Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 176-183
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141019

Hans汉斯

具有Hadamard缺项幂级数的双曲完备极小曲面

邵　煜

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年11月27日；录用日期：2023年12月11日；发布日期：2024年1月23日

摘　要

对具有Hadamard间隙的某缺项幂级数增加或减弱适当的条件，利用Brito构造 $\mathbb{R}^3$ 中位于两个平行平面间完备极小曲面族的方法，将和式拆分为三项估计项，利用Cauchy-Schwarz不等式对估计项进行放缩，修正并进一步精确范围以继续构造极小曲面，给出实例。在此基础上利用Weierstrass表示对寻找 $\mathbb{R}^3$ 中一个完备极小曲面的Gauss映射。

关键词

完备极小曲面，Hadamard缺项幂级数，Weierstrass表示对，Cauchy-Schwarz不等式

Hyperbolic Complete Minimal Surfaces with Power Series of Hadamard Gaps

Yu Shao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Nov. 27th, 2023; accepted: Dec. 11th, 2023; published: Jan. 23rd, 2024

Abstract

For a special power series with Hadamard gaps increasing or decreasing appropriate conditions, using Brito's method of constructing a complete minimal surface family between two parallel planes in $\mathbb{R}^3$, the sum was split into three estimated terms, and Cauchy-Schwarz inequality was used to scale the estimated terms. The range was modified and further refined to continue the construction of minimal surfaces. Examples were given. On this basis, Weierstrass representation pair was used to find a Gauss map of a complete minimal surface in $\mathbb{R}^3$.

文章引用: 邵煜. 具有 Hadamard 缺项幂级数的双曲完备极小曲面[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 176-183.
DOI: 10.12677/pm.2024.141019

Keywords

Complete Minimal Surface, Power Series with Hadamard Gaps, Weierstrass Representation Pair, Cauchy-Schwarz Inequality

1. 引言

极小曲面的研究与发展有着其独特的魅力，例如 Plateau 的肥皂膜实验，引发了许多数学家对该问题不断地探索与发现。我们普遍认为极小曲面的研究开始于 Lagrange 和 Euler 寻找平面上某区域给定边界值的极小图并给出方程。随后极小曲面开始迅速发展，大致经历了三个黄金发展期，数学家们极大的丰富了极小曲面及其例子，到现在，我们甚至可以在计算机的帮助下找到更多新的嵌入极小曲面的例子，推动数学物理等方面的发展，同时我们也通过复分析、泛函分析、几何测度论等其他数学分支给极小曲面理论提供了新方法。

极小曲面是微分几何中的重要课题，其理论也成为微分几何中内容丰富的分支，推动着共形几何、可积系统等其他数学分支的发展；但是由于极小曲面的许多问题来源于自然界，所以它也有着结论虽易于见到和想象，却很难证明的迷人性质，吸引了许多学者进行深入研究。

1954 年，Calabi [1]提出以下两个猜想：

猜想 1 包含于 $\mathbb{R}^3$ 的半空间中的完备极小曲面一定是平面。

猜想 2 $\mathbb{R}^3$ 中的完备极小曲面是 $\mathbb{R}^3$ 中的无界子集。

1980 年，F. Xavier 和 L. M. Jorge [2]证明了 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行曲面间的完全极小曲面的存在性，即在 $\mathbb{R}^3$ 中存在非平坦的完备极小曲面完全包含在两个平行的平面之间。1996 年，N. Nadirashvili [3]证明了存在极小浸入到 $\mathbb{R}^3$ 中单位球的具有负 Gauss 曲率的完备极小曲面。

从而说明 Calabi 的两个猜想对浸入极小曲面均是错误的，但是他们的证明只是表明存在相应的完备极小曲面，他们的证明过程并没有给出具体的构造此类完备极小曲面的方法。

1992 年 Francisco. Fortes. De. Brito [4]巧妙解决了这个难题，他通过使用具有 Hadamard 间隙的特殊幂级数构造了 $\mathbb{R}^3$ 中位于两个平行平面间的完备极小曲面族，并给出了实例，因此得到如下定理。

定理 1 [4]若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j=1,2,\cdots$，且满足下列条件：

(a) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ 收敛；

(b) $\lim_{j\to\infty}|a_j|\min\{(n_j/n_{j-1}),(n_{j+1}/n_j)\}=\infty$；

(c) $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma |h'(z)|^2|\mathrm{d}z|=\infty$，

