Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(2), 520-526
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.142050

Hans汉斯

一些图的弱外部平衡划分

刘玉敏[1,2]

[1]浙江理工大学理学院，浙江 杭州
[2]丽水学院数学与计算机学院，浙江 丽水

收稿日期：2023年12月16日；录用日期：2023年12月28日；发布日期：2024年2月27日

摘 要

设G是一个图。G的一个2-划分是$V(G)$的一个2-划分，即$V(G)=V_1\cup V_2$且$V_1\cap V_2=\varnothing$。如果一个2-划分满足$\left||V_1|-|V_2|\right|\le 1$，我们就称其为平衡划分。本文的研究主要基于Bollobás和Scott提出的一个猜想：每个图G都有一个平衡划分(V_1,V_2)，对于V_1中的每一个顶点v，v的邻点中至少有一半减去一个在V_2中；对于V_2中的每一个顶点v，v的邻点中至少有一半减去一个在V_1中。在本文中，将对二部图、皇冠图以及风车图证实这一猜想。

关键词

弱外部平衡划分，二部图，皇冠图，风车图

Weak External Bisection of Some Graphs

Yumin Liu[1,2]

[1]School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
[2]School of Mathematics and Computer Science, Lishui University, Lishui Zhejiang

Received: Dec. 16th, 2023; accepted: Dec. 28th, 2023; published: Feb. 27th, 2024

Abstract

Let G be a graph. A bipartition of G is a bipartition of $V(G)$ with $V(G)=V_1\cup V_2$ and $V_1\cap V_2=\varnothing$. If a bipartition satisfies $\left||V_1|-|V_2|\right|\le 1$, we call it a bisection. The research in this paper is mainly based on a conjecture proposed by Bollobás and Scott: every graph G has a bisection (V_1,V_2) such that $\forall v\in V_1$, at least half minus one of the neighbors of v are in the V_2; $\forall v\in V_2$, at least half minus one of the neighbors of v are in the V_1. In this paper, we confirm this conjecture for some bipartite graphs, crown graphs and windmill graphs.

文章引用: 刘玉敏. 一些图的弱外部平衡划分[J]. 理论数学, 2024, 14(2): 520-526.
DOI: 10.12677/pm.2024.142050

Keywords

Weak External Bisection, Bipartite Graph, Crown Graph, Windmill Graph

1. 引言

设图G的顶点集为$V(G)$，边集为$E(G)$。G的外部划分是$V(G)=V_1\cup V_2$且$V_1\cap V_2=\varnothing$，并且满足对于V_1中的每一个顶点v，v的邻点中至少有一半在V_2中；对于V_2中的每一个顶点v，v的邻点中至少有一半在V_1中。Shelah和Milner [1]发现了不存在外部划分的不可数图，并证明了每个图都有一个外部3-划分；并且他们还提出了一个猜想：任何可数图都有一个外部划分。Aharoni，Milner和Prikry [2]证明了有限个无穷度顶点的图存在一个外部划分。Fiorini和Silva [3]发现Shelah和Milner [1]给出的反例中的图没有一个顶点是有限次的，因此他们开始寻找具有此性质且不存在外部划分的图的最小基数。

如果G的一个2-划分满足$\left||V_1|-|V_2|\right|\le 1$，我们就称它为$G$的一个平衡划分，并记作$(V_1,V_2)$。Ban和Linial [4]发现，每一个1、3或4类正则图G都有一个外部平衡划分。Bollobás和Scott [5]发现，并非每个图都有外部平衡划分，他们给出了一个反例，当$m\ge 2l+3$时$K_{2l+1,m}$没有外部平衡划分。Esperet、Mazzuoccolo和Tarsi [6]发现了一组没有外部平衡划分且至少包含2个桥的3-正则图。

对于顶点$u,v\in V(G)$，如果$uv\in E(G)$，则称边uv与顶点u和v相关联。v的度是与v关联的边的数目，用$d(v)$表示。设(V_1,V_2)是G的一个平衡划分。对于V_1中的顶点v，v的内部度是与v关联且另一个端点也在V_1中的边的数目；v的外部度是与v关联且另一个端点在V_2中的边的数目。对于V_2中的顶点v，v的内部度是与v关联且另一个端点也在V_2中的边的数目；v的外部度是与v关联且另一个端点在V_1中的边的数目。为方便写作，将v的内部度记作$d_{in}(v)$，v的外部度记作$d_{ex}(v)$。

