

# 二元凸复合与DC复合优化问题的最优性条件

肖程凤\*, 田超松

吉首大学师范学院, 湖南 吉首

收稿日期: 2024年3月28日; 录用日期: 2024年4月23日; 发布日期: 2024年4月30日

## 摘要

利用变分分析相关结论, 对二元凸复合优化问题和DC复合优化问题的最优解进行刻画, 推广了前人的相关结论。

## 关键词

凸复合优化问题, DC复合优化问题, 最优性条件

# Optimality Conditions for the Convex Composite Optimization and Composite Optimization of DC with Binary Variable

Chengfeng Xiao\*, Chaosong Tian

College of Normal, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Mar. 28<sup>th</sup>, 2024; accepted: Apr. 23<sup>rd</sup>, 2024; published: Apr. 30<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Characterizations of optimal solutions of convex and DC of composite optimization problems are described based on advanced tools of variational analysis, which extend the corresponding results in the previous papers.

## Keywords

Convex Composite Optimization Problem, DC Composite Optimization Problem, Optimality Condition

\*通讯作者。

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

## 1. 引言

在实际生产生活中二元函数占据着举足轻重的地位, 当目标函数或约束函数为二元函数时, 约束优化问题的复杂程度、研究难度大大提高。对目标函数为二元函数, 约束函数带一元函数的约束优化问题, 已有诸多学者利用集值映射协导数、次微分性质、闭性条件等进行研究, 得到了值函数次微分的估计式、*KKT* 类最优性条件等(参看文献[1] [2] [3] [4])。而对于目标函数为二元复合函数的约束优化问题少有研究, 因此本文考虑目标函数为二元复合函数, 约束函数为一元复合函数的二元复合优化问题, 利用函数的 Fréchet 次微分和集值映射协导数的相关性质及闭性约束规范条件, 建立该问题的最优性条件。又因为 *DC* (两个凸函数的差)优化问题无论是在理论意义还是实际应用方面都比凸优化问题更加具有普遍性, 而且许多的实际问题都可以转化成 *DC* 优化问题, 因此 *DC* 优化问题受到了学者们的广泛关注。学者们利用协导数性质、凸化技巧等对 *DC* 优化问题值函数的次微分进行估计, 并对最优性条件进行刻画(参看文献[4] [5] [6] [7])。受此启发, 本文将再次对目标函数为二元复合 *DC* 函数, 约束函数为一元复合 *DC* 函数的这一类二元 *DC* 复合优化问题进行研究, 通过利用凸化技巧、集值映射协导数的性质, 建立该问题的最优性必要条件。

## 2. 预备知识

设  $P, X, Z_1$  和  $Z_2$  是 Banach 空间,  $P^*, X^*, Z_1^*$  和  $Z_2^*$  分别是  $P, X, Z_1$  和  $Z_2$  的共轭空间。定义  $Y$  上的序为: 若  $y - x \in -K$ , 则  $y \leq_K x$ 。设  $Z$  是  $X$  的非空子集, 记  $Z$  的凸锥包和闭包分别为  $\text{cone}Z$  和  $\text{cl}Z$ 。用  $\langle x^*, x \rangle$  表示泛函  $x^* \in X^*$  在点  $x \in X$  的值, 即  $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$ 。非空集合  $Z$  的对偶锥和示性函数分别定义为:  $Z^\oplus := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \geq 0, \forall x \in Z\}$ ,

$$\delta_Z(x) := \begin{cases} 0, & x \in Z, \\ +\infty, & \text{其它} \end{cases}$$

定义凸子集  $Z$  在  $z_0 \in Z_0$  处的法锥为  $N(z_0; Z) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, z - z_0 \rangle \leq 0, \forall z \in Z\}$ 。设  $T$  是任意(可能无限)指标集, 令  $\mathbb{R}^T$  表示定义在  $T$  上的实值函数所组成的空间, 并赋予乘积拓扑。记

$$\mathbb{R}^{(T)} := \{\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}^T : \text{最多只有有限个 } \lambda_t \neq 0\}.$$

用  $\mathbb{R}_+^{(T)}$  表示  $\mathbb{R}^{(T)}$  上的非负锥, 即  $\mathbb{R}_+^{(T)} := \{(\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}^{(T)} : \lambda_t \geq 0, \forall t \in T\}$ 。设  $f$  是  $X$  上的真函数, 定义  $f$  的有效定义域, 上图和共轭函数分别为:  $\text{dom}f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ ,  $\text{epi}f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ ,  $f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) : x \in X\}, \forall x^* \in X^*$ 。显然,  $\text{epi}f^*$  是弱\* 闭集。对任意的  $r \in \mathbb{R}, p \in X^*$ , 函数  $h: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 有

$$\text{epi}(h + p + r)^* = \text{epi}h^* + (p, -r), \quad (2.1)$$

$$(h + p + r)^*(x^*) = h^*(x^* - p) - r, \forall x^* \in X^*. \quad (2.2)$$

当  $f$  是凸函数时,  $f$  在点  $x \in \text{dom}f$  的次微分定义为  $\partial f(x) := \{x^* \in X^* : f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y), \forall y \in X\}$ 。由文[7]的定理 2.3.1 (ii)和定理 2.4.2 (iii)知 Young - Fenchel 不等式和 Young 等式成立, 即

$$f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \forall (x, x^*) \in X \times X^*, \tag{2.3}$$

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle. \tag{2.4}$$

设  $\Omega \subset X$ , 定义  $\Omega$  在点  $x_0$  的 Fréchet 法锥为

$$\widehat{N}(x_0; \Omega) := \left\{ x^* \in X^* : \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} x_0} \frac{\langle x^*, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \leq 0 \right\},$$

