Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 65-78
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141008

Hans汉斯

具有L^2-约束的非线性Choquard方程的多解性

彭玉碧

云南民族大学，数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年12月6日；录用日期：2024年1月9日；发布日期：2024年1月17日

摘 要

本文考虑如下非线性Choquard方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\ x\in\mathbb{R}^3,$$

其中 $a,b>0$，$\alpha\in(0,3)$，$I_\alpha(x):=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{3}{2}}2^\alpha}\dfrac{1}{|x|^{3-\alpha}},\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 是Riesz位势。$g(\xi)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足Berestycki-Lions条件且其为奇或偶的。$\mu\in\mathbb{R}$ 是Lagrange乘子。Wu证明了(1)关于 (u,κ) 等同于如下系统：

$$\begin{cases}-\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\\ \kappa-a-b\kappa^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=0,\end{cases}\quad (u,\kappa)\in\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+\right).$$

在Palais-Smale-Pohozaev条件下，发展新的形变理论，使之在L^2-约束问题中能应用极大极小理论并且证明该系统存在无穷多解，因此可证非线性Choquard方程也存在无穷多解。本文处理L^2-约束问题，即 $\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x=m$ 。

关键词

非线性Choquard方程，Riesz位势，多维奇路径，Berestycki-Lions条件，L^2-约束问题

Multiple Solutions for Nonlinear Choquard Equation with L^2-Constraint

Yubi Peng

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

文章引用: 彭玉碧. 具有 L^2-约束的非线性 Choquard 方程的多解性[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 65-78.
DOI: 10.12677/pm.2024.141008

Received: Dec. 6th, 2023; accepted: Jan. 9th, 2024; published: Jan. 17th, 2024

Abstract

In this paper, we consider the following nonlinear Choquard equation

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\ x\in\mathbb{R}^3,$$

where $a,b>0$, $\alpha\in(0,3)$, $I_\alpha(x):=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{3}{2}}2^\alpha}\dfrac{1}{|x|^{3-\alpha}}$, $x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ **is a Riesz potential.**

$g(\xi)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ **satisfies Berestycki-Lions condition and it is odd or even.** $\mu\in\mathbb{R}$ **is a Lagrange multiplier. Wu proved that (1) is equivalent to the following system with respect to** (u,κ):

$$\begin{cases}-\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\\ \kappa-a-b\kappa^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=0,\end{cases}\quad (u,\kappa)\in\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+\right).$$

We develop a new deformation argument under Palais-Smale-Pohozaev condition. It enables us to apply minimax argument for L^2-constraint problem and we can prove the system exists infinitely many solutions, so we also prove Nonlinear Choquard Equation exists infinitely many solutions. In this paper, we deal with L^2-constraint problem, *i.e.* $\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x=m$.

Keywords

Nonlinear Choquard Equation, Riesz Potential, Multidimensional Odd Paths, Berestycki-Lions Condition, L^2-Constraint Problem

1. 引言

本文将证明如下非线性Choquard方程存在无穷多解$u\in H_r^1(\mathbb{R}^3)$，

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\ x\in\mathbb{R}^3, \tag{1}$$

其中$a,b>0$，$\alpha\in(0,3)$，且$I_\alpha:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$是Riesz位势，定义如下

$$I_\alpha(x):=\frac{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{3}{2}}2^\alpha}\frac{1}{|x|^{3-\alpha}},\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}.$$

$g(\xi)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$满足Berestycki-Lions条件且其为奇或偶的，$g:=G'$。$\mu\in\mathbb{R}$是Lagrange乘子。$H_r^1(\mathbb{R}^3)$表

示径向对称 Sobolev 函数空间。

考虑如下非局部源方程存在无穷多解 $u\in H_r^1\left(\mathbb{R}^N\right)$，

$$-\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * F(u)\right)f(u),\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{2}$$

其中 $\alpha\in(0,N)$，且 $I_\alpha:\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 是 Riesz 位势，定义如下

$$I_\alpha(x):=\frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{N}{2}}2^\alpha}\frac{1}{|x|^{N-\alpha}},\ x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},$$

$f(\xi)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足 Berestycki-Lions 条件且其为奇或偶的，$f:=F'$。$\mu\in\mathbb{R}$ 是 Lagrange 乘子。$H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ 表示径向对称 Sobolev 函数空间。其中具有非局部源的半线性方程(1)和(2)有一些物理动机，通常称之为非线 Choquard 方程。Choquard 型方程有许多物理背景，例如 Pekar 用方程

$$\begin{cases}-\Delta u+u=\left(I_\alpha * |u|^2\right)u,\quad x\in\mathbb{R}^N\\ u\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\end{cases} \tag{3}$$

描述了极子化的量子理论[1]，Choquard 用方程(3)描述了电子阱模型[2]。

考虑(1)中 G 是具有如下一般假设的 Berestycki-Lions 型函数

(G1) $G\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$；

(G2) 存在 $C>0$ 使得对任意 $s\in\mathbb{R}$

$$|sg(s)|\le C\left(|s|^{\frac{3+\alpha}{3}}+|s|^{3+\alpha}\right);$$

(G3)

$$\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{|s|^{\frac{3+\alpha}{3}}}=0,\ \lim_{s\to+\infty}\frac{G(s)}{|s|^{3+\alpha}}=0;$$

(G4) $G(s)\ne 0$，即存在 $s_0\in\mathbb{R}$， $s_0\ne 0$ 使得 $G(s_0)\ne 0$。

(G5) G 是奇或偶的。

当 $N=3$， $\alpha=2$， $F(s)=\frac{1}{2}|s|^2$，则方程(2)可表示为如下形式

$$-\Delta u+\mu u=\left(\frac{1}{4\pi|x|}*|u|^2\right)u,\quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{4}$$

