来思考转化问题，通过数学方法分析解决问题，以及积极处理问题的习惯和品质。平面几何是初中数学的核心模块[3]，是培养理性思维的主要载体，所体现的是学生直观想象的核心素养。

中点问题贯穿初中平面几何，含有一个或多个线段中点的几何问题称为中点问题。本文选取 2022 年天津市中考平面几何作为问题对象，它虽然图形简单，但内涵丰富，解法灵活多样，易于学生理解掌握。通常中点问题涉及的知识点较多，与不同的图形结合考察。所以通过对本中考题解法的学习有助于学生当面对中点与三角形、四边形、圆等结合考察时能够游刃有余，不同的题目会用所对应的方法[4]。有助于提高学生的模型思想和触类旁通的能力，培养学生的转化思想，提升学生的数学核心素养[5]。基于此，本文拟借助问题解决归纳一些中点问题常见的方法。

2. 原题呈现

如图 1，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle DAB = 60^\circ$，E 为 AB 的中点，F 为 CE 的中点，AF 与 DE 相交于 G，则 GF 的长等于。

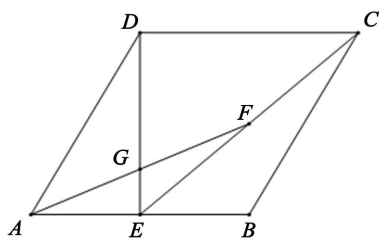

Figure 1. Question (1)
图 1. 问题(1)

试题分析：这道中点问题是平行四边形上的中点，可将其转化到三角形上。当学生面对两个中点时，会自然的想到三角形的中位线。所以此题根据三角形中位线的性质，通过已知的条件来构造辅助线[6]、构造相似、构造全等，以及正余弦定理、勾股定理、解析法来对此题进行求解，相似是解决此题的关键。

3. 解法探析

3.1. 构造相似

解法 1 已知一个中点，再找到一个中点，就可以利用中位线的性质对问题就行简化从而进行求解。

如图 2，因此按照这样的思路，要用构造相似求 GF 的长，连接 BD，作 CD 的中点 H 连接 BH，就要证明点 F 在 BH 上，$Rt\Delta AEG$ 和 $Rt\Delta ABF$ 相似，然后根据勾股定理和相似性质即可求出。

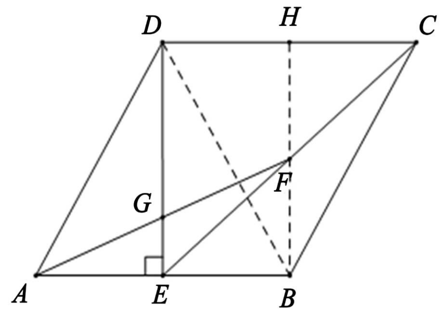

Figure 2. Question (2)
图 2. 问题(2)

连接 BD，作 CD 的中点 H 连接 BH，因为 ΔABD 为等边三角形，所以 $DE \perp AB$， $HB \perp AB$ 。HF 为 ΔCDE 的中位线，所以 $HF \perp CD$，即 F 在 BH 上。根据勾股定理得 $BH = \sqrt{3}$，即 $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $\angle EAG = \angle BAF$，且 $\angle AEG = \angle ABF$，所以 $Rt\Delta AEG \sim Rt\Delta ABF$，根据勾股定理得 $AF = \frac{\sqrt{19}}{2}$，所以 $GF = \frac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{19}}{4}$。

解法 2 如图 3，按照解法 1 的思路如图，向外作辅助线，找到另外一个中点 B，再根据中位线的性质将问题进行简化。利用构造出来的相似三角形的性质和勾股定理即可求出线段 GF 的长。

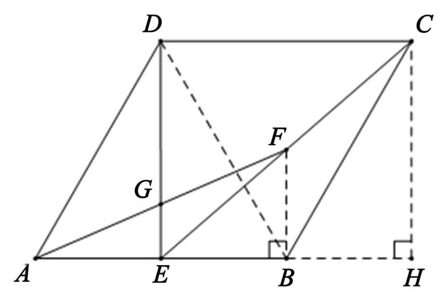

Figure 3. Question (3)
图 3. 问题(3)