其中:  $x \xrightarrow{\Omega} x_0$  表示  $x \in \Omega$  且  $x \rightarrow x_0$ 。特别地, 当集合  $\Omega$  是凸集时, Fréchet 法锥即为凸分析中经典的法锥。设  $G: X \rightrightarrows Y$  是定义在  $X$  上满足  $G(x) \subseteq Y$  的集值映射, 定义  $G$  的定义域和图分别为  $\text{dom}G := \{x \in X : G(x) \neq \emptyset\}$ ,  $\text{gph}G := \{(x, y) \in X \times Y : y \in G(x)\}$ 。定义集值映射  $G$  在点  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}G$  的协

导数  $\widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$  为  $\widehat{D}^*G(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in \widehat{N}((\bar{x}, \bar{y}); \text{gph}G)\}$ ,  $\forall y^* \in Y^*$ 。设  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  是实值延拓函数, 点  $x_0 \in \text{dom}\phi$  且满足  $|\phi(x_0)| < +\infty$ 。由文[8]知, 函数  $\phi$  在  $x_0$  处  $\varepsilon$ -Fréchet 次微分

定义为  $\widehat{\partial}_\varepsilon\phi(x_0) := \left\{ x^* \in X^* : \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0) - \langle x^*, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \geq -\varepsilon \right\}$ ,  $\varepsilon \geq 0$ 。当  $x_0 \notin \text{dom}\phi$  时,  $\widehat{\partial}_\varepsilon\phi(x_0) = \emptyset$ 。

当  $\varepsilon = 0$  时,  $\widehat{\partial}\phi(x_0) := \widehat{\partial}_0\phi(x_0)$  为  $\phi$  在  $x_0$  处 Fréchet 次微分。特别地, 当  $\phi$  是凸函数时,  $\widehat{\partial}\phi(x_0) := \partial\phi(x_0)$  即为凸分析中经典的次微分。由定义由

$$x_0 \text{ 是 } \phi \text{ 的局部最优解} \Rightarrow 0 \in \widehat{\partial}\phi(x_0). \tag{2.5}$$

由文[9]知, 设函数  $\psi: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , 对任意的  $x, y \in Y$ , 若当  $y \leq_K x$  时有  $\psi(y) \leq \psi(x)$ , 则称函数  $\psi$  是  $K$ -增函数。设函数  $\varphi: X \rightarrow Y$ , 对任意的  $x_1, x_2 \in X, t \in [0, 1]$ , 有  $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq_K t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2)$ , 则称函数  $\varphi$  是  $K$ -凸函数。对于任意的  $\lambda \in K^\circ$ , 定义  $(\lambda\varphi)(\cdot): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  为

$$(\lambda\varphi)(x) := \begin{cases} \langle \lambda, \varphi(x) \rangle, & x \in \text{dom}\varphi, \\ +\infty, & \text{其它.} \end{cases}$$

显然,  $\varphi$  为  $K$ -凸函数当且仅当对任意的  $\lambda \in K^\circ, \lambda\varphi$  为凸函数。若

对任意的  $\lambda \in K^\circ, \lambda\varphi(\cdot): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  是下半连续函数, 则称函数  $\varphi$  是  $star-K$ -下半连续函数。定义复合函数的

$$\text{复合形式为 } (f \circ \varphi)(x) := \begin{cases} f(\varphi(x)), & x \in \text{dom}\varphi, \\ +\infty, & \text{其它.} \end{cases}$$

并且, 对  $X$  上的系统  $\{S_t : t \in T\}$ , 约定  $\bigcap_{t \in \emptyset} S_t = X$ 。

### 3. 两类复合优化问题的最优性条件

设  $T$  是任意指标集,  $a_t^* \in P^*$  是一固定值,  $\varphi: P \times X \rightarrow Z_1 \times Z_2$  是真  $K$ -凸映射,  $f: Z_1 \times Z_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  是真凸  $K$ -增函数,  $h: X \rightarrow Z_2$  是真  $K$ -凸且  $star-K$ -下半连续映射,  $f_t: Z_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, t \in T$  是真凸下半连续且  $K$ -增函数,  $g: P \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  和  $g_t: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, t \in T$  均为真凸函数。本文主要研究二元凸复合优化问题

$$(P) \begin{cases} \text{Min } (f \circ \varphi)(p, x) \\ \text{s. t. } (f_t \circ h)(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, t \in T \end{cases}$$

和二元  $DC$  复合优化问题

$$(\overline{P}) \begin{cases} \text{Min } (f \circ \varphi)(p, x) - g(p, x) \\ \text{s. t. } (f_t \circ h)(x) - g_t(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, t \in T \end{cases}$$

的最优性条件。

### 3.1. 凸复合优化问题的最优性条件

本节主要对问题 (P) 最优解的特征进行刻画。定义可行解集映射  $F: P \rightrightarrows X$  为

$$F(p) := \{x \in X : f_i(h(x)) \leq \langle a_i^*, p \rangle, t \in T\}, \forall p \in P.$$

分别定义可行解集映射  $F$  的图和特征集  $C(p)$  为

$$\begin{aligned} \text{gph}F &:= \{(p, x) \in P \times X : f_i(h(x)) \leq \langle a_i^*, p \rangle, t \in T\}, \\ C(p) &:= \text{cone} \left( \bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, t \in T} \left( \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* + (0, \langle a_i^*, p \rangle) \right) \right). \end{aligned}$$