若 u 是(4)的解，则波函数

$$\psi(x,t)=\mathrm{e}^{i\mu t}u(x),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times[0,+\infty)$$

是时变 Hartree 方程

$$i\psi_t=-\Delta\psi-\left(\frac{1}{4\pi|x|}*|\psi|^2\right)\psi,\quad x\in\mathbb{R}^3\times[0,+\infty) \tag{5}$$

的孤立波。(5)规定 u 的质量 $m>0$，即 ψ 满足下式

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\psi(x,t)\right|^2\mathrm{d}x=m,\quad \forall t\in[0,+\infty),$$

频率 μ 是自由的，则该问题被称为约束问题。

约束问题在物理学中具有重要的相关性，体现在量子概率的归一化，由于质量有特定的意义，如非线性光学中的电源或Bose-Einstein凝聚中的原子总数。此外，对约束问题的研究可以了解其动力学性质，如(5)的解的轨道稳定性。在局部框架中，对约束问题的研究主要由Stuart [3]和Cazenave和Lions [4]等人做出了重要贡献。

Kirchhoff 型方程逐渐引起学者们的广泛关注。该方程源于 1883 年德国物理学家 Kirchhoff [5]在研究弦振动时提出的一种弹性弦方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{6}$$

其中 ρ 是质量密度， P_0 是初始张力，h 是截面面积，E 是材料的杨氏模，L 是绳的长度， $t\ge 0$ 是时间，$u=u(x,t)$ 表示横向位移，其最显著的特征是带有一个形如 $\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\right)$ 的系数，该系数通常被称为非局部系数，该系数是依赖于运动的能量(即动能) $\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$ 在区间 $[0,L]$ 上的平均值 $\frac{1}{2L}\int_0^L\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x$，同时将带有非局部系数的方程称为非局部问题。这个方程考虑了可收缩弹性弦在横向振动过程中的长度变化影响，推广了 D'Alembert 的弹性管柱自由振动方程，在非牛顿力学、宇宙物理、弹性理论电磁学等诸多领域都有广泛的应用。除此之外，类似的非局部问题也用于模拟一些物理系统和生物系统，其中，u 描述了一个依赖于其自身的平均过程。例如，在人口密度相关研究中，形如

$$u_{tt}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u),\ x\in\mathbb{R}^3,$$

的问题已经得到了广泛的研究，关于 Kirchhoff 型问题的更多数学和物理背景，我们参考[6] [7] [8]。

2010 年，He 和 Zou [9]应用变分法及 Ljusternik-Schnirelman 畴数理论研究了形如

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u+V(x)u=f(x,u) & x\in\mathbb{R}^3,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3)\end{cases}$$

的 Kirchhoff 型方程的多重性和集中性问题。

2022 年，Cingolani，Gallo 和 Tanaka [10]，在几乎最优假设下，利用构造奇维多路径和增广泛函，通过形变引理、山路引理、对称山路引理、临界点理论、亏格理论等方法得到如下具有 L^2-约束的非线性 Choquard 方程有无穷多解

$$\begin{cases}-\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u), & x\in\mathbb{R}^3,\\ \int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\mathrm{d}x=m, \\ u\in H_r^1(\mathbb{R}^3),\end{cases}$$

假设 G 满足(G1)，(G4)且满足 L^2 次临界条件，即

(CG2) 存在 $C>0$ 使得对任意 $s\in\mathbb{R}$ 使得

$$|sg(s)|\le C\left(|s|^{\frac{3+\alpha}{3}}+|s|^{\frac{5+\alpha}{3}}\right);$$

(CG3)

$$\lim_{s\to 0}\frac{G(s)}{|s|^{\frac{3+\alpha}{3}}}=0,\ \lim_{s\to +\infty}\frac{G(s)}{|s|^{\frac{5+\alpha}{3}}}=0.$$

受上述文献的启发，一个自然的问题是：带有 Choquard 型的 Kirchhoff 方程在 L^2-约束条件和 Berestycki-Lions 条件下能否得到无穷多解？查阅相关文献，似乎还没有学者做带有 Choquard 型的 Kirchhoff 方程(具有两个非局部源项)在 L^2-约束条件和 Berestycki-Lions 条件下得到无穷多解的相关工作。因此，考虑如下具有 L^2-约束的非线性 Choquard 方程，即

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x=m,\\ u\in H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right).\end{cases}\tag{7}$$

方程(1)和(2)都是非局部问题。一方面，非局部源 $\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u)$ 的存在，导致文献[11]中的结论不能直接应用于非线 Choqquard 方程，需要新的方法获得多维奇路径。为了达到这个目的，需要找到合适的环：利用对应于环上的特征函数来构造多维奇路径。另一方面，方程(1)有两个非局部源项，其中 $b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$ 表明(1)不是点态恒等式，这导致了无法直接应用弱收敛方法，并造成了分析上的困难。因此，利用 Wu 在文献[12]中的证明，将方程(1)转化为如下关于 (u,κ) 的系统：

$$\begin{cases}-\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\\ \kappa-a-b\kappa^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=0,\end{cases}\quad (u,\kappa)\in\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+\right).\tag{8}$$

从而，只考虑卷积项带来的困难。因此，方程(7)可转化为求如下系统

$$\begin{cases}-\Delta u+\mu u=\left(I_\alpha * G(u)\right)g(u),\\ \kappa-a-b\kappa^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=0,\\ \int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x=m,\\ u\in H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right).\end{cases}\quad (u,\kappa)\in\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+\right)\tag{9}$$