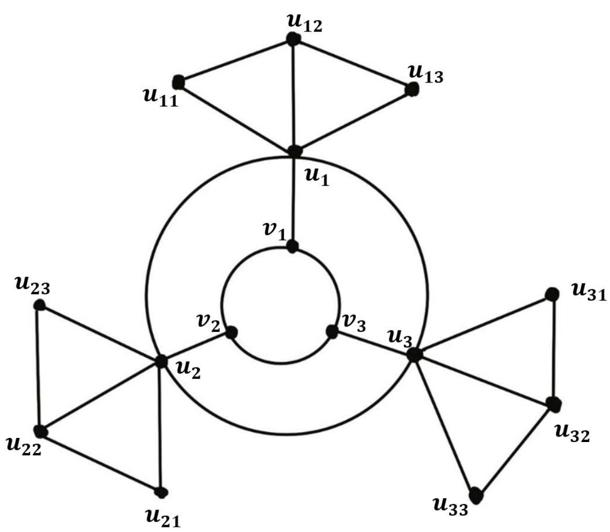

Figure 1. $G_{3,3}$
图 1. $G_{3,3}$

如果图 G 的顶点集可以划分为两个非空子集 X 和 Y，使得 X 中任意两个顶点之间没有边相连，Y 中任意两个顶点之间没有边相连，则称该图为二部图，记作 $G=[X,Y]$。

皇冠图[7] $G_{n,m}$ 满足以下条件：

$$V(G_{n,m})=\{u_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij} \mid j=1,2,\cdots,m\};$$

$$E(G_{n,m})=\{u_1u_2,u_2u_3,\cdots,u_nu_1\}\cup\{v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_nv_1\}\cup\{v_1u_1,v_2u_2,\cdots,v_nu_n\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{n}\{u_iu_{ij} \mid j=1,2,\cdots,m\}\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}u_{i(j+1)} \mid j=1,2,\cdots,m-1\},\ (n\ge 3,m\ge 1).$$