如图 3，连接 BF，作 $CH \perp AB$ 的延长线于点 H，连接 BD。$CH = BC\sin 60^\circ = \sqrt{3}$，$BH = BC\cos 60^\circ = 1$。即 B 为 EH 的中点，BF 为 ΔCEH 的中位线。有 $EF = \frac{1}{2}EC$， $\angle FEB = \angle CEH$， $EB = \frac{1}{2}EH$，所以 $\Delta FEB \sim \Delta CEH$，即 $FB \perp AB$。因为 $DE \perp AB$，所以有 $\angle GAE = \angle FAB$， $\angle AEG = \angle ABF = 90^\circ$，即 $\Delta AEG \sim \Delta ABF$。由勾股定理得 $AF = \frac{\sqrt{19}}{2}$，即 $GF = \frac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{19}}{4}$。

解法 3 如图 4，要求 GF 的长，连接 BF，BD，作 $GI \mathbin{/\mkern-6mu/} AB$，只需证明 $Rt\Delta FGI$ 和 $Rt\Delta FAB$ 相似，再根据勾股定理和三角形相似的性质即可求出 GF 的长。

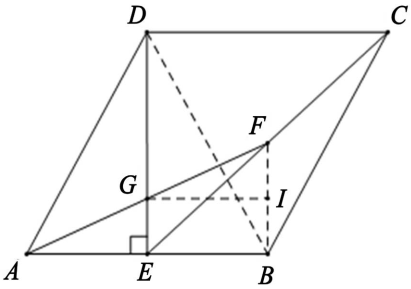

Figure 4. Question (4)
图 4. 问题(4)

连接 BD,BF，过点 G 作 AB 的平行线交 BF 于点 I，因为 $BE=1$，$EF=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\cos\angle FEB=\sin\angle DEC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，根据余弦定理得 $BF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $EF^2=BE^2+BF^2$，所以 $BF\perp BE$，所以 $GI\perp BF$，四边形 $BEGI$ 是矩形。因为 $\angle FGI=\angle FAB$，$\angle AED=\angle ABF$，即 $Rt\Delta FGI\sim Rt\Delta FAB$，由勾股定理得 $AF=\frac{\sqrt{19}}{2}$，所以 $GF=\frac{1}{2}AF=\frac{\sqrt{19}}{4}$。

解法 4 如图 5，要求 GF 的长，过 C 点作 AB 的垂线交于 AB 的延长线于点 M，AF 的延长线交 CM 于点 L，连接 BD，只需证 $Rt\Delta AEG$ 和 $Rt\Delta AML$ 相似，再根据勾股定理和三角形相似的性质即可求出。

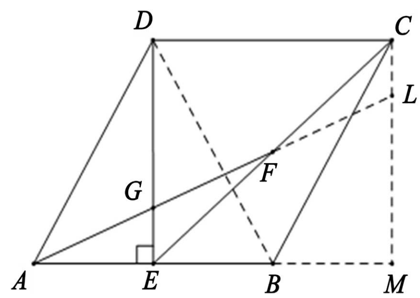

Figure 5. Question (5)
图 5. 问题(5)

过 C 点作 AB 的垂线交于 AB 的延长线于点 M，AF 的延长线交 CM 于点 L，因为 $\angle GEF=\angle LCF$，$EF=CF$，$\angle EFG=\angle CFL$，所以 $\Delta GEF\cong\Delta LCF$。根据勾股定理可得，$BM=1$。因为 $\angle GAE=\angle LAM$，$\angle AEG=\angle AML$，所以 $Rt\Delta AEG\sim Rt\Delta AML$。不妨设 $CL=x$，则 $LM=\sqrt{3}-x$，根据三角形相似性质有 $LM:GE=AM:AE=3:1$，即 $\left(\sqrt{3}-x\right):x=3:1$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即 $LM=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，根据勾股定理得 $AL=\frac{3\sqrt{19}}{4}$，即 $GF=\frac{\sqrt{19}}{4}$。

3.2. 构造全等

解法 5 如图 6，要求 GF 的长，过点 F 作 DE 的垂线交 DE 于 H，只需构造全等证 $Rt\Delta AEG$ 和 $Rt\Delta FHG$

全等，再根据勾股定理即可求出。

过点 F 作 DE 的垂线交 DE 于 H，因为 $HF \perp DE$，所以 $HF \parallel AB$，即 H 是 DE 的中点。在 $Rt\Delta AEG$ 和 $Rt\Delta FHG$ 中，$\angle GAE = \angle GFH$，$AE = FH$，$\angle AEG = \angle FHG$，所以 $Rt\Delta AEG \cong Rt\Delta FHG$，$G$ 为 EH 的中点，即 $GH = \frac{1}{4}DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$，$HF = 1$，根据勾股定理可得 $GF = \frac{\sqrt{19}}{4}$。