由于 Tananka [10]中证明了方程(9)有无穷多个解。因此，方程(7)也具有无穷多解。

令 $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$，考虑能量泛函 $I^m:\mathbb{R}_+\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\to\mathbb{R}$，定义如下

$$I^m(\mu,u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\mu}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x-m\right)-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(I_\alpha * G(u)\right)G(u)\mathrm{d}x.$$

受 Pohozaev 恒等式的启发，引入 Pohozaev 泛函 $P:\mathbb{R}_+\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\to\mathbb{R}$，定义如下

$$P(\mu,u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{3+\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(I_\alpha * G(u)\right)G(u)\mathrm{d}x$$

并且 Pohozaev 水平集

$$\Omega=\left\{(\mu,u)\in\mathbb{R}_+\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\middle|P(\mu,u)>0\right\}\cup\left\{(\mu,0)\middle|\mu\in\mathbb{R}_+\right\}.$$

注意到，$\left\{(\mu,0)\middle|\mu\in\mathbb{R}_+\right\}\subset\operatorname{int}\Omega$ 且

$$\partial\Omega=\left\{(\mu,u)\in\mathbb{R}_+\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\middle|P(\mu,u)=0,u\neq 0\right\}.$$

利用 Palais-Smale 条件[4]的一个变形，它考虑了 Pohozaev 恒等式，这将证明新的变形定理，使得能够在乘积空间 $\mathbb{R}_+ \times H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 中应用极大极小原理。从而将证明在该乘积空间中具有极大极小结构的无穷多个 L^2-归一化解的存在性。

定理 1 假设 $\alpha \in (0,3)$ 且(G1)-(CG2)-(CG3)-(G4)-(G5)成立。

1) 对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $m_k \ge 0$ 使得对任意 $m > m_k$，问题(7)至少有 k 对不同的非平凡径向对称解。

2) 此外，假设在 0 处 L2 次临界增长，即

(CG4)

$$\lim_{s\to 0}\frac{|G(s)|}{|s|^{\frac{5+\alpha}{3}}} = +\infty;$$

此外，若 G 是奇的，存在 $\delta_0 > 0$，假设 $|G(s)|$ 在 $[0,\delta_0]$ 是不减的，则对任意 $k \in \mathbb{N}$，有 $m_k = 0$，即对任意 $m > 0$，问题(7)有可数多对解 $(\mu_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $L(u_n) < 0, n \in \mathbb{N}$。此外，当 $n \to +\infty$ 时，有

$$L(u_n) \to 0.$$

定理 2 假设 $\alpha \in (0,3)$ 且(G1)-(CG2)-(CG3)-(G4)-(G5)成立。

1) 对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $m_k \ge 0$ 使得对任意 $m > m_k$，问题(9)至少有 k 对不同的非平凡径向对称解。

2) 此外，假设在 0 处 L^2 次临界增长，即

(CG4)

$$\lim_{s\to 0}\frac{|G(s)|}{|s|^{\frac{5+\alpha}{3}}} = +\infty;$$

此外，若 G 是奇的，存在 $\delta_0 > 0$，假设 $|G(s)|$ 在 $[0,\delta_0]$ 是不减的，则对任意 $k \in \mathbb{N}$，有 $m_k = 0$，即对任意 $m > 0$，问题(9)有可数多对解 $(\mu_n, u_n, \kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $L(u_n) < 0, n \in \mathbb{N}$。此外，当 $n \to +\infty$ 时，有

$$L(u_n) \to 0.$$

第二节是预备知识；第三节 Palais-Smale-Pohozaev 条件和形变定理相关结论；第四节关于极大极小方法，建立了多重奇路径并给出了非局部项的估计；第五节证明了主要结果。

2. 预备知识

在下文中，将使用如下记号：

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}，对任意 u \in H^1(\mathbb{R}^3)；$$

$$\|u\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}，对任意 p \in [1,\infty) 且 u \in L^p(\mathbb{R}^3)；$$

$$B(x_0,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < r\right\}，对任意 x_0 \in \mathbb{R}^3 且 r > 0；$$

$$D_n := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\right\},$$

令

$$H_r^1(\mathbb{R}^3) := \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^3) : u(x) = u(|x|), x \in \mathbb{R}^3\right\};$$

此外，记 q 为下临界指数，p 为 L^2-临界指数，即

$$q := \frac{3+\alpha}{3},\ p := \frac{5+\alpha}{3}.$$

命题 2.1 ([13]) 设 $r,s \in (1,+\infty)$ 使得 $\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\frac{\alpha}{3}$，则映射

$$L^r(\mathbb{R}^3) \to L^s(\mathbb{R}^3); g \mapsto I_\alpha * g$$

连续。特别地，若 $r,t \in (1,+\infty)$，满足 $\frac{1}{r}+\frac{1}{t}=\frac{3+\alpha}{3}$，则存在一个常数 $C=C(N,\alpha,r,t)>0$ 及对任意 $g \in L^r(\mathbb{R}^3)$ 和 $h \in L^t(\mathbb{R}^3)$ 使得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * g)h\mathrm{d}x\right| \le C\|g\|_r\|h\|_t.$$

由于技术原因，令 $\mu = \mathrm{e}^\lambda \in (0,+\infty)$，$\lambda \in \mathbb{R}$。考虑能量泛函 $I^m : \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$，定义如下

$$I^m(\lambda,u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\mathrm{e}^\lambda}{2}\left(\|u\|_2^2 - m\right) - \frac{1}{2}D(u),$$

其中 $D(u) := \int_{\mathbb{R}^3}(I_\alpha * G(u))G(u)\mathrm{d}x$。

由命题 2.1 和(G1)-(G2)可得，D 在 $L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$ 中连续，因此由嵌入定理，D 在 $H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 中连续；若满足(CG2)，则 D 在 $L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^{2+\frac{4}{3+\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ 中连续。因此，$I^m \in C^1(\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3),\mathbb{R})$。