设  $(p, x) \in P \times X$ , 记  $T(p, x)$  为点  $(p, x)$  的活动指标集, 即

$$T(p, x) := \{t \in T : f_t(h(x)) = \langle a_t^*, p \rangle\}.$$

由文[7]可得以下引理。

**引理 3.1.1 [7]** 设  $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  是真凸函数,  $\varphi: \text{dom}\varphi \subset X \rightarrow Z^*$  是真  $K$ -凸函数,  $f: Z \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  为真凸函数且在  $\varphi(\text{dom}\varphi) + K$  上是  $K$ -增函数。若存在点  $x_0 \in \text{dom}g + \varphi^{-1}(\text{dom}f)$  使得函数  $f$  在  $\varphi(x_0)$  处连续, 则对任意的  $x^* \in X^*$  有

$$(g + f \circ \varphi)^*(x^*) = \min_{\beta \in \text{dom}f^*} (f^*(\beta) + (g + \beta\varphi)^*(x^*)),$$

或者

$$\text{epi}(g + f \circ \varphi)^* = \bigcup_{\beta \in \text{dom}f^*} \text{epi}(g + \beta\varphi - f^*(\beta))^*,$$

且对任意的  $x \in \text{dom}g + \varphi^{-1}(\text{dom}f)$ , 有

$$\partial(f \circ \varphi + g)(x) = \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(x))} \partial(\beta\varphi + g)(x).$$

故由引理 3.1.1 可得以下命题。

**命题 3.1.1** 设  $p \in \text{dom}F, (x^*, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$ 。若存在点  $x_0 \in h^{-1}(\bigcap_{t \in T} \text{dom}f_t)$  使得  $f_t$  在  $h(x_0)$  处连续, 则

$$\langle x^*, x \rangle \leq \alpha, \forall x \in F(p) \Leftrightarrow (x^*, \alpha) \in \text{cl}C(p).$$

**证明** 设对任意的  $x \in F(p)$ , 有  $\langle x^*, x \rangle \leq \alpha$ , 则

$$\sup_{x \in X} \{\langle x^*, x \rangle - \delta_{F(p)}(x)\} \leq \alpha, \forall x^* \in X^*,$$

故  $\delta_{F(p)}^*(x^*) \leq \alpha$ , 即  $(x^*, \alpha) \in \text{epi}\delta_{F(p)}^*$ 。由文[10] (3.1)式和(2.1)式可得

$$\begin{aligned} \text{epi}\delta_{F(p)}^* &= \text{cl} \left( \text{epi}\delta_X^* + \text{cone} \left( \bigcup_{t \in T} \text{epi}(f_t \circ h - \langle a_t^*, p \rangle)^* \right) \right) \\ &= \text{cl} \left( \text{cone} \left( \bigcup_{t \in T} \left( \text{epi}(f_t \circ h)^* + (0, \langle a_t^*, p \rangle) \right) \right) \right) \\ &= \text{cl} \left( \text{cone} \left( \bigcup_{t \in T} \left( \bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*} \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* + (0, \langle a_i^*, p \rangle) \right) \right) \right) \\ &= \text{cl}C(p), \end{aligned}$$

故  $(x^*, \alpha) \in \text{cl}C(p)$ 。显然逆推亦成立, 证毕。

**定理 3.1.1** 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F, (p^*, x^*) \in P^* \times X^*$ 。若存在点  $x_0 \in h^{-1}\left(\bigcap_{i \in T} \text{dom}f_i\right)$  使得  $f_i$  在  $h(x_0)$  处连续, 则  $p^* \in \widehat{D}^*F(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$  当且仅当

$$(p^*, -x^*, \langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle) \in \text{cl}\left(\text{cone}\left(\bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, i \in T} \left[ \{-a_i^*\} \times \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* \right]\right)\right).$$

**证明** 根据协导数的定义可知,  $p^* \in \widehat{D}^*F(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$  当且仅当  $(p^*, -x^*) \in \widehat{N}((\bar{p}, \bar{x}); \text{ghp}F)$ 。由  $\text{ghp}F$  是凸集及法锥定义可得

$$\langle p^*, p \rangle - \langle x^*, x \rangle \leq \langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle, \forall (p, x) \in \text{ghp}F.$$

结合命题 3.1.1 可知, 上式成立当且仅当

$$(p^*, -x^*, \langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle) \in \text{cl}\left(\text{cone}\left(\bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, i \in T} \left[ \{-a_i^*\} \times \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* \right]\right)\right).$$

证毕。

接下来考虑问题  $(P)$  的最优性条件。

**定理 3.1.2** 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  是问题  $(P)$  的极小点, 若存在点  $(p_1, x_1) \in \varphi^{-1}(\text{dom}f) \cap \text{ghp}F, x_0 \in h^{-1}\left(\bigcap_{i \in T} \text{dom}f_i\right)$  使得函数  $f, f_i$  分别在点  $\varphi(p_1, x_1), h(x_0)$  处连续, 则存在点  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta\varphi)(\bar{p}, \bar{x})$ , 使得

$$(-p^*, -x^*, -\langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle) \in \text{cl}\left(\text{cone}\left(\bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, i \in T} \left[ \{-a_i^*\} \times \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* \right]\right)\right). \quad (3.1)$$

若

$$\text{cone}\left(\bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, i \in T} \left[ \{-a_i^*\} \times \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* \right]\right) \text{ 在 } P^* \times X^* \times \mathbb{R} \text{ 上是弱}^* \text{ 闭集}, \quad (3.2)$$

则存在  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta\varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \lambda = (\lambda_i)_{i \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  和  $\beta_i \in \partial f_i(h(\bar{x}))$  使得

$$\begin{cases} p^* = \sum_{i \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_i a_i^*, \\ -x^* \in \sum_{i \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_i \partial(\beta_i h)(\bar{x}). \end{cases} \quad (3.3)$$

**证明** 由  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  是问题  $(P)$  的极小点知,  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  亦是问题

