Statistics and Application 统计学与应用, 2021, 10(5), 770-777
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2021.105079

Hans汉斯

由α-稳定过程驱动的线性自排斥扩散过程的参数估计

沈乐怡，童金英，闫理坦

东华大学理学院，上海

收稿日期：2021年8月24日；录用日期：2021年9月9日；发布日期：2021年9月26日

摘　要

本文研究如下线性自排斥扩散的参数估计问题：$X_t^\alpha = M_t^\alpha - \theta\int_0^t\int_0^s\left(X_s^\alpha - X_r^\alpha\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + \nu t$，其中，$M_\alpha$是一个对称$\alpha$-稳定过程($1<\alpha<2$)。该过程为一类自排斥扩散的类似过程。在连续观测条件下，我们使用最小二乘法对两个未知参数进行了估计，研究了它们的渐近分布，并通过仿真模拟探究了估计量的精度。

关键词

稳定过程，自排斥扩散，参数估计，渐近分布

Parameter Estimation for the Linear Self-Repelling Diffusion Driven by α-Stable Motions

Leyi Shen, Jinying Tong, Litan Yan

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Aug. 24th, 2021; accepted: Sep. 9th, 2021; published: Sep. 26th, 2021

Abstract

In this paper, we consider parameter estimations of the linear self-repelling diffusion $X_t^\alpha = M_t^\alpha - \theta\int_0^t\int_0^s\left(X_s^\alpha - X_r^\alpha\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}s + \nu t$, where M_α is a symmetrical α-stable motion ($1<\alpha<2$). The process is an analogue of the self-repelling diffusion. By using least squares method, we study es-

文章引用: 沈乐怡, 童金英, 闫理坦. 由 α-稳定过程驱动的线性自排斥扩散过程的参数估计[J]. 统计学与应用, 2021, 10(5): 770-777. DOI: 10.12677/sa.2021.105079

timators of unknown parameters, give their asymptotic distributions under the continuous observation and study the accuracy of the estimator.

Keywords

Stable Motion, Self-Repelling Diffusion, Parameter Estimation, Asymptotic Distributions

1. 引言

1992 年，Durrett 和 Rogers [1]研究了一类增长物模型。在某种条件下，他们建立了如下随机微分方程解的渐近性质：

$$X_t = B_t + \int_0^t \int_0^s f\left(X_s - X_u\right) \mathrm{d}u \mathrm{d}s$$

其中 B 是布朗运动，f 是 Lipschitz 连续的。X_t 对应于聚合物在时间 t 所在的位置。在一定的条件下，他们建立了随机微分方程解的渐近行为并且给出了一些推论。该模型是边缘自交互随机游走的连续模拟。自交互随机过程有助于理解自我组织和学习行为。

对任意 $t \geq 0$，

$$X_t = X_0 + B_t + \int_0^t \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}} f\left(-x\right) \mathcal{L}^X\left(s, X_s + x\right) \mathrm{d}x$$

这个公式清晰地说明了过程 X 与其占位密度的交互。我们可以将这个解过程称为与其自身通过的轨迹相互作用的布朗运动，即自交互过程。如果对 f 没有任何限制，那么方程定义了一个自交互扩散。如果对于 $x \cdot f\left(x\right) \geq 0$ (反之≤0)，我们将它称作自排斥扩散(反之自吸引扩散)。换言之，它更倾向于靠近其之前到达过的位置。1995 年，Cranston 和 Le Jan [2]扩展了该模型，并且建立了以下的线性情形：

$$X_t = B_t - \theta \int_0^t \int_0^s \left(X_s - X_u\right) \mathrm{d}u \mathrm{d}s + \nu t, \quad t \geq 0$$

其中 $\theta > 0$，$\nu \in R$ 是两个参数，B 是一个标准布朗运动。该方程的解称为线性自吸引扩散，Cranston 和 Le Jan [2]证明了当 t 趋于无穷时解的收敛性。更多相关结果可参考文献[3]-[9]。

最近，Yan [10]等考虑了由对称 α -稳定过程驱动的自交互扩散，得到了以下线性方程的渐近行为：

$$X_t^\alpha = M_t^\alpha - \theta \int_0^t \int_0^s \left(X_s^\alpha - X_r^\alpha\right) \mathrm{d}r \mathrm{d}s + \nu t$$