定义 C^1-泛函 $J : \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$

$$J(\lambda,u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\mathrm{e}^\lambda}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}D(u).$$

容易验证，对任意 $(\lambda,u) \in \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3)$

$$I^m(\lambda,u) = J(\lambda,u) - \frac{\mathrm{e}^\lambda}{2}m.$$

对固定的 $\lambda \in \mathbb{R}$，u 是 $J(\lambda,\cdot)$ 的临界点当且仅当 u 是

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathrm{e}^\lambda u = (I_\alpha * G(u))g(u),\ x \in \mathbb{R}^3, \\ u \in H_r^1(\mathbb{R}^3); \end{cases}$$

的解，其中 u 是弱解。

受 Pohozaev 恒等式的启发，引入 Pohozaev 泛函 $P : \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$，定义如下

$$P(\lambda,u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{3}{2}\mathrm{e}^\lambda\|u\|_2^2 - \frac{3+\alpha}{2}D(u).$$

考虑 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 上的 $\mathbb{Z}_2$ 作用，即

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (\pm 1,\tau) \mapsto \pm\tau,$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \left(\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3)\right) \to \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3); (\pm 1,\lambda,u) \mapsto (\lambda,\pm u).$$

在(G5)的假设下，I^m, J, P 对于 u 是偶的，即

$$I^m(\lambda,-u) = I^m(\lambda,u), J(\lambda,-u) = J(\lambda,u), P(\lambda,-u) = P(\lambda,u).$$

用 $P_2 : \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3) \to H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 表示第二个分量的投影，即

$$P_2(\lambda,u)=u,\ \forall(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3).$$

3. Palais-Smale-Pohozaev 条件和形变定理

对任意 $c\in\mathbb{R}$，令

$$K_c^m=\left\{(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3):I^m(\lambda,u)=c,\partial_\lambda I^m(\lambda,u)=0,\partial_u I^m(\lambda,u)=0,P(\lambda,u)=0\right\}.$$

在(G1)-(G2)的条件下，对任意 $(\lambda,u)\in K_c^m$，则 $P(\lambda,u)=0$。在(G5)的条件下，K_c^m 在 $\mathbb{Z}_2$ 作用下是不变的，即

$$(\lambda,u)\in K_c^m\Rightarrow(\lambda,-u)\in K_c^m.$$

受[3]的启发，引入 Palais-Smale-Pohozaev 条件，它是比 Palais-Smale 条件更弱的紧性条件。应用新的紧性条件，将证明当 $c<0$ 时，K_c^m 时紧的。

定义 3.1 若 $(\lambda_n,u_n)\subset\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3)$ 被称为Palais-Smale-Pohozaev 序列(简称 $(PSP)_c$ 序列)，对任意 $c\in\mathbb{R}$，I^m 在水平 c 满足如下条件

$$I^m(\lambda_n,u_n)\to c,$$

$$\partial_\lambda I^m(\lambda_n,u_n)\to 0,$$

$$\left\|\partial_u I^m(\lambda_n,u_n)\right\|_{\left(H_r^1(\mathbb{R}^N)\right)^*}\to 0,$$

$$P(\lambda_n,u_n)\to 0.$$

则 (λ_n,u_n) 在 $\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中有强收敛的子列。

命题 3.2 ([10]) 假设(G1)-(CG2)-(CG3)成立且 $c<0$。则 I^m 满足 $(PSP)_c$ 条件。

推论 3.3 ([10]) 假设(G1)-(CG2)-(CG3)成立且 $c<0$。则 $K_c^m\cap(\mathbb{R}\times\{0\})=\varnothing$ 且 K_c^m 是紧的。

证明 若 $I^m(\lambda,0)=-\frac{\mathrm{e}^\lambda}{2}\neq 0$，则 $K_c^m\cap(\mathbb{R}\times\{0\})=\varnothing$；由命题 3.2 知，在 $c=0$ 处 $(PSP)_0$ 不成立。事实上，当 $\lambda_n\to-\infty$ 时，由 $(PSP)_0$ 的无界序列 $(\lambda_n,0)$ 可知，K_c^m 是紧的。

由[2] [3]，定义

$$M:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3)$$

并且引入增广泛函 $F^m:M\to\mathbb{R}$

$$F^m(\theta,\lambda,u):=I^m\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right),\ \forall(\theta,\lambda,u)\in M.$$

由 I^m 的伸缩性质可得

$$\partial_\theta F^m(\theta,\lambda,u)=P\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right).$$

考虑在 M 上的 $\mathbb{Z}_2$ 作用，即

$$\mathbb{Z}_2\times M\to M;\ (\pm1,\theta,\lambda,u)\mapsto(\theta,\lambda,\pm u)$$

并且由(G5)可知，F^m 是 $\mathbb{Z}_2$ 不变的，即

$$F^m(\theta,\lambda,-u)=F^m(\theta,\lambda,u).$$

在 M 上引入一个度量

$$\|(\alpha,v,h)\|_{(\theta,\lambda,u)}^2 := \left|\left(\alpha,v,\left\|h\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right\|_{H^1}\right)\right|^2$$

对任意 $(\alpha,v,h)\in T_{(\theta,\lambda,u)}M \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)$，$M$ 是 Hilbert 流形。用 $\|\cdot\|_{(\theta,\lambda,u),*}$ 表示 $T_{(\theta,\lambda,u)}^*M$ 上的对偶模。$\|\cdot\|_{(\theta,\lambda,u)}$ 和 $\|\cdot\|_{(\theta,\lambda,u),*}$ 只依赖于 θ。

