Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 126-130
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141014

Hans汉斯

小议向量组线性相关性的判别方法

偶世坤

江西理工大学理学院，江西 赣州

收稿日期：2023年11月21日；录用日期：2023年12月8日；发布日期：2024年1月19日

摘 要

判断向量组的线性相关性是线性代数课程的重点内容之一。本文以一个向量组为例介绍几种判别线性相关性的方法。

关键词

向量组，线性相关性，线性方程组，矩阵，二次型

A Brief Discussion on Discriminant Methods of Linear Dependent of Vector Sets

Shikun Ou

School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, JXUST, Ganzhou Jiangxi

Received: Nov. 21st, 2023; accepted: Dec. 8th, 2023; published: Jan. 19th, 2024

Abstract

Judging the linear dependent of vector sets is a key content in linear algebra. In this article, taking a vector set as an example, we present several methods for distinguishing linear dependent of vector sets.

Keywords

Vector Set, Linear Dependent, System of Linear Equations, Matrix, Quadratic Form

文章引用: 偶世坤. 小议向量组线性相关性的判别方法[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 126-130.
DOI: 10.12677/pm.2024.141014

1. 引言

本文所涉及的向量均指列向量，$m,n\ge 2$，所涉及的概念可参见[1] [2]。

判断向量组的线性相关性，即确定向量组是线性相关还是线性无关，是线性代数课程的重点内容之一。如何判断一个向量组的线性相关性呢？关于这方面的讨论可参见[3] [4] [5]。本文将以下面的向量组为例介绍几种判别线性相关性的方法。

例 1：判断向量组 $\alpha_1=(0,1,1,-1)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,0,-1,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(1,-1,0,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_4=(-1,1,1,0)^{\mathrm T}$ 的线性相关性。

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$。则 $\alpha_1=(0,1,1,-1)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,0,-1,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(1,-1,0,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_4=(-1,1,1,0)^{\mathrm T}$ 是矩阵 A 的列向量组。

下文将以例 1 中的向量组为例分别介绍如何用线性向量组、向量组的秩、初等变换、行列式、特征值、二次型判断向量组的线性相关性。

2. 利用线性方程组判断向量组的线性相关性

由线性无关的定义可知，向量组 $\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^{\mathrm T},\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2})^{\mathrm T},\cdots,\alpha_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^{\mathrm T}$ 线性无关当且仅当向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 只有零解，当且仅当齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{1}$$

只有零解。于是，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性相关性可由(1)是否有非零解进行判断。

命题 2 向量组 $\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})^{\mathrm T},\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2})^{\mathrm T},\cdots,\alpha_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})^{\mathrm T}$ 线性无关当且仅当(1)只有零解。

命题 2 给出了用线性方程组判断向量组线性相关性的方法。即，先用克莱姆法则判断对应的齐次线性方程组(1)是否有非零解，进而用命题 2 得到向量组是否线性相关。当(1)只有零解时，该向量组线性无关；当(1)有非零解时，该向量组线性相关。

例 1 的解法一：考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_2+x_3-x_4=0\\x_1-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_4=0\\-x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\tag{2}$$

易知，方程组(2)的系数行列式不等于 0，故由克莱姆法则知(2)只有零解。因此，由命题 1 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

3. 利用向量组的秩

向量组的秩是指它的极大无关组中向量的个数。由此可知，线性无关向量组的秩等于它的向量个数，而线性相关向量组的秩小于它的向量个数，所以有下一结论。

命题 3 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅该向量组的秩小于 n。

命题 3 给出了用向量组的秩判断其线性相关性的方法。即，先用该向量组的性质(比如，它与其它向量组的关系等)确定它的秩，进而用命题 3 得到向量组是否线性相关。当该向量组的秩等于个数时，该向量组线性无关；否则，该向量组线性相关。

例 1 的解法三： 设 $\varepsilon_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\varepsilon_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\varepsilon_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，而

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix},$$

则

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&2&-1&1\\1&-1&2&1\\-1&1&1&2\end{pmatrix}.$$

由此可见，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示。显然，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 线性表示。所以，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 等价，进一步得知两个向量组有相同的秩。而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是线性无关的，即该向量组的秩为 4，于是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩也是 4。因此，由命题 3 可得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