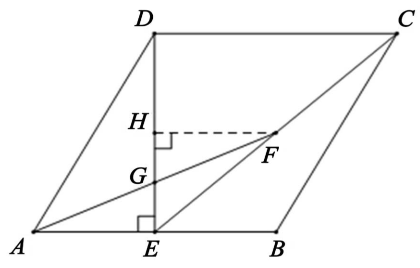

Figure 6. Question (6)
图 6. 问题(6)

3.3. 正余弦定理

解法 6 如图 7 所示，要求 GF 的长，先要求出 $\angle AEF$ 的余弦，根据余弦定理求出 AF 的长度，再根据余弦定理求得 $\angle AFE$ 的正余弦，再根据正弦定理即可求出 GF 的长。

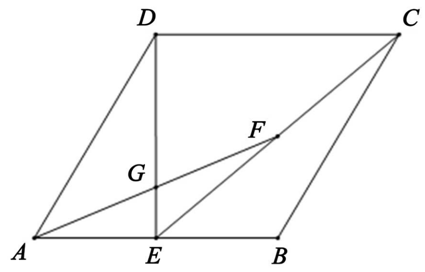

Figure 7. Question (7)
图 7. 问题(7)

根据勾股定理得 $CE = \sqrt{7}$，因为 $\cos\angle DEA = 0$，$\sin\angle DEA = 1$，$\cos\angle DEC = \frac{\sqrt{21}}{7}$，$\sin\angle DEC = \frac{2\sqrt{7}}{7}$。

所以 $\cos\angle AEF = \cos\left(\angle AED + \angle CED\right) = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$，根据余弦定理

$AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2 \cdot AE \cdot EF \cdot \cos\angle AEF = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$，得 $AF = \frac{\sqrt{19}}{2}$。根据余弦定理得，

$\cos\angle AFE = \frac{AF^2 + EF^2 - AE^2}{2 \cdot AF \cdot EF} = \frac{11\sqrt{133}}{133}$，即 $\sin\angle AFE = \sqrt{1-\cos^2\angle AFE} = \frac{\sqrt{1596}}{133}$，

因为 $\sin\angle EGF = \sin\left(\angle DEC + \angle AFE\right) = \frac{4\sqrt{19}}{19}$，由正弦定理 $\frac{EF}{\sin\angle EGF} = \frac{GF}{\sin\angle DEC}$，得 $GF = \frac{\sqrt{19}}{4}$。

3.4. 勾股定理

解法 7 如图 8 所示，要求 GF 的长，连接 BF，BD，利用勾股定理和中点的性质可求出 EF 的长，通

过勾股定理的逆用可证明 $BF \perp AB$，再配合中点由勾股定理即可得到 GF 的长。

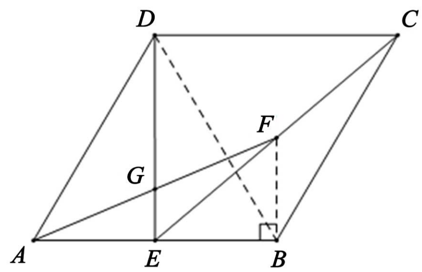

Figure 8. Question (8)
图 8. 问题(8)

连接 BF, BD, 由勾股定理得 $DE=\sqrt{3}$，$CD=2$，$CE=\sqrt{7}$，即 $EF=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，根据余弦定理得 $BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，在 ΔBEF 中，$EF^2=BE^2+BF^2$，所以 $BF \perp AB$。因为 $GE \perp AB$，所以 $EG /\!/ BF$，又因为 E 为 AB 的中点，所以 G 是 AF 的中点。根据勾股定理得 $AF=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$，即 $GF=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$。

3.5. 解析法

解法 8 如图 9 所示，要求 GF 的长，连接 BD，BF，建立直角坐标系，利用待定系数法求出直线 AF 的解析式，可得 EG 的长度，利用勾股定理可得 AF，AG 的长度，进而求得 GF 的长。