定义

$$D := \left(\partial_\theta,\partial_\lambda,\partial_u\right)$$

是关于所有变量的梯度。直接计算可得

$$DF^m(\theta,\lambda,u)(\alpha,v,h) = P\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right)\alpha + \partial_\lambda I^m\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right)v + \left\langle \partial_u I^m\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right),h\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right\rangle$$

对任意 $(\theta,\lambda,u)\in M$ 且 $(\alpha,v,h)\in T_{(\theta,\lambda,u)}M$，因此

$$\left\|DF^m(\theta,\lambda,u)\right\|_{(\theta,\lambda,u),*}^2 = \left|P\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right)\right|^2 + \left|\partial_\lambda I^m\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right)\right|^2 + \left\|\partial_u I^m\left(\lambda,u\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right)\right\|_{\left(H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)^*}^2.$$

定义

$$\tilde{K}_c^m := \left\{(\theta,\lambda,u)\in M : F^m(\theta,\lambda,u)=c, DF^m(\theta,\lambda,u)=0\right\}$$

是 F^m 在水平 c 的临界点集，并且可推出

$$\tilde{K}_c^m = \left\{\left(\theta,\lambda,u\left(\mathrm{e}^{\theta}\right)\right) : (\lambda,u)\in K_c^m, \theta\in\mathbb{R}\right\}.$$

引入两点之间的标准距离作为连接两点的曲线的长度，即

$$\begin{aligned} & d_M\left(\left(\theta_0,\lambda_0,h_0\right),\left(\theta_1,\lambda_1,h_1\right)\right) \\ & := \inf\left\{\int_0^1 \left\|\dot{\gamma}(t)\right\|_{\gamma(t)} \mathrm{d}t : \gamma\in C^1([0,1],M), \gamma(0)=\left(\theta_0,\lambda_0,h_0\right), \gamma(1)=\left(\theta_1,\lambda_1,h_1\right)\right\}. \end{aligned}$$

命题 3.4 ([14]) 令 $c<0$ 且假设(G1)-(CG2)-(CG3)成立。则 F^m 满足 $\widetilde{(PSP)}_c$，即对任意 $\left\{\left(\theta_n,\lambda_n,u_n\right)\right\}\subset M$，当 $n\to+\infty$ 时，有

$$F^m\left(\theta_n,\lambda_n,u_n\right)\to c,$$

$$\left\|DF^m\left(\theta_n,\lambda_n,u_n\right)\right\|_{\left(\theta_n,\lambda_n,u_n\right),*}\to 0.$$

在子列意义下，

$$d_M\left(\left(\theta_n,\lambda_n,u_n\right),\tilde{K}_c^m\right)\to 0.$$

$\widetilde{(PSP)}_c$ 条件不同于标准 Palais-Smale-Pohozaev 条件并且经过适当放缩后保证了紧性。若 $\tilde{K}_c^m\neq\varnothing$，则 $\tilde{K}_c^m$ 不紧。

对 $c\in\mathbb{R}$，记

$$\left[I^m\le c\right] := \left\{(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right) : I^m(\lambda,u)\le c\right\},$$

$$\left[F^m\le c\right]_M := \left\{(\theta,\lambda,u)\in M : F^m(\theta,\lambda,u)\le c\right\}.$$

命题 3.5 ([14]) 假设(G1)-(CG2)-(CG3)。令 $c<0$ 且 O 为 K_c^m 具有 $\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ 标准距离的领域。令 $\bar{\varepsilon}>0$，则存在 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon})$ 和 $\eta:[0,1]\times\left(\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\to\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ 连续，使得

1) $\eta(0,\cdot,\cdot)=id_{\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)}$；

2) 对任意$t\in[0,1]$，使得$\eta(t,\cdot,\cdot)=id_{[I^m\le c-\bar{\varepsilon}]}$；

3) I^m沿着η不增并且对任意$t\in[0,1]$，$I^m(\eta(t,\cdot,\cdot))\le I^m(\cdot,\cdot)$；

4) 若$K_c^m=\varnothing$，则$\eta(1,[I^m\le c+\varepsilon])\subset[I^m\le c-\varepsilon]$；

5) 若$K_c^m\ne\varnothing$，则

$$\eta(1,[I^m\le c+\varepsilon]\setminus \mathrm{O})\subset[I^m\le c-\varepsilon]$$

并且

$$\eta(1,[I^m\le c+\varepsilon])\subset[I^m\le c-\varepsilon]\cup \mathrm{O};$$

6) 若(G5)成立，则$\eta(t,\cdot,\cdot)$是$\mathbb{Z}_2$等变的，即令$\eta=(\eta_1,\eta_2)$，η_1关于u是偶的，η_2关于u是奇的。

命题 3.6 ([14]) 假设(G1)-(CG2)-(CG3)。令$c<0$且$\tilde{\mathrm{O}}$为$\tilde{K}_c^m$具有d_M标准距离的领域。令$\bar{\varepsilon}>0$，则存在$\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon})$和$\tilde{\eta}:[0,1]\times M\to M$连续，使得

1) $\tilde{\eta}(0,\cdot,\cdot,\cdot)=id_M$；

2) 对任意$t\in[0,1]$，使得$\tilde{\eta}(t,\cdot,\cdot,\cdot)=id_{[F^m\le c-\bar{\varepsilon}]_M}$；

3) F^m沿着$\tilde{\eta}$不增并且对任意$t\in[0,1]$，$F^m(\tilde{\eta}(t,\cdot,\cdot,\cdot))\le F^m(\cdot,\cdot,\cdot)$；

4) 若$\tilde{K}_c^m=\varnothing$，则$\tilde{\eta}(1,[F^m\le c+\varepsilon]_M)\subset[F^m\le c-\varepsilon]_M$；