例如，图 1 展示了 $m=3,n=3$ 时的皇冠图 $G_{3,3}$。

风车图 $K_m^{(n)}$ 是由 n 个具有一个共同顶点的 m 阶完全图 K_m 组成的图。

例如，图 2 展示了 $m=4$ 时的风车图 $K_4^{(n)}$。

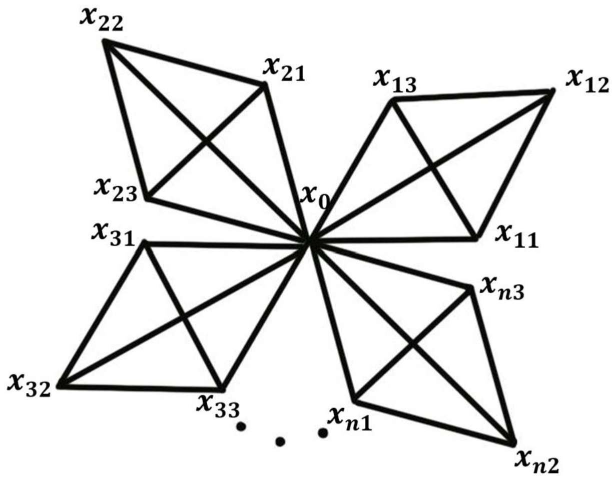

Figure 2. $K_4^{(n)}$

图 2. $K_4^{(n)}$

猜想 1.1 (Bollobás and Scott [5])每个图 G 都有一个弱外部平衡划分，即 G 有一个平衡划分 (V_1,V_2) 使得

$$d_{ex}(v)\ge d_{in}(v)-1\quad \forall v\in V(G).$$

Ji、Ma、Yan 和 Yu [8]证明了每个图形序列对于猜想 1.1 的成立都有一个实现。在同一篇文章中，他们也给出了猜想 1.1 的无穷反例族。

在本文中，我们通过展示以下三个定理，证实猜想 1.1 对部分图成立。

定理 1.1 $G[X,Y]$ 是 $|X|=3,|Y|=n$ 的二部图，则 $G[X,Y]$ 有弱外部平衡划分。

定理 1.2 每一个皇冠图 $G_{n,m}$ 都有弱外部平衡划分。

定理 1.3 每一个风车图 $K_m^{(n)}$ 都有弱外部平衡划分。

事实上，通过定理 1.2 的证明，可得到皇冠图 $G_{n,m}$ 具有更强的结果，每一个皇冠图 $G_{n,m}$ 都有外部平衡划分。

2. 弱外部平衡划分

在本节中，我们将证明定理 1.1、定理 1.2 和定理 1.3。

定理 1.1 的证明设 $G=[X,Y]$ 是一个二部图，顶点集有 X 和 Y 两部分，我们定义 $Y_S=\{y\in Y\mid N(y)=S,S\subseteq X\}$。对于集合 S，我们定义函数

$$f(S)=\begin{cases}1 & \text{如果}|S|\text{是奇数;}\\ 0 & \text{如果}|S|\text{是偶数.}\end{cases} \tag{1}$$

令 $X=\{v_1,v_2,v_3\}$，在不失一般性的前提下，假设

$$\left|Y_{\{v_1,v_3\}}\right|\geq\left|Y_{\{v_1,v_2\}}\right|\geq\left|Y_{\{v_2,v_3\}}\right|.$$

否则，我们可以对 X 中的三个顶点重新标注。我们通过三个步骤给出 $V(G)$ 的一个弱外部平衡划分 (V_1,V_2)。

首先，令 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_1$，$\{v_3\}\subseteq V_2$，$Y_{\{v_1,v_2\}}\subseteq V_2$ 和 $Y^*_{\{v_1,v_3\}}\subseteq V_1$。这里 $Y^*_{\{v_1,v_3\}}\subseteq Y_{\{v_1,v_3\}}$，$\left|Y^*_{\{v_1,v_3\}}\right|=\left|Y_{\{v_1,v_2\}}\right|$。由于 $\left|Y_{\{v_1,v_3\}}\right|\geq\left|Y_{\{v_1,v_2\}}\right|$，因而 $Y^*_{\{v_1,v_3\}}$ 是存在的。令 $Y^{**}_{\{v_1,v_3\}}=Y_{\{v_1,v_3\}}\setminus Y^*_{\{v_1,v_3\}}$。

其次，我们依次划分集合 $Y_{\{v_2\}}$，$Y_{\{v_1\}}$，$Y^{**}_{\{v_1,v_3\}}$，$Y_{\{v_1,v_2,v_3\}}$，$Y_{\{v_2,v_3\}}$ 和 $Y_{\{v_3\}}$ 中的奇数集。将集合 $Y_{\{v_2\}}$，$Y_{\{v_1\}}$，$Y^{**}_{\{v_1,v_3\}}$，$Y_{\{v_1,v_2,v_3\}}$，$Y_{\{v_2,v_3\}}$ 和 $Y_{\{v_3\}}$ 中的奇数集依次记作 $S_1,S_2,\cdots,S_m$。对于每个 $i\in\{1,\cdots,m\}$，如果 i 是奇数，则将 S_i 中的 $\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil$ 个点放入 V_2 中且将其余下的 $\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor$ 个点放入 V_1 中；如果 i 是偶数，则将 S_i 中的 $\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil$ 个点放入 V_1 中且将其余下的 $\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor$ 个点放入 V_2 中。

最后，将集合 $Y_{\{v_2\}}$，$Y_{\{v_1\}}$，$Y^{**}_{\{v_1,v_3\}}$，$Y_{\{v_1,v_2,v_3\}}$，$Y_{\{v_2,v_3\}}$ 和 $Y_{\{v_3\}}$ 中的偶数集依次记作 $T_1,T_2,\cdots,T_k$。对于每个 $i\in\{1,\cdots,k\}$，将 T_i 中的 $\frac{|T_i|}{2}$ 个点放入 V_1 中且将其余下的 $\frac{|T_i|}{2}$ 个点放入 V_2 中。