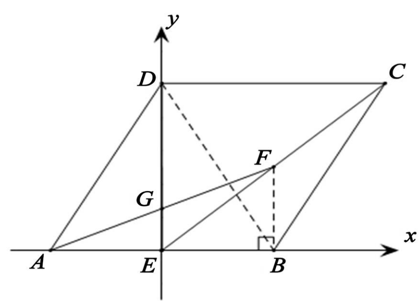

Figure 9. Question 9)
图 9. 问题(9)

则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C\left(2,\sqrt{3}\right)$，$D\left(0,\sqrt{3}\right)$，$E(0,0)$，F 为 EC 中点，则 $F\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$。所以 $FB \perp x$ 轴，设直线 l_{AF} 的解析式为 $y=k_1x+b_1$，则 $\begin{cases} 0=-k_1+b_1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}=k_1+b_1 \end{cases}$，解得 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，即 $EG=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，根据勾股定理得 $AF=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$，$AG=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$，所以 $GF=AF-AG=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$。

4. 小结

中点问题贯穿于初中平面几何。若问题中出现中点，尤其是出现多个中点，则往往考虑构造中位线，

利用三角形的中位线定理进行边和角的转换，从而达到解决问题的目的。当中点遇到直角三角形时，往往连接斜边中线，利用直角三角形斜边中线性质解决问题。有时条件比较隐蔽，需要自行取斜边中点。当中点遇到垂直时，可利用线段垂直平分线的性质定理解决问题。当中点遇到等腰或等边时，往往利用等腰三角形三线合一的性质解决问题。在初中平面几何中与中点有关的模型还有倍长中线模型、等腰三角形三线合一模型、直角三角形斜边中线定理模型、三角形中位线定理模型，都是进行边和角的转换，这里不再赘述。

构造相似在初中平面几何中比较常见，当问题有中点、直角，要证明是线段的倍数关系，或者给出一定条件让求角度，长度时，构造相似三角形的方法会更加简单。构造全等三角形是八年级数学内容中重要的章节，也是初中几何中的重要内容，中考对全等三角形的要求比较高，并且三角形全等的应用也比较广泛，主要用于证明几何问题中线段相等，线段之间的数量关系等问题。不过，往往在应用全等三角形的时候会出现各种各样的难点，需要学生大胆尝试，小心验证。通常用作平行或者截长补短法去构造全等三角形来解决问题。利用正余弦定理解决平面几何问题范围较窄，需要把所求问题转化为三角形，在三角形中求对应的角度和长度。利用勾股定理解决问题，通常情况下如果所给平面几何所含有直角三角形，或者通过做辅助能够得到直角三角形，就要考虑能否利用勾股定理或者逆定理将所给问题解决。常常需要通过勾股定理来建立三角形三条边之间的关系，这个过程通常也会运用到方程思想，通过设未知数求出待求线段的长。利用解析式法求平面几何问题时，要能够找到两条相互垂直的线段，建立适当的平面直角坐标系，将所求线段在平面直角坐标系中表示出来。利用待定系数法求出所求直线解析式再配合其他方法将问题解决，这种在平面几何中应用一次函数的方法比较简单，能够培养学生的函数思想和问题解决能力。

上述的五种类型的八种方法不仅用到了菱形的性质、相似三角形的性质与判定、全等三角形的性质与判定、而且使用了辅助线、勾股定理的逆用、以及正余弦定理。在解决此类问题的同时可以让学生将这些知识联系起来，加以巩固，并且对培养学生的直观想象和发散性思维有很大帮助。解决此类问题的过程中应该聚焦于中点，用中点简化图形。总之，2022 年天津市中考第 17 题图形简单，但内涵丰富，值得分享。

参考文献

[1] 白华贤. 高中数学核心素养培养路径探讨——评《基于高中数学核心素养的教学设计与反思》[J]. 中国教育学刊, 2023(4): 144.

[2] 杨子圣. 高中数学教育重在培养数学能力与数学思想等核心素养[J]. 人民教育, 2022(23): 77-78.

[3] 王海青, 曹广福. 从《原本》谈中学平面几何课题式教学研究[J]. 数学教育学报, 2021, 30(5): 39-46+91.

[4] 程华. 从“一题多解”审思解题教学的思维培养[J]. 数学通报, 2020, 59(8): 50-54.

[5] 教育部. 义务教育数学课程标准: 2022 年版[M]. 北京: 北京师范大学出版集团, 2022: 5-11.

[6] 徐策. 平面几何常见添加辅助线的方法[J]. 中学教学参考, 2020(2): 23-24.