5) 若$\tilde{K}_c^m\ne\varnothing$，则

$$\tilde{\eta}(1,[F^m\le c+\varepsilon]_M\setminus\tilde{\mathrm{O}})\subset[F^m\le c-\varepsilon]_M$$

并且

$$\tilde{\eta}(1,[F^m\le c+\varepsilon]_M)\subset[F^m\le c-\varepsilon]_M\cup\tilde{\mathrm{O}};$$

6) 若(G5)成立，则$\tilde{\eta}(t,\cdot,\cdot)$是$\mathbb{Z}_2$等变的，即令$\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_0,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)$，$\tilde{\eta}_0,\tilde{\eta}_1$关于$u$是偶的，$\tilde{\eta}_2$关于$u$是奇的。

4. 极大极小方法

对于$n\in\mathbb{N}^+$且$\lambda\in\mathbb{R}$，引入奇路径的集合

$$\Gamma_n(\lambda):=\left\{\gamma\in C\left(D_n,H_r^1(\mathbb{R}^3)\right):\gamma\text{ 是奇的, } J\left(\lambda,\gamma|_{\partial D_n}\right)<0\right\}$$

和极大极小值

$$a_n(\lambda):=\inf_{\gamma\in\Gamma_n(\lambda)}\sup_{\xi\in D_n}J(\lambda,\gamma(\xi)).$$

命题 4.1 ([10]) 假设(G1)-(G4)成立。令$n\in\mathbb{N}^+$且$\lambda\in\mathbb{R}$。则$\Gamma_n(\lambda)\ne\varnothing$，因此$\Gamma_n(\lambda)\ne\varnothing$有定义。此外，$a_n(\lambda)>0$且$a_n(\lambda)\le a_{n+1}(\lambda)$。

定理 4.2 ([10]) 令$u\in H_r^1(\mathbb{R}^3)$是径向的且$\alpha\in(0,3)$。则$I_\alpha*u$是径向的且

$$(I_\alpha*u)(r)=r^\alpha\int_0^\infty F_\alpha\left(\frac{r}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha u(\rho)\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho},$$

其中$F_\alpha>0$且存在$C_{N,0},C_{N,\infty},C_{N,\alpha}>0$，使得

$$F_\alpha(s)\to C_{N,0}>0,\text{ 当 } s\to0;\ \frac{F_\alpha(s)}{s^{\alpha-N}}\to C_{N,\infty},\text{ 当 } s\to+\infty$$

且

$$\frac{F_\alpha(s)}{G_\alpha(s)} \to 1,\ 当\ s \to 1,$$

其中

$$G_\alpha(s) := \begin{cases} C_{N,\alpha} & 若\ \alpha \in (1,3), \\ C_{N,\alpha}\left|\log|s-1|\right| & 若\ \alpha = 1, \\ C_{N,\alpha}|s-1|^{\alpha-1} & 若\ \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

令

$$A(R,h) := \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \in [R-h, R+h]\right\},$$

$$\chi(R,h;x) := \begin{cases} 1 & x \in A(R,h), \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

对任意 $R \gg h > 0$。

引理 4.3 ([10]) 当 $h \to 0$ 时，

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} I_\alpha(x-y)\chi(1,h;x)\chi(1,h;y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim \begin{cases} h^2 & 若\ \alpha \in (1,3), \\ h^2|\log h| & 若\ \alpha = 1, \\ h^{1+\alpha} & 若\ \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

引理 4.4 ([10]) 当 $i < j$，则

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} I_\alpha(x-y)\chi\left(R^i, h_{R^i}; x\right)\chi\left(R^j, h_{R^j}; y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to 0,\ 当\ R \to \infty.$$

命题 4.5 ([10]) 假设(G1)-(G4)成立且令 $n \in \mathbb{N}^+$。

1) 若(CG3)成立，则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{a_n(\lambda)}{\mathrm{e}^\lambda} = +\infty$。

2) 若(CG4)成立，则 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \dfrac{a_n(\lambda)}{\mathrm{e}^\lambda} = 0$。

考虑 Pohozaev 水平集

$$\Omega := \left\{(\lambda,u) \in \mathbb{R}\times H_r^1(\mathbb{R}^3) : P(\lambda,u) > 0\right\} \cup \left\{(\lambda,0) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

在(G5)的假设下，Ω 关于轴 $\left\{(\lambda,0) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ 对称，即

$$(\lambda,u) \in \Omega \Rightarrow (\lambda,-u) \in \Omega.$$

引理 4.6 ([10]) $\left\{(\lambda,0) : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathrm{int}(\Omega)$。

命题 4.7 ([10]) 假设(G1)-(G4)。则下列性质成立

1) 若 $(\lambda,u) \in \Omega$，则 $J(\lambda,u) \ge 0$。

2) 若 $(\lambda,u) \in \partial\Omega$，则 $J(\lambda,u) \ge a_1(\lambda) > 0$。

3) 假设(CG3)。对任意 $m > 0$，令

$$E^m := \inf_{(\lambda,u)\in\partial\Omega} I^m(\lambda,u)\ 且\ B^m := \inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left(a_1(\lambda) - \frac{\mathrm{e}^\lambda}{2}m\right).$$

则 $E^m \ge B^m > -\infty$。特别地，$B^m \in \mathbb{R}$ 且对 $(\lambda,u)\in\partial\Omega$，则 $I^m(\lambda,u)\ge B^m$。

令 $m>0$ 且 $n\in\mathbb{N}^+$，

$$\Gamma_n^m := \left\{\Theta\in C\left(D_n,\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right):\Theta\text{ 是 }\mathbb{Z}_2\text{ 等变的}, I^m\left(\Theta(0)\right)\le B^m-1, \Theta\big|_{\partial D_n}\notin\Omega, I^m\left(\Theta\big|_{\partial D_n}\right)\le B^m-1\right\}$$