其中，$X_0^\alpha = 0$，M^α 是一个对称 α -稳定过程，$\theta \neq 0$，$\nu \in R$ 并且 $0 \leq \alpha \leq 2$。在本文中，我们考虑在连续观测下的情形，即上述方程定义了一个带跳的自排斥扩散。

另一方面，越来越多的学者研究由 Lëvy 过程驱动的随机过程的参数估计，因为其在金融领域有很强的应用性(可参考文献[11] [12] [13])。当随机过程由 α -稳定过程驱动时，Hu 等[14]研究了 O-U 过程的最小二乘估计量的强相合性和渐近分布。

我们主要通过 Hu 等[14]提供的方法来研究方程中参数 θ 和 ν 的最小二乘估计，对方程进行连续观测研究参数的估计问题，其中 $\theta < 0$。通过统计模拟，可以通过绘制两个参数的最小二乘估计量的图直观地

看出估计量的精度。

记

$$Y_s^{\alpha}=\int_0^t\left(X_s^{\alpha}-X_r^{\alpha}\right)\mathrm{d}s,\quad t\geq 0$$

θ 和 ν 的最小二乘估计量可以由以下比较函数的最小值求出：

$$\rho_n\left(\theta,\nu\right)=\int_0^T\left|X_t^{\alpha}-\left(\nu-\theta Y_t^{\alpha}\right)\right|^2\mathrm{d}t$$

得到 θ 和 ν 的最小二乘估计量：

$$\hat{\theta}_T=\frac{X_T^{\alpha}\int_0^T Y_t^{\alpha}\mathrm{d}t-T\int_0^T Y_t^{\alpha}\mathrm{d}X_t^{\alpha}}{T\int_0^T\left(Y_t^{\alpha}\right)^2\mathrm{d}t-\left(\int_0^T Y_t^{\alpha}\mathrm{d}t\right)^2}$$

以及

$$\hat{\nu}_T=\frac{1}{T}\left(X_T^{\alpha}+\hat{\theta}_T\int_0^T Y_t^{\alpha}\mathrm{d}t\right)。$$

其中 $1<\alpha<2$。本文的主要目的是证明以下定理：

定理 1：假设 $1<\alpha<2$ 并且 $\theta<0$，则最小二乘估计量 $\hat{\theta}_T$ 和 $\hat{\nu}_T$ 是强相合的，即当 T 趋于无穷大时，收敛性：

$$\hat{\theta}_T\to\theta$$

和

$$\hat{\nu}\to\nu$$

几乎必然成立。并且当 T 趋于无穷大时，以下依分布收敛性成立：

$$T^{1/\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\to-\frac{2\theta^{1-1/\alpha}}{\alpha^{1/\alpha}}\tilde{M}_1\left|\xi_{\infty}-\frac{\nu}{\theta}\right|^{-1},$$

$$T^{1/\alpha-1}\left(\hat{\nu}-\nu-\frac{1}{T}M_t\right)\to\frac{2\theta^{-1/\alpha}}{\alpha^{1/\alpha}}\tilde{M}_1\,\mathrm{sgn}\left(\xi_{\infty}-\frac{\nu}{\theta}\right).$$

其中 $\tilde{M}_1$ 是一个稳定随机变量，满足 $\tilde{M}_1\sim S_{\alpha}\left(1,0,0\right)$。

2. 预备知识

本文中，我们给出了一个完备的概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},P,\left\{\mathcal{F}_t\right\}\right)$。一个 $\mathcal{F}_t$-适应的过程 $M^{\alpha}=\left\{M_t^{\alpha},t\geq 0\right\}$，其样本路径均在 $D\left[0,\infty\right)$，如果对于任意 $t>s\geq 0$，满足以下条件：

$$E\left[\mathrm{e}^{iu\left(M_t^{\alpha}-M_s^{\alpha}\right)}\right]=\mathrm{e}^{-(t-s)\lambda|u|^{\alpha}}$$

其中 $u\in\mathbb{R}$，则称为 α-稳定过程。其中，$\lambda>0$。α-稳定过程是一个具有平稳和独立增量的马尔可夫过程且依概率连续。

在本篇文章中，我们假设 $\lambda=1$ 并且 $0<\alpha<2$。关于稳定随机积分的一些事实，我们参考了以下文献：Applebaum [15]、Rosinski and Woyczynski [16]、Kallenberg [17]以及 Protter [18]。