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(\varphi(p, x)) \\ & \text{s. t. } (p, x) \in \text{ghp}F \end{aligned}$$

的极小点。根据(2.5)式可得

$$0 \in \widehat{\partial}(f \circ \varphi + \delta_{\text{ghp}F})(\bar{p}, \bar{x}).$$

又存在点  $(p_1, x_1) \in \varphi^{-1}(\text{dom}f) \cap \text{ghp}F$ , 使得函数  $f$  在点  $\varphi(p_1, x_1)$  处连续, 且  $f \circ \varphi$  为凸函数、 $\text{ghp}F$  是凸集, 故

$$0 \in \partial(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}) + N((\bar{p}, \bar{x}); \text{ghp}F).$$

再结合引理 3.1.1 得

$$0 \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\bar{p}, \bar{x})} \partial(\beta\varphi)(\bar{p}, \bar{x}) + N((\bar{p}, \bar{x}); \text{ghp}F).$$

故存在点  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\bar{p}, \bar{x})} \partial(\beta\varphi)(\bar{p}, \bar{x})$  使得  $(-p^*, -x^*) \in N((\bar{p}, \bar{x}); \text{ghp}F)$ 。因此由协导数定义知  $-p^* \in \widehat{D}^*F(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$ ，从而由定理 3.1.1 可知(3.1)式成立。

若(3.2)式成立，则存在  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\bar{p}, \bar{x})} \partial(\beta\varphi)(\bar{p}, \bar{x})$ ，使得

$$(-p^*, -x^*, -\langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle) \in \text{cone} \left( \bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, i \in T} \left[ \{-a_i^*\} \times \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^* \right] \right).$$

故由锥的定义可知，存在  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  和  $\beta_i \in \text{dom}f_i^*, t \in T_0, (x_i^*, r_i) \in \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*$ ，使得

$$(-p^*, -x^*, -\langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle) = \left( \sum_{i \in T_0} \lambda_i (-a_i^*), \sum_{i \in T_0} \lambda_i x_i^*, \sum_{i \in T_0} \lambda_i r_i \right), \tag{3.4}$$

其中  $T_0 := \{t \in T : \lambda_t \neq 0\}$  是  $T$  中有限子集。由此可知，欲证(3.3)式成立，只需证对任意的  $t \in T_0$ ，有  $x_t^* \in \partial(\beta_t h)(\bar{x}), \beta_t \in \partial f_t(h(\bar{x}))$  且  $T_0 \subseteq T(\bar{p}, \bar{x})$ 。现依次给出证明。结合(3.4)式， $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  可得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T_0} \lambda_i (\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*(x_i^*) &\leq \sum_{i \in T_0} \lambda_i r_i \\ &= -\langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle \\ &= \sum_{i \in T_0} \lambda_i [\langle x_i^*, \bar{x} \rangle - \langle a_i^*, \bar{p} \rangle] \\ &\leq \sum_{i \in T_0} \lambda_i [\langle x_i^*, \bar{x} \rangle - f_i(h(\bar{x}))], \end{aligned}$$

即

$$(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*(x_i^*) \leq \langle x_i^*, \bar{x} \rangle - f_i(h(\bar{x})). \tag{3.5}$$

由(2.3)式知

$$(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*(x_i^*) \geq \langle x_i^*, \bar{x} \rangle - (\beta_i h - f_i^*(\beta_i))(h(\bar{x})), \tag{3.6}$$

$$f_i^*(\beta_i) \geq \langle \beta_i, h(\bar{x}) \rangle - f_i(h(\bar{x})). \tag{3.7}$$

结合(3.5)，(3.7)式可知

$$(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*(x_i^*) \leq \langle x_i^*, \bar{x} \rangle - (\beta_i h - f_i^*(\beta_i))(h(\bar{x})),$$

故由(2.2)，(3.6)式可得

$$(\beta_i h)^*(x_i^*) = \langle x_i^*, \bar{x} \rangle - (\beta_i h)(h(\bar{x})),$$

因此  $x_i^* \in \partial(\beta_i h)(h(\bar{x}))$ 。

进一步，由(3.5)，(3.6)式知

$$(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))(h(\bar{x})) \geq f_i(h(\bar{x})),$$

即

$$\langle \beta_i, h(\bar{x}) \rangle - f_i(h(\bar{x})) \geq f_i^*(\beta_i). \tag{3.8}$$

从而, 由(3.7), (3.8)式知

$$\langle \beta_i, h(\bar{x}) \rangle - f_i(h(\bar{x})) = f_i^*(\beta_i), \tag{3.9}$$

故, 结合(2.4)式可知  $\beta_i \in \partial f_i(h(\bar{x}))$ 。

下面只需证明  $T_0 \subseteq T(\bar{p}, \bar{x})$ 。结合(3.4), (3.9)式及  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  可得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} \lambda_i \langle x_i^*, \bar{x} \rangle &= \sum_{i \in I_0} \lambda_i r_i + \langle p^*, \bar{p} \rangle \\ &\geq \sum_{i \in I_0} \lambda_i (\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*(x_i^*) + \langle p^*, \bar{p} \rangle \\ &\geq \sum_{i \in I_0} \lambda_i [\langle x_i^*, \bar{x} \rangle - (\beta_i h - f_i^*(\beta_i))(\bar{x}) + \langle a_i^*, \bar{p} \rangle] \\ &= \sum_{i \in I_0} \lambda_i [\langle x_i^*, \bar{x} \rangle + \langle a_i^*, \bar{p} \rangle - f_i(h(\bar{x}))] \\ &\geq \sum_{i \in I_0} \lambda_i \langle x_i^*, \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