且

$$b_n^m := \inf_{\Theta\in\Gamma_n^m}\sup_{\xi\in D_n} I\left(\Theta(\xi)\right);$$

$\Theta=(\Theta_1,\Theta_2)\in\Gamma_n^m$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 等变的，即 Θ_1 是偶的，Θ_2 是奇的，此外，$\Theta_2(0)=0$ 蕴含着 $\Theta(0)\in\Omega$。

命题 4.8 ([10]) 假设(G1)-(G2)-(CG3)-(G4)-(G5)成立。则下列性质成立：

1) 对任意 $m>0$，$n\in\mathbb{N}^+$，则 $\Gamma_n^m\ne\varnothing$ 且 $\lambda\in\mathbb{R}$ 时，

$$b_n^m \le a_n(\lambda)-\mathrm{e}^{\lambda}\frac{m}{2}.$$

此外，b_n^m 关于 n 递增。

2) 对任意 $k\in\mathbb{N}^+$，存在 $m_k\ge 0$，其中 $m_k := 2\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}\dfrac{a_k(\lambda)}{\mathrm{e}^{\lambda}}$，使得对 $m>m_k$

$$b_n^m<0, n=1,2,\cdots,k.$$

此外，m_k 关于 k 递增。

3) 若(CG4)成立，则对任意 $k\in\mathbb{N}^+$ 有 $m_k=0$。即对任意 $m>0$，$k\in\mathbb{N}^+$，有 $b_n^m<0$。

推论 4.9 ([10]) 对任意 $m>0$，则 $B^m=E^m=b_1^m$。

对 $c<0$，I^m 满足 $(PSP)_c$ 条件且形变引理成立。令 $m_k\ge 0$，当 $m>m_k$ 时，$b_n^m<0, n=1,2,\cdots,k$ 是 I^m 的临界值。为了解决 $n\ne n'$ 时，$b_n^m=b_{n'}^m$ 的情况，引入了亏格理论。

设 X 为 Banach 空间，集合 $A\subset X$ 称为关于原点对称的，是指若 $x\in A$，则 $-x\in A$。记 N 为 X 中关于原点对称的闭子集的全体。非负整值函数 $g:N\to\mathbb{Z}_+\cup\{+\infty\}$ 称为 N 上的 $\mathbb{Z}_2$ 亏格，是指 g 满足

1) 当 $A=\varnothing$ 时，$g(A)=0$；
2) 当 $A\ne\varnothing$ 时，$g(A)=\min\left\{m\in\mathbb{Z}_+:\text{存在连续的奇映射 }\varphi:A\to\mathbb{R}^m\setminus\{0\}\right\}$；
3) 若对任何自然数 m，都不存在连续奇映射 φ，则 $g(A)=+\infty$。

对任意 $n\in\mathbb{N}^+$，定义

$$\Lambda_n^m := \left\{A=\Theta\left(\overline{D_{n+l}\setminus Y}\right): l\in\mathbb{N}, \Theta\in\Gamma_{n+l}^m, Y\subset D_{n+l}\setminus\{0\}\text{是对称闭的}, g(Y)\le l\right\}$$

且

$$c_n^m := \inf_{A\in\Lambda_n^m}\sup_{(\lambda,u)\in A} I^m(\lambda,u).$$

命题 4.10 ([10]) 假设(G1)-(G2)-(CG3)-(G4)成立。令 $n\in\mathbb{N}^+$ 且 $m>0$。则

1) $\Lambda_n^m\ne\varnothing$；
2) $\Lambda_{n+1}^m\subset\Lambda_n^m$，且 $c_n^m\le c_{n+1}^m$；
3) $c_n^m\le b_n^m$；
4) $B^m=E^m\le c_1^m$。

令 $A\in\Lambda_n^m$ 且 $Z\subset\mathbb{R}\times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ 是 $\mathbb{Z}_2$ 等变，闭的，使得 $0\notin\overline{P_2(Z)}$ 且 $g\left(\overline{P_2(Z)}\right)\le i<n$。则 $\overline{A\setminus Z}\in\Lambda_{n-i}^m$。

命题 4.11 ([10]) 假设(G1)-(CG2)-(CG3)-(G4)-(G5)成立。固定 $k\in\mathbb{N}^+$ 且假设 $m>m_k$。则

$$c_1^m \le c_2^m \le \cdots \le c_k^m < 0$$

是 I^m 的临界值。此外

1) 存在 $q \in \mathbb{N}^+$，使得

$$c_n^m < c_{n+1}^m < \cdots < c_{n+q}^m < 0$$

则有 $q+1$ 个非零临界值，因此(7)有 $q+1$ 对不同的非平凡解。

2) 存在 $q \in \mathbb{N}^+$，使得

$$c_n^m = c_{n+1}^m = \cdots = c_{n+q}^m =: b < 0$$

则 $g\left(P_2\left(K_c^m\right)\right) \ge q+1$ 且 $g\left(P_2\left(K_c^m\right)\right) = +\infty$，这蕴含着(7)有无穷多对不同的解。

5. 主要定理证明

定理 1 的证明 根据命题 4.11 可推出(1)。通过(1)可证明(2)成立。在条件(G4)的假设下，对任意 $k \in \mathbb{N}$，则有 $m_k = 0$。因此，对任意 $n \in \mathbb{N}$，c_n^m 是 I^m 的临界点且 $c_n^m \le b_n^m < 0$。由于 c_n^m 是递增列，则当 $n \to \infty$ 时，$c_n^m \to \overline{c} \le 0$。