我们知道，以下方程被称作由 α-稳定过程驱动的线性自交互扩散：

$$\mathrm{d}X_t^{\alpha}=\mathrm{d}M_t^{\alpha}-\theta\left(\int_0^t\left(X_t^{\alpha}-X_r^{\alpha}\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t+\nu\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中 $X_0^\alpha=0$，$\theta\neq 0$，$\nu\in\mathbb{R}$ 并且 M^α 是 $\mathbb{R}$ 上的稳定过程($0<\alpha<2$)，$M_0^\alpha=0$。定义核函数：$(t,s)\mapsto h_\theta(t,s)$：

$$h_\theta(t,s)=\begin{cases}1-\theta s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\int_s^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta u^2}\mathrm{d}u & t\geq s\\ 0 & t<s\end{cases}$$

其中 $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，那么，方程(1)的解可以由如下形式呈现(Sun-Yan [10])：

$$X_t^\alpha=\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}M_s^\alpha+\nu\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s$$

3. 强相合性

在本节中，我们得到了最小二乘估计量 $\hat{\theta}_T$ 和 $\hat{\nu}_T$ 的强相合性。为了更加简便，我们将 X^α、Y^α、M^α 和 ξ^α 记为 X、Y、M 和 ξ。并且记

$$\Phi_T:=T\int_0^T(Y_t)^2\mathrm{d}t-\left(\int_0^T Y_t\mathrm{d}t\right)^2$$

则最小二乘估计量 $\hat{\theta}_T$ 和 $\hat{\nu}_t$ 可表示为

$$\hat{\theta}_T=\theta+\frac{1}{\Phi_T}\left(X_T\int_0^T Y_t\mathrm{d}t-T\int_0^T Y_t\mathrm{d}X_t\right)\tag{2}$$

并且

$$\hat{\nu}=\nu+\frac{1}{T}M_t+\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\frac{1}{T}\int_0^T Y_t\mathrm{d}t\tag{3}$$

我们注意到，对于任意 $t\geq 0$，

$$Y_t=\int_0^t(x_s-x_r)\mathrm{d}s=\int_0^t s\mathrm{d}x_s=\int_0^t s\mathrm{d}M_s-\theta\int_0^t sY_s\mathrm{d}s+\nu\int_0^t s\mathrm{d}s$$

由常数变易法，对于任意 $t\geq 0$，可得显式解：

$$Y_t=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\int_0^t s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\mathrm{d}M_s+\frac{\nu}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t+\frac{\nu}{\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\right)\tag{4}$$

引理 1：假设 $\theta<0$ 且 $1<\alpha<2$。当 T 趋于无穷大时，几乎处处有：

$$T\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\mathrm{d}t\to-\frac{1}{\theta}\left(\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right)$$

证明：由方程(4)和洛必达法则可得：

$$T\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\mathrm{d}t=T\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\mathrm{d}t+\frac{\nu}{\theta}T^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}-T\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T\frac{\nu}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\mathrm{d}t\to-\frac{1}{\theta}\left(\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right)$$

定理 1 的证明：利用第 3 节的结果，本节主要证明定理 1，即根据方程(2)和(3)，$\hat{\theta}_T-\theta$ 以及 $\hat{\nu}_T-\nu$ 当 T 趋于无穷大时几乎必然收敛到 0。由(4)以及以下事实：

$$\xi_\infty-\xi_t=\int_t^\infty s\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\mathrm{d}Ms=-t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta t^2}M_t^2-\int_0^\infty M_s^\alpha\left(1+\theta s^2\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta s^2}\mathrm{d}s$$

当 t 趋于无穷大时几乎必然收敛到 0。运用洛必达法则可得：

$$\mathrm{e}^{\theta T^2}\Phi_T\to-\frac{1}{2\theta}\left(\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right)^2$$

当 T 趋于无穷大时几乎必然成立。显然：

$$T^{-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(M_T\int_0^T Y_t\mathrm{d}t - T\int_0^T Y_t\mathrm{d}M_t\right)\to 0 \quad (T\to\infty) \quad a.s.$$

运用洛必达法则，可以证明当 T 趋于无穷大时，下列收敛性几乎必然成立：

$$T^{-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(TY_tM_t\right)=\frac{M_t}{T}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}Y_t\right)\to 0$$

$$T^{-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(T\int_0^T tM_t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\mathrm{d}t\right)=T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T tM_t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}\xi_t\mathrm{d}t\to 0$$

$$T^{-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(T\int_0^T t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}M_t\mathrm{d}t\right)=T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta t^2}M_t\mathrm{d}t\to 0$$