令 Weierstrass 表示[5]中的 $f=1$ 且 $g=h'$，即可得到 $\mathbb{R}^3$ 中两个平行平面间的完备极小曲面族。

但是可以发现定理中条件(b)要求较高，这意味着 $|a_j|$ 的收敛于零的速度远远慢于

$\min\left\{\left(n_j/n_{j-1}\right),\left(n_{j+1}/n_j\right)\right\}$ 趋于 ∞ 的速度，因此限制了 a_j 与 n_j 的取值。2022 年，张建肖[6]减弱此条件，限定 n_j 后项与前项的比值，并受孙道椿[7]证明方法的启发，扩大了条件(b)的范围，得到定理 2。

定理 2 [6]若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j=1,2,\cdots$，且满足下列条件：

(a) $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right|\le\eta<1$，$\left|a_j\right|\ne 0$；

(b) 对于充分大的 $k\in\mathbb{Z}^+$，满足 $\sum_{j=1}^{k-1}\left|a_j\right|n_j<\frac{1}{4e}\left|a_k\right|n_k$ 且 $\frac{q_k}{2}-\ln q_k\ge 1-\ln\frac{1-\eta}{8\eta}$，其中 $q_k=\frac{n_{k+1}}{n_k}$ 且 $q_k>2$；

(c) $\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma\left|h'(z)\right|^2\left|\mathrm{d}z\right|=\infty$。

2023 年，董丽丽[8]在此基础上进一步做出了改进，得到定理 3。

定理 3 [8]若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j\in\mathbb{Z}^+$，$\frac{n_{k+1}}{n_k}\ge q>1$，假设 $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ 为 q_k，且 $h(z)$ 满足下列条件：

(a) $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right|\le\eta<1$，$\left|a_j\right|\ne 0$；

(b) 对于充分大的 $k\in\mathbb{Z}^+$，满足 $\sum_{j=1}^{k-1}\left|a_j\right|n_j<\frac{1}{2e}\left|a_k\right|n_k$，$\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\le\frac{q-1}{q\left(q_k+1\right)}\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{q_k}{2}-1}-\eta q_k\right)$；

(c) $\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma\left|h'(z)\right|^2\left|\mathrm{d}z\right|=\infty$。

继续修正并精确范围得到定理 4。

定理 4 若 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个 Hadamard 缺项幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，$j\in\mathbb{Z}^+$，$\frac{n_{k+1}}{n_k}\ge q>1$，且 $h(z)$ 满足下列条件：

(a) $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right|\le\eta<1$，$\left|a_j\right|\ne 0$；

(b) 对于充分大的 $k\in\mathbb{Z}^+$，满足 $\sum_{j=1}^{k-1}\left|a_j\right|n_j<\frac{1}{4e}\left|a_k\right|n_k$，

$$\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\le\frac{1}{24q}\mathrm{e}^{\frac{q^2}{2}-1}\sqrt{\frac{q^2-q}{\left(q^4-q^3+q^2+1\right)+\left(q^2-q\right)\mathrm{e}^{q^2-q}}}；$$

(c) $\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^2 n_j$ 发散；

则对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的任意发散曲线 γ，有 $\int_\gamma\left|h'(z)\right|^2\left|\mathrm{d}z\right|=\infty$。

2. 相关定义

设 $\mathbb{D}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|<1\right\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，本文我们讨论 $\mathbb{D}$ 参数化下的完备极小曲面。

定义 1 [4]给定 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j z^{n_j}$ 是一个收敛半径为 1 的幂级数，其中，$z\in\mathbb{C}$，若 $\frac{n_{j+1}}{n_j}\ge q>1$，$j=1,2,\cdots$，则称 $h(z)$ 为 Hadamard 缺项幂级数。

定义 2 [9] $\mathbb{R}^3$ 中平均曲率 $H\equiv 0$ 的曲面称为极小曲面。

定义 3 [9]设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开子集。称连续曲线 $\gamma:[0,a)\to\Omega$ 是发散的，如果对 Ω 的任意紧子集 K，存在 $t_0<a$，使得对任意的 $t\in(t_0,a)$，$\gamma(t)\notin K$。

定义 4 [9]设 $I:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是一个浸入，且 Ω 具有诱导度量，即 $\|v\|_{\Omega}=\|I_* v\|_{\mathbb{R}^3}$，这里 $I_*:T_z(\Omega)\to T_{I(z)}(\mathbb{R}^3)$ 是浸入 I 的切映射。我们称 $I:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是完备的，如果任意光滑的发散曲线 $\gamma:[0,a]\to\Omega$ 有无限长度。