现在，我们来证明 V_1 和 V_2 构成了 $G[X,Y]$ 的一个弱外部平衡划分。显然，如果 m 是奇数，则 $|V_1|-|V_2|=0$；如果 m 是偶数，则 $|V_1|-|V_2|=1$。所以 (V_1,V_2) 是一个平衡划分。因为 $\{v_1,v_2\}\subseteq V_1$ 和 $Y_{\{v_1,v_2\}}\subseteq V_2$，则对于每一个点 $v\in Y_{\{v_1,v_2\}}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=2$。此外，如果 $S\subseteq\{v_1,v_2,v_3\}$ 且 $|S|=1$ or 3，则对于每一个点 $v\in Y_S$，$\left|d_{ex}(v)-d_{in}(v)\right|=1$；如果 $S\subseteq\{v_1,v_2,v_3\}$，$S\neq\{v_1,v_2\}$ 且 $|S|=2$，则对于每一个点 $v\in Y_S$，$d_{ex}(v)=d_{in}(v)$。因此对于每一个点 $v\in Y$，$d_{ex}(v)\geq d_{in}(v)-1$。

令

$$\mathcal{S}_1=\left\{Y_{\{v_1\}},Y^{**}_{\{v_1,v_3\}},Y_{\{v_1,v_2,v_3\}}\right\},$$
$$\mathcal{S}_2=\left\{Y_{\{v_1,v_2,v_3\}},Y_{\{v_2,v_3\}}\right\},$$
$$\mathcal{S}_3=\left\{Y^{**}_{\{v_1,v_3\}},Y_{\{v_1,v_2,v_3\}},Y_{\{v_2,v_3\}},Y_{\{v_3\}}\right\}.$$

令 $\mathcal{S}_i'=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}\cap\mathcal{S}_i$，$i=1,2,3$。注意，$S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是顺次标记集合 $Y_{\{v_2\}}$，$Y_{\{v_1\}}$，$Y^{**}_{\{v_1,v_3\}}$，$Y_{\{v_1,v_2,v_3\}}$，$Y_{\{v_2,v_3\}}$ 和 $Y_{\{v_3\}}$ 中的奇数集，则每一个 $\mathcal{S}_i'$ 都包含了多个 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的连续集合。令 $\mathcal{T}_i=\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}\cap\mathcal{S}_i$，$i=1,2,3$。我们有

$$d_{ex}(v_1)=\left|Y_{\{v_1,v_2\}}\right|+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_1'\\ i\text{是奇数}}}\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_1'\\ i\text{是偶数}}}\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor+\sum_{T_i\subseteq\mathcal{T}_1}\frac{|T_i|}{2};$$

$$d_{in}(v_1)=\left|Y^*_{\{v_1,v_3\}}\right|+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_1'\\ i\text{是奇数}}}\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_1'\\ i\text{是偶数}}}\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil+\sum_{T_i\subseteq\mathcal{T}_1}\frac{|T_i|}{2}.$$

因为 $\mathcal{S}_i'$ 包含了 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的连续集合，则有 $\left|d_{ex}(v_1)-d_{in}(v_1)\right|=f(\mathcal{S}_1')$，这里 $f(\mathcal{S}_1')$ 的定义如(1)。易得

$$d_{ex}(v_2)=\left|Y_{\{v_1,v_2\}}\right|+\left\lceil\frac{\left|Y_{\{v_2\}}\right|}{2}\right\rceil+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_2'\\ i\text{是奇数}}}\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_2'\\ i\text{是偶数}}}\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor+\sum_{T_i\subseteq\mathcal{T}_2}\frac{|T_i|}{2};$$

$$d_{in}(v_2)=\left\lfloor\frac{\left|Y_{\{v_2\}}\right|}{2}\right\rfloor+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_2'\\ i\text{是奇数}}}\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_2'\\ i\text{是偶数}}}\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil+\sum_{T_i\subseteq\mathcal{T}_2}\frac{|T_i|}{2}.$$

显然，如果 $\left|Y_{\{v_2\}}\right|$ 是奇数，则 $S_1=Y_{\{v_2\}}$。因此，我们有 $d_{ex}(v_2)-d_{in}(v_2)\ge\left|Y_{\{v_1,v_2\}}\right|+f\left(Y_{\{v_2\}}\right)-f(\mathcal{S}_2')\ge-1$。类似地，有

$$d_{ex}(v_3)=\left|Y^*_{\{v_1,v_3\}}\right|+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_3'\\ i\text{是奇数}}}\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_3'\\ i\text{是偶数}}}\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil+\sum_{T_i\subseteq\mathcal{T}_3}\frac{|T_i|}{2};$$

$$d_{in}(v_3)=\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_3'\\ i\text{是奇数}}}\left\lceil\frac{|S_i|}{2}\right\rceil+\sum_{\substack{S_i\subseteq\mathcal{S}_3'\\ i\text{是偶数}}}\left\lfloor\frac{|S_i|}{2}\right\rfloor+\sum_{T_i\subseteq\mathcal{T}_3}\frac{|T_i|}{2}.$$