当 T 趋于无穷大。综合以上结论，我们可以得到：

$$\hat{\theta}_T-\theta=\frac{1}{\mathrm{e}^{\theta T^2}\Phi_T}\mathrm{e}^{\theta T^2}\left(M_t\int_0^T Y_t\mathrm{d}t - T\int_0^t Y_t\mathrm{d}M_t\right)\to 0 \quad a.s.$$

证毕。

接下来我们将证明 $\hat{\nu}_T$ 的收敛性。由(3)可得当 T 趋于无穷大时：

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_T-\nu&=\frac{1}{T}M_t+\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\frac{1}{T}\int_0^T Y_t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}M_t+\frac{1}{\mathrm{e}^{\theta T^2}\Phi_T}T^{-2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(M_T\int_0^T Y_t\mathrm{d}t - T\int_0^T Y_t\mathrm{d}M_T\right)T\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\to 0 \quad a.s.\end{aligned}$$

4. 渐近分布

由 Rosinski-Woyczynski [16]，记 $\int_0^T Y_t\mathrm{d}M_t := \tilde{M}^{\alpha}_{\tau_\alpha(T)}$，其中 $\tau_{\alpha(T)}=\int_0^T\left|Y_t\right|^{\alpha}\mathrm{d}t$。由引理 3.1 及洛必达法则可知，当 T 趋于无穷大时，

$$T^{1/\alpha}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\left(\int_0^T\left|Y_t\right|^{\alpha}\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}=\left(T\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}\theta T^2}\int_0^T\left|Y_t\right|^{\alpha}\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}\to-\frac{1}{(\alpha\theta)^{1/\alpha}}\left|\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right|$$

几乎必然成立。由此，

$$\begin{aligned}T^{1/\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)&=\frac{1}{\mathrm{e}^{\theta T^2}\Phi_T}\left(T^{1/\alpha-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}M_t\int_0^T Y_t\mathrm{d}t - T^{1/\alpha}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\mathrm{d}M_t\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{\theta T^2}\Phi_T}\left[\Upsilon_1(T)-\Upsilon_2(T)\right]\end{aligned}$$

对任意 $T\ge 0$，由引理 3.1，有：

$$\Upsilon_1(T)=T^{1/\alpha-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta T^2}\frac{M_t}{T}T\int_0^T Y_t\mathrm{d}t\to 0 \quad a.s.$$

再考虑 $\Upsilon_1(T)$ 的渐近分布。

$$Y_2(T)=T^{1/\alpha}e^{\frac{1}{2}\theta T^2}\tilde{M}^{\alpha}_{\tau_\alpha(T)}=\frac{\tilde{M}^{\alpha}_{\tau_\alpha(T)}}{\tau_\alpha^{1/\alpha}(T)}\tau_\alpha^{1/\alpha}(T)T^{1/\alpha}e^{\frac{1}{2}\theta T^2}$$

则，

$$Y_2(T)\sim-\frac{1}{(\alpha\theta)^{1/\alpha}}\tilde{M}_1\left|\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right|$$

依分布收敛，其中 $\tilde{M}_1$ 是一个稳定随机变量，满足 $\tilde{M}_1\sim S_\alpha(1,0,0)$。综合上述结论，当 T 趋于无穷时，

$$T^{1/\alpha-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\to-\frac{\frac{1}{(\alpha\theta)^{1/\alpha}}\tilde{M}_1\left|\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right|}{\frac{1}{2\theta}\left(\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right)^2}=-\frac{2\theta^{1-1/\alpha}}{\alpha^{1/\alpha}}\tilde{M}_1\left|\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right|^{-1}$$

依分布收敛。最后，我们将证明 ν 的收敛性。对于 $1<\alpha<2$，显然，当 T 趋于无穷时，以下依分布收敛性成立：

$$T^{1/\alpha-1}\left(\hat{\nu}-\nu-\frac{1}{T}M_t\right)=T^{1/\alpha-1}e^{-\frac{1}{2}\theta T^2}\left(\hat{\theta}-\theta\right)e^{\frac{1}{2}\theta T^2}\int_0^T Y_t\mathrm{d}t\to\frac{2\theta^{-1/\alpha}}{\alpha^{1/\alpha}}\tilde{M}_1\operatorname{sgn}\left(\xi_\infty-\frac{\nu}{\theta}\right)$$