现在证明 $\overline{c} = 0$。假设 $\overline{c} < 0$。由推论 3.3，命题 3.5，命题 4.11 以及 $q = g\left(P_2\left(N_\delta\left(K_{\overline{c}}^m\right)\right)\right) < \infty$，则

$$\eta\left(1, I^{\overline{c}+\varepsilon} \setminus N_\delta\left(K_{\overline{c}}^m\right)\right) \subset I^{\overline{c}-\varepsilon} \tag{10}$$

且当 $I^m(\lambda, u) \le B_m - 1$ 时，

$$\eta(t, \lambda, u) = (\lambda, u). \tag{11}$$

对充分大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $c_n^m > \overline{c} - \varepsilon$。令 $B \in \Lambda_{n+i}^m$ 使得 $B \subset I^{\overline{c}+\varepsilon}$。则

$$\overline{B \setminus N_\delta\left(K_{\overline{c}}^m\right)} \in \Lambda_n^m.$$

由(10)和(11)可得 $c_n^m < \overline{c} - \varepsilon$，矛盾。

定理 2 的证明 一方面，若方程(8)有无穷多解 $(\mu, u, \kappa) \in \mathbb{R} \times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right) \times \mathbb{R}_+$，则在弱意义下，

$$-\Delta u + \mu u = \left(I_\alpha * G(u)\right) g(u),\ x \in \mathbb{R}^3$$

且

$$\kappa = a + b\kappa^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

令 $v(x) = u\left(\kappa^{-\frac{1}{2}} x\right) = u(y)$，则

$$\begin{aligned} & -\left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right) \Delta v(x) + \mu v(x) \\ & = -\kappa^{-1}\left(a + b\kappa^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(y)|^2 \,\mathrm{d}x\right) \Delta u(y) + \mu u(y) \\ & = \left(I_\alpha * G(u(y))\right) g(u(y)) = \left(I_\alpha * G(v(x))\right) g(v(x)). \end{aligned}$$

则蕴含方程(1)有无穷多解 (μ, u)。

另一方面，若方程(1)有无穷多解 $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times H_r^1\left(\mathbb{R}^3\right)$，则在弱意义下，

$$-\left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x\right) \Delta v + \mu v = \left(I_\alpha * G(v)\right) g(v),\ x \in \mathbb{R}^3.$$

令 $\kappa = a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x$ 且 $u(x) = v\left(\kappa^{\frac{1}{2}} x\right) = v(y)$，则

$$\kappa = a + b\kappa^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

且

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \mu u(x) &= -\kappa \Delta v(y) + \mu v(y) \\ &= -\left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v(y)|^2 \mathrm{d}x\right) \Delta v(y) + \mu v(x) \\ &= \left(I_\alpha * G(v(y))\right) g(v(y)) \\ &= \left(I_\alpha * G(u(x))\right) g(u(x)). \end{aligned}$$

则蕴含方程(1)有无穷多解 (μ, u, κ)。此外 u, v 具有相同的径向对称性。因此，定理 2 的证明可从定理 1 的证明与上述结论得到。

参考文献

[1] Pekar, S.I. (1954) Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. Akademie Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783112649305

[2] Lieb, E.H. (1977) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Studies in Applied Mathematics*, **57**, 93-105. https://doi.org/10.1002/sapm197757293

[3] Hirata, J., Ikoma, N. and Tanaka, K. (2010) Nonlinear Scalar Field Equations in $\mathbb{R}^N$: Mountain Pass and Symmetric Mountain Pass Approaches. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **35**, 253-276.

[4] Hirata, J. and Tanaka, K. (2019) Nonlinear Scalar Field Equations with L^2 Constraint: Mountain Pass and Symmetric Mountain Pass Approaches. *Advanced Nonlinear Studies*, **19**, 263-290. https://doi.org/10.1515/ans-2018-2039

[5] Kirchhoff, G. (1883) Mechanik. Teubner, Leipzig.

[6] Arosio, A. and Panizzi, S. (1996) On the Well-Posedness of the Kirchhoff String. *American Mathematical Society*, **348**, 305-330. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01532-2

[7] Cavalcanti, M.M., Cavalcanti, V.N.D. and Soriano, J.A. (2001) Global Existence and Uniform Decay Rates for the Kirchhoff-Carrier Equation with Nonlinear Dissipation. *Advances in Difference Equations*, **6**, 701-730. https://doi.org/10.57262/ade/1357140586

[8] D'Ancona, P. and Spagnolo, S. (1992) Global Solvability for the Degenerate Kirchhoff Equation with Real Analytic Data. *Inventiones Mathematicae*, **108**, 247-262. https://doi.org/10.1007/BF02100605

[9] He, X. and Zou, W. (2010) Multiplicity of Solutions for a Class of Kirchhoff Type Problems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **26**, 387-394. https://doi.org/10.1007/s10255-010-0005-2

[10] Cingolani, S., Gallo, M. and Tananka, K. (2022) Multiple Solutions for the Nonlinear Choquard Equation with Even or Odd Nonlinearities. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **68**, 1-34. https://doi.org/10.1007/s00526-021-02182-4

[11] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations II: Existence of Infinitely Many Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 347-375. https://doi.org/10.1007/BF00250556

[12] Wu, K. and Zhou, F. (2019) Nodal Solutions for a Kirchhoff Type Problem in $\mathbb{R}^N$. *Applied Mathematics Letters*, **88**, 58-63. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.08.008

[13] Lieb, E.H. (1983) Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities. *Annals of Mathematics*, **118**, 349-374. https://doi.org/10.2307/2007032

[14] Cingolani, S., Gallo, M. and Tanaka, K. (2021) Normalized Solutions for Fractional Nonlinear Scalar Field Equation via Lagrangian Formulation. *Nonlinearity*, **34**, 4017-4056. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac0166