由此可知

$$f_i(h(\bar{x})) = \langle a_i^*, \bar{p} \rangle,$$

从而由  $T(\bar{p}, \bar{x})$  定义得  $T_0 \subseteq T(\bar{p}, \bar{x})$ , 证毕。

**定义 3.1.1** [8] 若存在线性连续算子  $\nabla m(x_0): X \rightarrow Y$  使得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0) - \langle \nabla m(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0,$$

则称函数  $m: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  在点  $x_0$  处 Fréchet 可微。

由上述定义及文([8], 命题 1.87)知, 若函数  $f \circ \varphi$  在点  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  处 Fréchet 可微, 则有下式成立

$$\hat{\partial}(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}) = \{(\nabla_p(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}))\}.$$

因此, 由定理 3.1.2 可知下面推论成立。

**推论 3.1.1** 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}F$  问题  $(P)$  的极小点, 若存在点  $x_0 \in h^{-1}(\bigcap_{i \in T} \text{dom}f_i)$  使得  $f_i$  在  $h(x_0)$  处连续, 且函数  $f \circ \varphi$  在点  $(\bar{p}, \bar{x})$  处 Fréchet 可微, 则

$$\begin{aligned} &(-\nabla_p(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), -\nabla_x(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), -\langle \nabla_p(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \bar{p} \rangle - \langle \nabla_x(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \bar{x} \rangle) \\ &\in \text{cl} \left( \text{cone} \left( \bigcup_{\beta_i \in \text{dom}f_i^*, i \in T} [\{-a_i^*\} \times \text{epi}(\beta_i h - f_i^*(\beta_i))^*] \right) \right). \end{aligned}$$

若(3.2)式成立, 则存在  $\lambda = (\lambda_i)_{i \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \beta_i \in \partial f_i(h(\bar{x}))$ , 使得

$$\begin{cases} \nabla_p(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}) = \sum_{i \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_i a_i^*, \\ -\nabla_x(f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}) \in \sum_{i \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_i \partial(\beta_i h)(\bar{x}). \end{cases}$$

**注 3.1.1** 当  $\varphi, h$  为单位映射时, 定理 3.1.2 转化为文([4], 定理 3.4)。因此, 本文推广了文[4]中的相关结论。

### 3.2. DC 复合优化问题的最优化条件

本节主要对问题  $(\bar{P})$  最优解的特征进行刻画。定义

$$(f_t \circ h)(x) - g_t(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, t \in T \tag{3.10}$$

的可行解集映射  $\bar{F}: P \rightrightarrows X$  为

$$\bar{F}(p) := \{x \in X : (f_t \circ h)(x) - g_t(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, t \in T\}, \forall p \in P.$$

设  $\omega^* := (\omega_t^*)_{t \in T} \in W^* := \prod_{t \in T} \text{dom} g_t^*$ 。定义凸函数  $\bar{F}_t^{\omega^*}: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  为

$$\bar{F}_t^{\omega^*}(x) := (f_t \circ h)(x) - \langle \omega_t^*, x \rangle + g_t^*(\omega_t^*), \forall x \in X, t \in T.$$

定义凸不等式系统

$$\bar{F}_t^{\omega^*}(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, t \in T \tag{3.11}$$

的可行解集映射  $\bar{F}^{\omega^*}: P \rightrightarrows X$  为

$$\bar{F}^{\omega^*}(p) := \{x \in X : \bar{F}_t^{\omega^*}(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, t \in T\}, \forall p \in P.$$

映射  $\bar{F}$  和映射  $\bar{F}^{\omega^*}$  的图分别定义为

$$\begin{aligned} \text{ghp} \bar{F} &:= \{(p, x) \in P \times X : (f_t \circ h)(x) - g_t(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, \forall t \in T\}, \\ \text{ghp} \bar{F}^{\omega^*} &:= \{(p, x) \in P \times X : \bar{F}_t^{\omega^*}(x) \leq \langle a_t^*, p \rangle, \forall t \in T\}. \end{aligned}$$

记

$$\Omega^{\omega^*} := \text{cone} \left( \bigcup_{\beta_t \in \text{dom} f_t^*, t \in T} \left( \{-a_t^*\} \times \left( \text{epi}(\beta_t h - f_t^*(\beta_t))^* - (\omega_t^*, g_t^*(\omega_t^*)) \right) \right) \right).$$

下面两个引理将给出系统(3.10)和系统(3.11)之间的关系, 其证明过程与文([4], 引理 4.1 和 4.2)类似, 故此处省略。

**引理 3.2.1** (i) 设  $p \in P$ 。对任意的  $\omega^* \in W^*$ , 有

$$\bar{F}^{\omega^*}(p) \subseteq \bar{F}(p), \text{gph} \bar{F}^{\omega^*} \subseteq \text{gph} \bar{F}, \text{epi} \delta_{\bar{F}(p)}^* \subseteq \text{epi} \delta_{\bar{F}^{\omega^*}(p)}^*,$$

和

$$\widehat{N}(x; \bar{F}(p)) \subseteq N(x; \bar{F}^{\omega^*}(p)), \forall x \in \bar{F}^{\omega^*}(p).$$

(ii) 设  $(p, x) \in \text{ghp} \bar{F}$ 。若函数  $g_t, t \in T$  在点  $x$  处次可微, 则

$$\bar{F}(p) = \bigcup_{\omega_t^* \in \text{dom} g_t^*} \bar{F}^{\omega_t^*}(p) = \bigcup_{\omega_t^* \in \partial g_t(x)} \bar{F}^{\omega_t^*}(p),$$

且

$$\text{epi} \delta_{\bar{F}(p)}^* = \bigcap_{\omega_t^* \in \text{dom} g_t^*} \text{epi} \delta_{\bar{F}^{\omega_t^*}(p)}^* = \bigcap_{\omega_t^* \in \partial g_t(x)} \text{epi} \delta_{\bar{F}^{\omega_t^*}(p)}^*.$$