证毕。

5. 统计模拟

在本节中我们对最小二乘估计量 θ 和 ν 进行了统计模拟。对于以下自排斥扩散：

$$X_t^\alpha=M_t^\alpha-\theta\int_0^t\int_0^s\left(X_s^\alpha-X_r^\alpha\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}s+\nu t$$

我们取原值 $\theta=-2$，$\nu=1$，M_t 是一个 α 为 1.8 的稳定过程。在 $[0,T]$ 区间上，我们模拟了上述过程，h 表示步长。图 1 和图 2 分别表示当 $h=0.1$ 和 $h=0.05$ 时 $\hat{\theta}$ 的结果，可以发现，随着 T 的增大，$\hat{\theta}$ 趋向于 $\hat{\theta}$，收敛速度快。并且当步长取得越小，收敛速度越快。

同样地，我们在图 3 和图 4 中模拟了当 $h=0.1$ 和 $h=0.05$ 时 $\hat{\nu}$ 的结果。收敛速度比 $\hat{\theta}$ 的收敛速度慢，与上文中的结果相符。

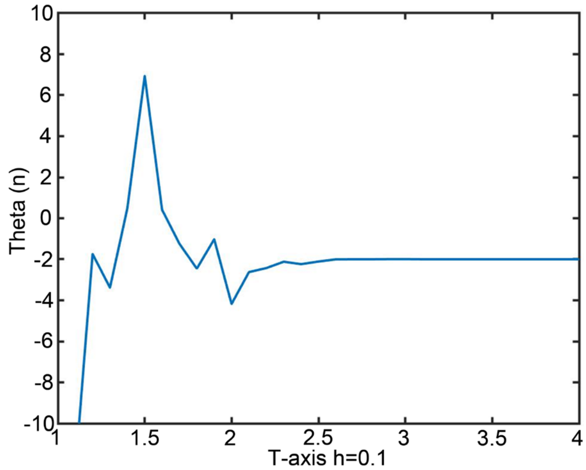

Figure 1. Curve: $\hat{\theta}$ when $h=0.01$

图 1. 当 $h=0.01$ 时 $\hat{\theta}$ 的模拟曲线

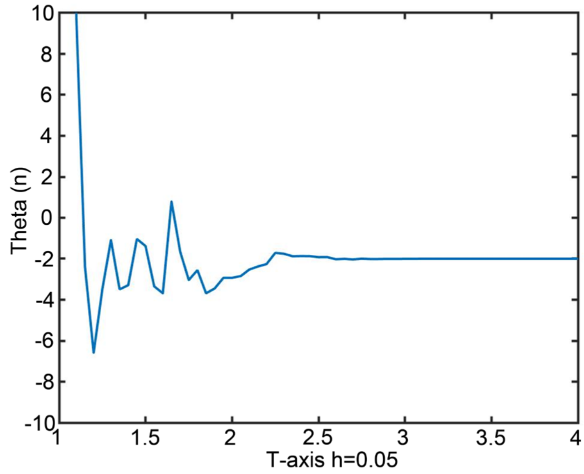

Figure 2. Curve: $\hat{\theta}$ when $h = 0.05$

图 2. 当 $h = 0.05$ 时 $\hat{\theta}$ 的模拟曲线

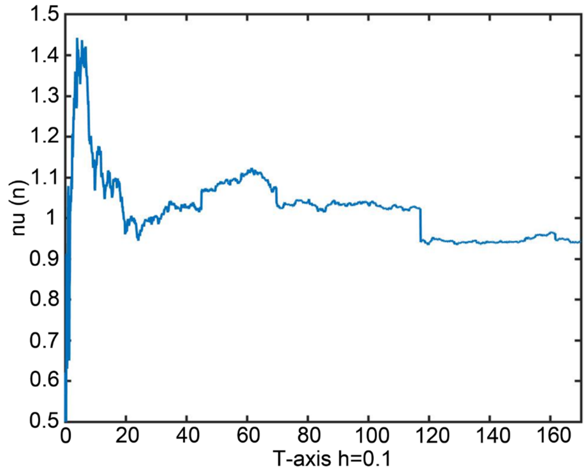

Figure 3. Curve: $\hat{\nu}$ when $h = 0.1$

图 3. 当 $h = 0.01$ 时 $\hat{\nu}$ 的模拟曲线

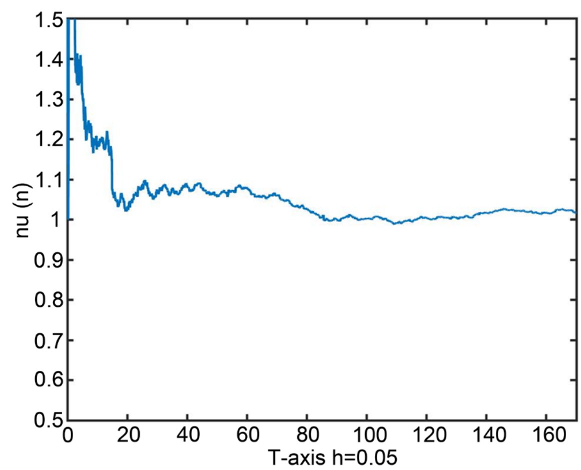

Figure 4. Curve: $\hat{\nu}$ when $h = 0.1$

图 4. 当 $h = 0.01$ 时 $\hat{\nu}$ 的模拟曲线

参考文献

[1] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1992) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[2] Cranston, M. and Le Jan, Y. (1995) Self-Attracting Diffusion: Two Case Studies. *Mathematische Annalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[3] Benaïm, M., Ciotir, I. and Gauthier, C.-E. (2015) Self-Repelling Diffusions via an Infinite Dimensional Approach. *Stochastic Partial Differential Equations*: *Analysis and Computations*, **3**, 506-530. https://doi.org/10.1007/s40072-015-0059-5

[4] Benaïm, M., Ledoux, M. and Raimond, O. (2002) Self-Interacting Diffusions. *Probability Theory and Related Fields*, **122**, 1-41. https://doi.org/10.1007/s004400100161

[5] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. https://doi.org/10.1214/aop/1065725183

[6] Gauthier, C.-E. (2016) Self Attracting Diffusions on a Sphere and Application to a Periodic Case. *Electronic Communications in Probability*, **21**, 1-12. https://doi.org/10.1214/16-ECP4547

[7] Herrmann, S. and Roynette, B. (2003) Boundedness and Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Mathematische Annalen*, **325**, 81-96. https://doi.org/10.1007/s00208-002-0370-0