定义 5 [9]设 $E:\Omega\to\mathbb{R}^3$ 是单连通的极小曲面，由黎曼映射定理，可以设 Ω 共形于 $\mathbb{D}$。如果 Ω 共形于 $\mathbb{D}$，则称 E 为双曲的。

3. 定理 4 证明

对任意 $k\in N$，令

$$R_k=\left\{z\in\mathbb{D}:1-\frac{1}{n_k}\le|z|\le 1-\frac{1}{2n_k}\right\} \tag{1}$$

每一个 R_k 是半径为 $\frac{1}{2n_k}$ 的圆环，当 k 充分大时，R_k 互不相交。

由

$$|h'(z)|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_j n_j z^{n_j-1}\right|\ge\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_j n_j z^{n_j}\right|,\ z\in\mathbb{D} \tag{2}$$

对任意固定的 $k\in N$，令 $A_k=a_k n_k z^{n_k}$，$B_k=\sum_{j=1}^{k-1}a_j n_j z^{n_j}$，$C_k=\sum_{j=k+1}^{\infty}a_j n_j z^{n_j}$，

则有

$$\begin{aligned}|h'(z)|&\ge\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_j n_j z^{n_j}\right|=n_k|a_k||z^{n_k}|-\left|\sum_{j=1}^{k-1}a_j n_j z^{n_j}\right|-\left|\sum_{j=k+1}^{\infty}a_j n_j z^{n_j}\right|\\&=|A_k|-|B_k|-|C_k|,\ z\in\mathbb{D},\ k\in N\end{aligned} \tag{3}$$

现假设 k 充分大，

当 $z\in R_k$ 时，由(1)，有 $|A_k|\ge|a_k|n_k\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$。

因为 $\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=\frac{1}{e}$，所以，存在 $k_1\in N$，$k\ge k_1$，有

$$|A_k|\ge\frac{1}{2e}|a_k|n_k,\ k\ge k_1,\ z\in R_k \tag{4}$$

另一方面，由定理 4 的条件(b)，存在 $k_2\in N$，$k_2\ge k_1$，有

$$|B_k|\le\sum_{j=1}^{k-1}|a_j|n_j<\frac{1}{4e}|a_k|n_k,\ k\ge k_2,\ z\in R_k \tag{5}$$

当 $0<x<1$ 时，$\ln(1-x)<-x$，所以当 $z\in R_k$ 时，

$$\left|C_k\right| = \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|a_j\right|n_j z^{n_j} \le \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|a_j\right|n_j\left(1-\frac{1}{2n_k}\right)^{n_j} = \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|a_j\right|n_j \mathrm{e}^{n_j\ln\left(1-\frac{1}{2n_k}\right)} \le \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|a_j\right|n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} \tag{6}$$

由定理 4 条件(a)中的$\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| \le \eta < 1$，得到

$$\left|C_k\right| \le \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|a_j\right|n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} \le \left|a_k\right|\sum_{j=k+1}^{\infty}\eta^{j-k}n_j \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{2n_k}} \tag{7}$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式[10]，有

$$\left|C_k\right| \le \left|a_k\right|\sqrt{\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}\left(\eta^{j-k}\right)^2\right)\cdot\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}\right)} = \left|a_k\right|\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\sqrt{\sum_{j=k+1}^{\infty}n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}} \tag{8}$$

下面对 $\sum_{j=k+1}^{\infty}n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}$ 进行放缩，

当只提出第 $k+1$ 项时，有

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} = n_{k+1}^2\mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}} + \sum_{j=k+2}^{\infty}n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \tag{9}$$

因为当 $x > n_k$ 时，函数 $x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}$ 是单调递减函数，故当 $j = k+1, k+2, \cdots$ 时，

$$\int_{n_{j-1}}^{n_j} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x \ge n_j\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}\left(n_j - n_{j-1}\right) = n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}\left(1-\frac{n_{j-1}}{n_j}\right) \ge n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}}\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

则有

$$n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{j-1}}^{n_j} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x$$

故

$$\sum_{j=k+2}^{\infty}n_j^2\mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1}\int_{n_{k+1}}^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x \tag{10}$$