4. 利用初等变换

对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩等于矩阵 B 的秩，所以由命题 3 立得下一命题。

命题 4 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅当 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的秩小于 n。

命题 4 给出了用初等变换判断向量组线性相关性的方法。即，先将该向量组按列(或行)排成一个矩阵，然后对矩阵进行初等变换将其化为行阶梯形矩阵。于是，由行阶梯形矩阵的非零行个数可以确定该矩阵的秩，进而确定出原向量组的秩。最后，再根据命题 4 判断向量组是否线性相关。当矩阵的秩等于向量组中向量的个数时，该向量组线性无关；否则，该向量组线性相关。

例 1 的解法四： 对 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$ 作初等行变换，得

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&-1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&-1\\0&0&2&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

由此可见 A 的秩为 4，进而由命题 4 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

5. 利用行列式

对于 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。因为方阵 B 可逆(即 B 的秩等于 n)当且仅当 B 的行列式不为零，所以由命题 4 进一步得到下一结论。

命题 5 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅 $\det(B)\neq 0$，其中 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。

当向量组中向量的个数等于维数时，命题 5 给出了用行列式判断向量组线性相关性的方法。即，先将该向量组按列(或行)排成一个行列式，然后计算出行列式的值。最后，再根据命题 5 判断向量组是否线性相关。当行列式的值为零时，该向量组线性相关；否则，该向量组线性无关。

例 1 的解法五： 设 $D=\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，则

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

所以，由命题 5 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

6. 利用矩阵的特征值

由于相似变换不改变矩阵的秩，故由命题 4 立得下一结论。

命题 6 n 维实向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的特征值均不为零。

当向量组中向量的个数等于维数时，命题 6 给出了用特征值判断向量组线性相关性的方法。即，先将该向量组按列(或行)排成一个方阵，然后确定出方阵的所有特征值。最后，再根据命题 6 判断向量组是否线性相关。当方阵的所有特征值均不为零时，该向量组线性无关；否则，该向量组线性相关。

例 1 的解法六： 因为 A 的特征多项式为 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$，所以 A 的全部特征值为 1，1，1，-3。故由命题 6 得知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

7. 利用二次型

对于 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。如果 B 是对称矩阵，则 B 可逆(即 B 的秩等于 n)当且仅当它的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=XBX^{\mathrm{T}}$ 的惯性指数为 n，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。故由命题 4 立得下一结论。

命题 7 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量组，且 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是对称矩阵。则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关当且仅二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=XBX^{\mathrm{T}}$ 的惯性指数为 n。

命题 7 给出了用二次型判断向量组线性相关性的方法。如果向量组中向量的个数等于维数，且该向量组按列(或行)排成的方阵是对称矩阵，则对称矩阵对应于一个二次型。先将二次型用可逆线性变化化为标准形，从而确定该二次型的惯性指数。于是由命题 7 判断原向量组是否线性相关。当二次型的惯性指数等于向量组中向量的个数时，该向量组线性无关；否则，该向量组线性相关。

例 1 的解法七：显然，A 的二次型为

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4 .$$

先对 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 作非退化线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

可得 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2y_1^2-2y_2^2+4y_2y_3-4y_2y_4+2y_3y_4$。再作非退化线性变换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 - \frac{1}{2}z_4 \\ y_3 = z_3 + \frac{1}{2}z_4 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$$

可得 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2z_1^2-2z_2^2+2z_3+\frac{3}{2}z_4$。由于该二次型的惯性指数为 4，故而由命题 7 得知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

基金项目

江西省教育厅基金项目 GJJ2200841。

参考文献

[1] 董秋仙, 张师贤. 线性代数[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2018.

[2] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[3] 李德琼, 谢小良, 王仲梅. 判断向量组线性相关性的若干方法[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2021, 34(1): 14-16.

[4] 王晓欣. 向量组线性相关性判定方法的探讨[J]. 邯郸职业技术学院学报, 2019, 32(4): 89-91.

[5] 尹修伟, 宋贤梅. 一类向量组线性相关性的判定方法探究[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(3): 96-97.