[8] Herrmann, S. and Scheutzow, M. (2004) Rate of Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **111**, 41-55. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.10.012

[9] Mountford, T. and Tarrès, P. (2008) An Asymptotic Result for Brownian Polymers. *Annales de l'IHP Probabilités et Statistiques*, **44**, 29-46. https://doi.org/10.1214/07-AIHP113

[10] Sun, X. and Yan, L. (2020) A Convergence on the Linear Self-Interacting Diffusion Driven by α-Stable Motion, to Appear. *Stochastics*. https://doi.org/10.1080/17442508.2020.1869239

[11] Li, Z. and Ma, C. (2015) Asymptotic Properties of Estimators in a Stable Cox-Ingersoll-Ross Model. *Stochastic Processes and Their Applications*, **125**, 3196-3233. https://doi.org/10.1016/j.spa.2015.03.002

[12] Shimizu, Y. (2006) *M*-Estimation for Discretely Observed Ergodic Diffusion Processes with Infinite Jumps. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 179-225. https://doi.org/10.1007/s11203-005-8113-y

[13] Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006) Estimation of Parameters for Diffusion Processes with Jumps from Discrete Observations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 227-277. https://doi.org/10.1007/s11203-005-8114-x

[14] Hu, Y. and Long, H. (2009) Least Squares Estimator for Ornstein—Uhlenbeck Processes Driven by α-Stable Motions. *Stochastic Processes and their Applications*, **119**, 2465-2480. https://doi.org/10.1016/j.spa.2008.12.006

[15] Applebaum, D. (2004) Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755323

[16] Rosinski, J. and Woyczynski, W.A. (1986) On Itô Stochastic Integration with Respect to P-Stable Motion: Inner Clock, Integrability of Sample Paths, Double and Multiple Integrals. *Annals of Probability*, **14**, 271-286. https://doi.org/10.1214/aop/1176992627

[17] Kallenberg, O. (1992) Some Time Change Representations of Stable Integrals, via Predictable Transformations of Local Martingales. *Stochastic Processes and Their Applications*, **40**, 199-223. https://doi.org/10.1016/0304-4149(92)90012-F

[18] Protter, P. (2005) Stochastic Integration and Differential Equations. Vol. 21, Springer, Berlin, Heidelberg and New York. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10061-5