若  $\bar{F}(p)$  为凸集, 则对任意的  $x \in \bar{F}(p)$ , 有  $N(x; \bar{F}(p)) = \bigcap_{\omega_t^* \in \partial g_t(x)} N(x; \bar{F}^{\omega_t^*}(p))$ 。

**引理 3.2.2** (i) 设  $\omega^* \in W^*, (p, x) \in \text{ghp} \bar{F}^{\omega^*}$ 。则

$$\widehat{D}^* \bar{F}(p, x)(x^*) \subseteq \widehat{D}^* \bar{F}^{\omega^*}(p, x)(x^*), \forall x^* \in X^*. \tag{3.12}$$

(ii) 设  $(p, x) \in \text{ghp} \bar{F}$ 。若函数  $g_t, t \in T$  在点  $x$  处次可微且  $\text{ghp} \bar{F}$  是凸集, 则



$$\widehat{D}^* \bar{F}(p, x)(x^*) = \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(x)} \widehat{D}^* \bar{F}^{\omega_i^*}(p, x)(x^*), \forall x^* \in X^*. \quad (3.13)$$

**定理 3.2.1** 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp} \bar{F}$ 。假设存在点  $x_0 \in h^{-1}\left(\bigcap_{t \in T} \text{dom} f_t\right)$ , 使得  $f_t, t \in T$  在  $h(x_0)$  处连续。若  $p^* \in \widehat{D}^* \bar{F}(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$ , 则

$$\left(p^*, -x^*, \langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle\right) \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \text{cl} \Omega^{\omega_i^*}. \quad (3.14)$$

进一步, 若函数  $g_t, t \in T$  在点  $\bar{x}$  处次可微,  $\text{ghp} \bar{F}$  是凸集且(3.14)式成立, 则  $p^* \in \widehat{D}^* \bar{F}(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$ 。

**证明** 设  $p^* \in \widehat{D}^* \bar{F}(\bar{p}, \bar{x})(x^*), \omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ 。由(2.4)式和  $\text{ghp} \bar{F}^{\omega_i^*}$  的定义可知,  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp} \bar{F}^{\omega_i^*}$ 。又有(3.12)式成立, 故  $p^* \in \widehat{D}^* \bar{F}^{\omega_i^*}(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$ 。从而, 由定理 3.1.1 有

$$\left(p^*, -x^*, \langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle\right) \in \text{cl} \Omega^{\omega_i^*}.$$

注意到, 对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$  上式皆成立, 因此(3.14)式成立。

进一步, 当函数  $g_t, t \in T$  在点  $\bar{x}$  处次可微且  $\text{ghp} \bar{F}$  是凸集时, (3.13)式成立。故欲证  $p^* \in \widehat{D}^* \bar{F}(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$ , 只需证明  $p^* \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \widehat{D}^* \bar{F}^{\omega_i^*}(\bar{p}, \bar{x})(x^*)$ 。结合(3.14)式及定理 3.1.1 知  $p^* \in \widehat{D}^* \bar{F}^{\omega_i^*}(\bar{p}, \bar{x})(x^*), \forall \omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ , 故结论成立, 证毕。

由文[11]知, 对于真函数  $h: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  和非空子集  $\Omega \subseteq X$ , 若  $\hat{\partial}(h + \delta_\Omega)(x_0) \subseteq \hat{\partial}h(x_0) + \widehat{N}_\Omega(x_0)$ , 则称函数  $h$  在点  $x_0 \in \Omega$  处 Fréchet 可分解。

**定理 3.2.2** 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp} \bar{F}$  是问题  $(\bar{P})$  的局部极小点。若存在点  $(p_1, x_1) \in \varphi^{-1}(\text{dom} f) \cap \text{ghp} \bar{F}$ ,  $x_0 \in h^{-1}\left(\bigcap_{t \in T} \text{dom} f_t\right)$  使得函数  $f, f_t, t \in T$  分别在点  $\varphi(p_1, x_1), h(x_0)$  处连续, 且对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ , 函数  $f \circ \varphi$  在  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp} \bar{F}^{\omega_i^*}$  处 Fréchet 可分解, 则对任意的点  $(p_1^*, x_1^*) \in \partial g(\bar{p}, \bar{x})$ , 存在点  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta \varphi)(\bar{p}, \bar{x})$  使得

$$\left(p_1^* - p^*, x_1^* - x^*, -\langle p_1^* - p^*, \bar{p} \rangle - \langle x_1^* - x^*, \bar{x} \rangle\right) \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \text{cl} \Omega^{\omega_i^*}. \quad (3.15)$$

若对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ ,

$$\Omega^{\omega_i^*} \text{ 是弱}^* \text{ 闭集}, \quad (3.16)$$

则对任意的  $(p_1^*, x_1^*) \in \partial g(\bar{p}, \bar{x})$ , 存在点  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , 使得

$$\begin{cases} p^* - p_1^* = \sum_{t \in \bar{T}(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t a_t^*, \\ x_1^* - x^* \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \sum_{t \in \bar{T}(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t \left( \bigcup_{r \in \partial f_r(h(\bar{x}))} \partial(rh)(\bar{x}) - \omega_i^* \right), \end{cases} \quad (3.17)$$

其中  $\bar{T}(\bar{p}, \bar{x}) := \{t \in T : (f_t \circ h)(\bar{x}) - g_t(\bar{x}) = \langle a_t^*, \bar{p} \rangle\}$ 。