所以 $\left|d_{ex}(v_3)-d_{in}(v_3)\right|\ge\left|Y^*_{\{v_1,v_3\}}\right|-f(\mathcal{S}_2')$。则对于每一个 $v_i\in X$，$d_{ex}(v_i)\ge d_{in}(v_i)-1$。因此 (V_1,V_2) 是 $G[X,Y]$ 的一个弱外部平衡划分。■

定理 1.2 的证明 令 $V(G_{n,m})=\{u_i\mid i=1,\cdots,n\}\cup\{v_i\mid i=1,\cdots,n\}\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j=1,\cdots,m\}$。我们通过两个步骤给出 $V(G_{n,m})$ 的一个弱外部平衡划分 (V_1,V_2)。

首先，令 $\{v_i\mid i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且 i 是奇数$\}\subset V_2$ 且 $\{v_i\mid i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且 i 是偶数$\}\subset V_1$；$\{u_i\mid i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且 i 是奇数$\}\subset V_1$ 且 $\{u_i\mid i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且 i 是偶数$\}\subset V_2$。

其次，我们划分集合 $\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j=1,2,\cdots,m\}$。$\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j=1,2,\cdots,m\}$ 的划分依赖于 $\bigcup_{i=1}^{n}\{u_i\}$ 的划分。对于一个给定的 k，如果 $u_k\in V_1$，则令 $\{u_{kj}\mid j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 且 j 是奇数$\}\subset V_2$ 且 $\{u_{kj}\mid j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 且 j 是偶数$\}\subset V_1$；如果 $u_k\in V_2$，则令 $\{u_{kj}\mid j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 且 j 是奇数$\}\subset V_1$ 且 $\{u_{kj}\mid j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 且 j 是偶数$\}\subset V_2$。

现在，我们来证明 V_1 和 V_2 构成了 $G_{n,m}$ 的一个弱外部平衡划分。显然，如果 n 和 m 都为奇数，则 $|V_1|-|V_2|=1$；否则，$|V_1|-|V_2|=0$。所以 (V_1,V_2) 是一个平衡划分。如果 n 是偶数，则对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$；如果 n 是奇数，则 $d_{ex}(v_1)-d_{in}(v_1)=1$，$d_{ex}(v_n)-d_{in}(v_n)=1$ 且对于每一个 $v\in\bigcup_{i=2}^{n-1}\{v_i\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$。所以，在任何情况下，$d_{ex}(v_i)\ge d_{in}(v_i),i=1,\cdots,n$。

如果 m 是奇数，则对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{i1},u_{im}\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=2$；对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j\in\{2,\cdots,m-1\}$ 且 j 是偶数$\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=1$ 且对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j\in\{2,\cdots,m-1\}$ 且 j 是奇数$\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$。如果 m 是偶数，则对于每一个

$d_{ex}(u_{i1})-d_{in}(u_{i1})=2$，$d_{ex}(u_{im})=d_{in}(u_{im})$；对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j\in\{2,\cdots,m-1\}且\ j是偶数\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=1$ 且对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_{ij}\mid j\in\{2,\cdots,m-1\}且\ j是奇数\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$。所以，在任何情况下，$d_{ex}(u_{ij})\ge d_{in}(u_{ij}),i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m$。

如果 n 和 m 都是奇数，则 $d_{ex}(u_1)-d_{in}(u_1)=2$，$d_{ex}(u_n)-d_{in}(u_n)=2$ 且对于每一个 $v\in\bigcup_{i=2}^{n-1}\{u_i\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=4$。如果 n 是奇数且 m 是偶数，则 $d_{ex}(u_1)-d_{in}(u_1)=1$，$d_{ex}(u_n)-d_{in}(u_n)=1$ 且对于每一个 $v\in\bigcup_{i=2}^{n-1}\{u_i\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$。如果 n 是偶数且 m 是奇数，则对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_i\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=4$。如果 n 和 m 都是偶数，则对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{u_i\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$。所以，在任何情况下，$d_{ex}(u_i)\ge d_{in}(u_i),i=1,\cdots,n$。因此 (V_1,V_2) 是 $G_{n,m}$ 的一个弱外部平衡划分。■