又

$$\begin{aligned}\int_{n_{k+1}}^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x &= \left(-n_k\right)\int_{n_{k+1}}^{\infty} x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\right) = \left(-n_k\right)\left(x\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\Big|_{n_{k+1}}^{+\infty} - \int_{n_{k+1}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\mathrm{d}x\right) \\ &= \left(-n_k\right)\left(0 - n_{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}} + n_k\mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}}\Big|_{n_{k+1}}^{+\infty}\right) = n_k\left(n_{k+1}\mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}} + n_k\mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}}\right) \\ &\le \left(n_k n_{k+1} + n_k^2\right)\mathrm{e}^{-q} = n_{k+1}^2\left(\frac{n_k}{n_{k+1}} + \frac{n_k^2}{n_{k+1}^2}\right)\mathrm{e}^{-q} \le n_{k+1}^2\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\right)\mathrm{e}^{-q}\end{aligned} \tag{11}$$

故

$$\sum_{j=k+2}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{1+q}{q^2-q} n_{k+1}^2 \mathrm{e}^{-q}$$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le n_{k+1}^2 \mathrm{e}^{-q} + \frac{1+q}{q^2-q} n_{k+1}^2 \mathrm{e}^{-q} = n_{k+1}^2 \mathrm{e}^{-q} \frac{q^2+1}{q^2-q} \tag{12}$$

所以

$$|C_k| \le |a_k| n_{k+1} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sqrt{\mathrm{e}^{-q} \frac{q^2+1}{q^2-q}} \tag{13}$$

当 $\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \le \frac{1}{16} \mathrm{e}^{\frac{q}{2}-1} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{q}}{1+q^2}}$ 时，

$$|C_k| \le \frac{1}{16e} |a_k| n_{k+1} \tag{14}$$

当提出第 $k+1$ 项和第 $k+2$ 项时，有

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} = n_{k+1}^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k}} + n_{k+2}^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+2}}{n_k}} + \sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \tag{15}$$

同理，有

$$\sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q}{q-1} \int_{n_{k+2}}^{\infty} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}} \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \int_{n_{k+2}}^{\infty} x \mathrm{e}^{-\frac{x}{n_k}} \mathrm{d}x &= \left(n_k n_{k+2} + n_k^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+2}}{n_k}} = \left(n_k n_{k+2} + n_k^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_{k+2}}{n_{k+1}}} \\ &= n_{k+2}^2 \left(\frac{n_k}{n_{k+2}} + \frac{n_k^2}{n_{k+2}^2} \right) \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_{k+2}}{n_{k+1}}} \\ &= n_{k+2}^2 \left(\frac{n_{k+1}}{n_{k+2}} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} + \left(\frac{n_{k+1}}{n_{k+2}} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} \right)^2 \right) \mathrm{e}^{-\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_{k+2}}{n_{k+1}}} \\ &\le n_{k+2}^2 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} \right) \mathrm{e}^{-q^2} \end{aligned} \tag{16}$$

因此

$$\sum_{j=k+3}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{q^2+1}{q^3(q-1)} n_{k+2}^2 \mathrm{e}^{-q^2}$$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} n_j^2 \mathrm{e}^{-\frac{n_j}{n_k}} \le \frac{1}{q^2} n_{k+2}^2 \mathrm{e}^{-q} + n_{k+2}^2 \mathrm{e}^{-q^2} \left(1 + \frac{q^2+1}{q^3(q-1)} \right) = n_{k+2}^2 \left(\frac{1}{q^2} \mathrm{e}^{-q} + \frac{q^4-q^3+q^2+1}{q^3(q-1)} \cdot \mathrm{e}^{-q^2} \right)$$

$$|C_k| \le |a_k| n_{k+2} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{q} \sqrt{\mathrm{e}^{-q} + \frac{q^4-q^3+q^2+1}{q^2-q} \mathrm{e}^{-q^2}} \tag{17}$$

因为 $\lim_{q\to\infty}\dfrac{\dfrac{q^4-q^3+q^2+1}{q^2-q}\mathrm{e}^{-q^2}}{\mathrm{e}^{-q}\dfrac{q+1}{q^2-q}}=\lim_{q\to\infty}\dfrac{q^4-q^3+q^2+1}{q+1}\mathrm{e}^{-q^2+q}=0$，所以对比(13)和(17)式可知(17)式的结果更为精确，再由定理 4 条件(b)中 $\dfrac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\le\dfrac{1}{16q}\mathrm{e}^{\frac{q^2}{2}-1}\sqrt{\dfrac{q^2-q}{\left(q^4-q^3+q^2+1\right)+\left(q^2-q\right)\mathrm{e}^{q^2-q}}}$，得到

$$|C_k|\le\frac{1}{16e}|a_k|n_k \tag{18}$$

由(3)、(4)、(5)、(18)可得，存在 $k_2\in N$， $k_2\ge k_1$ 使得

$$|h'(z)|\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)\frac{1}{e}|a_k|n_k=\frac{3}{16}|a_k|n_k$$