**证明** 任取  $(p_1^*, x_1^*) \in \partial g(\bar{p}, \bar{x}), \omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ 。设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp} \bar{F}$  是问题  $(\bar{P})$  的局部极小点。由(2.4)式可知

$$g(\bar{p}, \bar{x}) = \langle p_1^*, \bar{p} \rangle + \langle x_1^*, \bar{x} \rangle - g^*(p_1^*, x_1^*).$$

定义凸函数  $H: P \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  为

$$H(p, x) := (f \circ \varphi)(p, x) - \langle p_1^*, p \rangle - \langle x_1^*, x \rangle + g^*(p_1^*, x_1^*), \forall (p, x) \in P \times X.$$

故对任意的  $\omega_t^* \in \partial g_t(\bar{x})$ , 点  $(\bar{p}, \bar{x})$  亦是问题

$$\begin{aligned} & \text{Min } H(p, x) \\ & \text{s. t. } (p, x) \in \text{ghp} F^{\omega_t^*} \end{aligned}$$

的极小点。于是由([4], 定理 3.4)式知, 存在点  $(\bar{p}^*, \bar{x}^*) \in \partial H(\bar{p}, \bar{x})$ , 使得

$$(-\bar{p}^*, -\bar{x}^*, -\langle \bar{p}^*, \bar{p} \rangle - \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle) \in \text{cl} \left( \text{cone} \left( \bigcup_{t \in T} \left\{ -a_t^* \right\} \times \text{epi} \left( \bar{F}_t^{\omega_t^*} \right)^* \right) \right). \quad (3.18)$$

由(2.5)式及引理 3.1.1 可知

$$\text{epi} \left( \bar{F}_t^{\omega_t^*} \right)^* = \bigcup_{\beta_t \in \text{dom} f_t^*} \text{epi} \left( \beta_t h - f_t^*(\beta_t) \right)^* - (\omega_t^*, g_t^*(\omega_t^*)), \forall t \in T. \quad (3.19)$$

由([7], 定理 2.4.2)及引理 3.1.1 可知

$$\partial H(p, x) = \partial(f \circ \varphi)(p, x) - (p_1^*, x_1^*) = \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(p, x))} \partial(\beta \varphi)(p, x) - (p_1^*, x_1^*). \quad (3.20)$$

结合(3.18)~(3.20)式可知, 存在  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta \varphi)(\bar{p}, \bar{x})$ , 使得

$$(p_1^* - p^*, x_1^* - x^*, -\langle p^* - p_1^*, \bar{p} \rangle - \langle x^* - x_1^*, \bar{x} \rangle) \in \text{cl} \Omega^{\omega_t^*},$$

又上式对任意的  $\omega_t^* \in \partial g_t(\bar{x})$  均成立, 故(3.15)式成立。

进一步, 由(3.16), (3.19)式可知,  $\text{cone} \left( \bigcup_{t \in T} \left\{ -a_t^* \right\} \times \text{epi} \left( \bar{F}_t^{\omega_t^*} \right)^* \right)$  也是弱\* 闭集。故由文([4], 定理 3.4)

知, 存在  $(\bar{p}^*, \bar{x}^*) \in \partial H(\bar{p}, \bar{x})$ ,  $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , 使得

$$\begin{cases} \bar{p}^* = \sum_{t \in T^{\omega_t^*}(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t a_t^*, \\ -\bar{x}^* \in \sum_{t \in T^{\omega_t^*}(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t \partial \left( \bar{F}_t^{\omega_t^*} \right) (\bar{x}), \end{cases}$$

其中  $T^{\omega_t^*}(\bar{p}, \bar{x}) := \{t \in T : \bar{F}_t^{\omega_t^*}(\bar{x}) = \langle a_t^*, \bar{p} \rangle\}$ 。而由([7], 定理 2.4.2)及引理 3.1.1 可知

$$\partial \left( \bar{F}_t^{\omega_t^*} \right) (\bar{x}) = \partial(f_t \circ h)(\bar{x}) - \omega_t^* = \bigcup_{r_t \in \partial f_t(h(\bar{x}))} \partial(r_t h)(\bar{x}) - \omega_t^*, t \in T.$$

从而, 结合(3.20)式可知, 存在点  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta \varphi)(\bar{p}, \bar{x})$ ,  $(\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , 使得

$$\begin{cases} p^* - p_1^* = \sum_{t \in T^{\omega_t^*}(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t a_t^*, \\ x_1^* - x^* \in \sum_{t \in T^{\omega_t^*}(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t \left( \bigcup_{r_t \in \partial f_t(h(\bar{x}))} \partial(r_t h)(\bar{x}) - \omega_t^* \right). \end{cases}$$

而上式对任意的  $\omega_t^* \in \prod_{t \in T} \partial g_t(\bar{x})$  均成立, 结合(2.4)式知

$$T^{\omega_t^*}(\bar{p}, \bar{x}) = \bar{T}(\bar{p}, \bar{x}) := \{t \in T : (f_t \circ h)(\bar{x}) - g_t(\bar{x}) = \langle a_t^*, \bar{p} \rangle\},$$

故(3.17)式成立。

结合定理 3.2.2 及文([8], 命题 1.87)直接可得以下推论。

**推论 3.2.1** 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}\bar{F}$  是问题  $(\bar{P})$  的局部极小点。若对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ , 函数  $f \circ \varphi$  在点  $(\bar{p}, \bar{x})$  处 Fréchet 可微, 且存在点  $x_0 \in h^{-1}(\bigcap_{i \in T} \text{dom}f_i)$  使得  $f_i, t \in T$  在  $h(x_0)$  处连续, 则对任意的点  $(p_1^*, x_1^*) \in \partial g(\bar{p}, \bar{x})$  有

$$\begin{aligned} & \left( p_1^* - \nabla_p (f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), x_1^* - \nabla_x (f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \langle p_1^* - \nabla_p (f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \bar{p} \rangle \right. \\ & \left. + \langle x_1^* - \nabla_x (f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}), \bar{x} \rangle \right) \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \text{cl}\Omega^{\omega_i^*}. \end{aligned}$$