定理 1.3 的证明 仿照图 2 我们对图 $K_m^{(n)}$ 的顶点进行标注，得其顶点集为 $V\left(K_m^{(n)}\right)=\{x_0\}\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i,m-1}\}$。令 $\{x_0\}\subset V_1$。

我们考虑以下两种情况。

情况 1 m 是奇数

令 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是偶数\}\subset V_1$ 且 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是奇数\}\subset V_2$。此时，$|V_1|-|V_2|=1$。所以 (V_1,V_2) 是一个平衡划分。$d_{ex}(x_0)-d_{in}(x_0)=1$。对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是偶数\}$，$d_{ex}(v)=d_{in}(v)$；对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是奇数\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=2$。因此 (V_1,V_2) 是 $K_m^{(n)}$ 的一个弱外部平衡划分。

情况 2 m 是偶数

如果 i 是奇数，令 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是奇数\}\subset V_2$ 且 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是偶数\}\subset V_1$；如果 i 是偶数，令 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是奇数\}\subset V_1$ 且 $\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是偶数\}\subset V_2$。

现在，我们来证明 V_1 和 V_2 构成了 $K_m^{(n)}$ 的一个弱外部平衡划分。显然，如果 n 是奇数，$|V_1|-|V_2|=0$；如果 n 是偶数，$|V_1|-|V_2|=1$。所以 (V_1,V_2) 是一个平衡划分。如果 i 是奇数，则对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m-1}\{x_{ij}\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=1$；如果 i 是偶数，则对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是奇数\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=-1$ 且对于每一个 $v\in\bigcup_{i=1}^{n}\{x_{ij}\mid j\in\{1,2,\cdots,m-1\}且\ j是偶数\}$，$d_{ex}(v)-d_{in}(v)=3$。如果 n 是偶数，则 $d_{ex}(x_0)=d_{in}(x_0)$；如果 n 是奇数，则 $d_{ex}(x_0)-d_{in}(x_0)=1$。因此 (V_1,V_2) 是 $K_m^{(n)}$ 的一个弱外部平衡划分。■

参考文献

[1] Shelah, S. and Milner, E.C. (1990) Graphs with No Unfriendly Partitions. In: Baker, A., Bollobás, B. and Hajnal, A., Eds., *A Tribute to Paul Erdös*, Cambridge University Press, Cambridge, 373-384. https://doi.org/10.1017/CBO9780511983917.031

[2] Aharoni, R., Milner, E.C. and Prikry, K. (1990) Unfriendly Partitions of a Graph. *Journal of Combinatorial Theory*,

Series B, **50**, 1-10. https://doi.org/10.1016/0095-8956(90)90092-E

[3] Aurichi, L.F. and Real, L.S.S. (2023) Unfriendly Partitions When Avoiding Vertices of Finite Degree. *Journal of Logic and Computation*, **2023**, exad070. https://doi.org/10.1093/logcom/exad070

[4] Ban, A. and Linial, N. (2016) Internal Partitions of Regular Graphs. *Journal of Graph Theory*, **83**, 5-18. https://doi.org/10.1002/jgt.21909

[5] Bollobás, B. and Scott, A.D. (2002) Problems and Results on Judicious Partitions. *Random Structures & Algorithms*, **21**, 414-430. https://doi.org/10.1002/rsa.10062

[6] Esperet, L., Mazzuoccolo, G. and Tarsi, M. (2017) Flows and Bisections in Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **86**, 149-158. https://doi.org/10.1002/jgt.22118

[7] 周新航. 皇冠图 $G_{n,m}$ 的邻点可区别关联色数[J]. 山东理工大学学报(自然科学版), 2009(23): 40-43.

[8] Ji, Y., Ma, J., Yan, J. and Yu, X. (2019) On Problems about Judicious Bipartitions of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **139**, 230-250 https://doi.org/10.1016/j.jctb.2019.03.001