取 $\mathbb{D}$ 内的发散曲线 γ，对任意的 $k\ge l$， $l\in N$， γ 必定穿过 R_k，则

$$\int_\gamma|h'(z)|^2|\mathrm{d}z|\ge\sum_{k=l}^{\infty}\int_{\gamma\cap R_k}|h'(z)|^2|\mathrm{d}z|\ge\sum_{k=l}^{\infty}\left(\frac{3}{16}|a_k|n_k\right)^2\frac{1}{2n_k}>\sum_{k=l}^{\infty}\frac{9}{512}|a_k|^2n_k=\infty$$

虽然定理 2 与定理 3 都对条件(b)进行了减弱，但是张建肖的证明方法在对 C_k 进行放缩时速度太快，导致结论误差较大，董丽丽在证明过程中改善了证明方法，但是在对 C_k 的放缩过程中出现了偏差，结果不够精确。因此定理 4 在董丽丽证明方法的基础上对 C_k 放缩进行修正并进一步精确了范围。

4. 举例说明

设 $h(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}$， $z\in\mathbb{C}$。

当 $a_j=0.5^j$， $n_j=12^j$ 时，此时 $q=12$， $\eta=0.5$。此时该例子满足文中 $\dfrac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\le\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{q}{2}-1}\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{q}}{1+q^2}}$ 条件，但是不满足定理 3 中的条件(b)。

当 $a_j=0.6^j$， $n_j=12^j$ 时，此时 $q=12$， $\eta=0.6$。易得此时 $h(z)$ 满足定理 4 中条件(a)~(c)，但不满足文中 $\dfrac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\le\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{q}{2}-1}\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{q}}{1+q^2}}$ 条件及定理 3 中的条件(b)。

5. 推论

设 $A(D)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中解析函数构成的集合。

推论 1 存在 $h\in A(D)$，使得 h' 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个完备极小曲面 M 的 Gauss 映射，其中 M 位于 $\mathbb{R}^3$ 中两平行平面之间。

证明 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个完备极小曲面，取 Weierstrass 表示中的 $f=1$， $g=h'$，其中 h 满足定理 4 条件，则 $h\in A(D)$。由于 $\lambda(z)|\mathrm{d}z|=\dfrac{1}{2}\left(1+|h'(z)|^2\right)|\mathrm{d}z|$，由定理 4 可得此度量是完备的，所以 h' 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个完备极小曲面 M 的 Gauss 映射。又由 $x_3(z)=Re(h(z))\le\sum_{j=1}^{\infty}a_jz^{n_j}\le\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|<\infty$，所以 M 位于 $\mathbb{R}^3$ 中两平行平面之间。

注：推论 1 的证明过程与 Brito [4]的推论相同。

参考文献

[1] Calabi, E. (1966) Problems in Differential Geometry. *Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry*, Tokyo, 170.

[2] Jorge, L. and Xavier, F. (1980) A Complete Minimal Surface in $\mathbb{R}^3$ between Two Parallel Planes. *Annals of Mathematics*, **112**, 203-206. https://doi.org/10.2307/1971325

[3] Nadirashvili, N. (2001) An Application of Potential Analysis to Minimal Surfaces. *Moscow Mathematical Journal*, **1**, 601-604. https://doi.org/10.17323/1609-4514-2001-1-4-601-604

[4] De Brito, F. (1992) Power Series with Hadamard Gaps and Hyperbolic Complete Minimal Surfaces. *Duke Mathematical Journal*, **68**, 297-300. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06812-8

[5] 张群力，周平槐，杨学林，等. 极小曲面的 Weierstrass 表示与建筑造型[J]. 土木建筑工程信息技术，2014，6(3): 25-38.

[6] 张建肖，刘晓俊. Hadamard 缺项幂级数及双曲完备极小曲面[J]. 上海理工大学学报, 2022, 44(4): 364-367.

[7] 孙道椿. 缺项及随机级数的边界性质[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1991(1): 7-10.

[8] 董丽丽. 基于 Hadamard 缺项幂级数的完备极小曲面[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 219-225.

[9] Xavier F，潮小李. 现代极小曲面讲义[M]. 北京：高等教育出版社, 2011.

[10] Pinelis, I. (2015) On the Holder and Cauchy-Schwarz Inequalities. *The American Mathematical Monthly*, **122**, 593-595. https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.122.6.593