若对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ , (3.16)式成立, 则对任意的  $(p_1^*, x_1^*) \in \partial g(\bar{p}, \bar{x})$ , 存在  $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ , 使得

$$\begin{cases} \nabla_p (f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}) - p_1^* = \sum_{t \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t a_t^*, \\ x_1^* - \nabla_x (f \circ \varphi)(\bar{p}, \bar{x}) \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \sum_{t \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t \left( \bigcup_{r_i \in \partial f_i(h(\bar{x}))} \partial(r_i h)(\bar{x}) - \omega_i^* \right). \end{cases}$$

**推论 3.2.2** 设  $g = 0$ , 设  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}\bar{F}$  是问题  $(\bar{P})$  的局部极小点。若对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ , 函数  $f \circ \varphi$  在点  $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{ghp}\bar{F}^{\omega_i^*}$  处 Fréchet 可分解, 且存在点  $(p_1, x_1) \in \varphi^{-1}(\text{dom}f) \cap \text{ghp}\bar{F}$ ,  $x_0 \in h^{-1}(\bigcap_{i \in T} \text{dom}f_i)$  使得函数  $f, f_i, t \in T$  分别在点  $\varphi(p_1, x_1), h(x_0)$  处连续, 则存在点  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta \varphi)(\bar{p}, \bar{x})$ , 使得

$$\left( -p^*, -x^*, -\langle p^*, \bar{p} \rangle - \langle x^*, \bar{x} \rangle \right) \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \text{cl}\Omega^{\omega_i^*}.$$

若对任意的  $\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})$ , (3.16)式成立, 则存在  $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ ,  $(p^*, x^*) \in \bigcup_{\beta \in \partial f(\varphi(\bar{p}, \bar{x}))} \partial(\beta \varphi)(\bar{p}, \bar{x})$ , 使得

$$\begin{cases} p^* = \sum_{t \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t a_t^*, \\ -x^* \in \bigcap_{\omega_i^* \in \partial g_i(\bar{x})} \sum_{t \in T(\bar{p}, \bar{x})} \lambda_t \left( \bigcup_{r_i \in \partial f_i(h(\bar{x}))} \partial(r_i h)(\bar{x}) - \omega_i^* \right). \end{cases}$$

**注 3.2.1** 当  $\varphi, h$  为单位映射时, 定理 3.2.2 转化为文([4]定理 4.4)。因此, 本文的定理 3.2.2 推广了文 [4]中的相关结论。

## 4. 结论

本文研究了二元凸复合优化和二元 DC 复合优化问题, 利用变分分析中可行解集映射协导数的相关性质、共轭函数上图性质及凸化技巧, 建立了这两类问题的最优性条件, 推广了文[4]中的结论。文中利用凸化的技巧将非凸函数转化为凸函数, 是一重要手段, 但现实生活中非凸函数更为寻常, 这种凸化手段并不一定适用于所有非凸函数。后续作者将考虑目标函数或约束函数是拟凸函数的情形, 寻找新的凸化方式, 从而得出系列结论。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(11861033)。

## 参考文献

- [1] Mordukhovich, B.S. and Nam, N.M. (2005) Variational Stability and Marginal Functions via Generalized Differentiation. *Mathematics of Operations Research*, **30**, 800-816. <https://doi.org/10.1287/moor.1050.0147>

- 
- [2] Mordukhovich, B.S., Nam, N.M. and Yen, N.D. (2009) Subgradients of Marginal Functions in Parametric Mathematical Programming. *Mathematical Programming*, **116**, 369-396. <https://doi.org/10.1007/s10107-007-0120-x>
- [3] Cánovas, M.J., López, M.A., Mordukhovich, B.S. and Parra, J. (2010) Variational Analysis in Semi-Infinite and Infinite Programming, II: Necessary Optimality Conditions. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 2788-2806. <https://doi.org/10.1137/09076595X>
- [4] Fang, D.H. and Zhao, X.P. (2016) Optimality Conditions for Convex and DC Infniteoptimization Problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **17**, 683-700.
- [5] Dinh, N., Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A. (2010) Subdifferentials of Value Functions and Optimality Conditions for DC and Bilevel Infinite and Semi-Infinite Programs. *Mathematical Programming*, **123**, 101-138. <https://doi.org/10.1007/s10107-009-0323-4>
- [6] Fang, D.H., Liu, W.L. and Wen, C.F. (2016) Generalized Subdifferentials of the Value Function for Parametrized DC Optimization Problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **17**, 639-654.
- [7] Zalinescu, C. (2002) Convex Analysis in General Vector Spaces. World Scientific, New Jersey. <https://doi.org/10.1142/9789812777096>
- [8] Mordukhovich, B.S. (2006) Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1>
- [9] Fang, D.H. and Zhang, Y. (2020) Optimality Conditions and Total Dualities for Conicprogramming Involving Composite Function. *Optimization*, **69**, 305-327. <https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1561695>
- [10] Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A. and Son, T.Q. (2007) New Farkas-Type Constraint Qualifications in Convex Infinite Programming. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations (ESAIM: COCV)*, **13**, 580-597. <https://doi.org/10.1051/cocv:2007027>
- [11] Mordukhovich, B.S., Nam, N.M. and Yen, N.D. (2006) Fréchet Subdifferential Calculus and Optimality Conditions in Nondifferentiable Programming. *Optimization*, **55**, 685-708. <https://doi.org/10.1080/02331930600816395>