

区间值直觉模糊相似度及其应用

伍淼锋, 袁家琪

西华大学理学院, 四川 成都

收稿日期: 2024年4月16日; 录用日期: 2024年5月9日; 发布日期: 2024年5月16日

摘要

相似度是模糊集理论中的一个测度, 常用来度量两个模糊集的接近程度。在区间值直觉模糊环境下的多属性决策问题中, 一个相似度的优劣影响着决策结果的准确性。在以往的研究中, 已经有大量的区间值直觉模糊相似度被提出, 在分析这些相似度过程中, 发现其中大多存在着反直觉的情况。本文从熵测度的角度出发, 基于熵测度和相似度的相关关系, 由熵测度导出一个对应的相似度, 并证明其满足相似度的公理化定义, 接着通过实例说明提出的相似度的有效性和优越性。最后将其与传统VIKOR方法相结合, 应用于多属性决策问题之中。

关键词

区间值直觉模糊集, 相似度, VIKOR方法

Similarity Measure for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Set and Its Applications

Miaofeng Wu, Jiaqi Yuan

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 16th, 2024; accepted: May 9th, 2024; published: May 16th, 2024

Abstract

Similarity measure is a measure in fuzzy set theory, which is often used to measure the closeness between two fuzzy sets. In the decision making problem in the environment of interval-value intuitionistic fuzzy set, the superiority and disadvantage of a similarity have an important impact on the accuracy of the decision result. In previous studies, a large number of interval-values intuitionistic fuzzy similarity measures have been proposed, and in the process of analyzing these similarity measures, it is found that most of them have counterintuitive cases. From the perspective of entropy, based on the correlation between entropy measure and similarity measure, this paper

derives a corresponding similarity measure from a two-parameter entropy, proves that it satisfies the axiomatic definition of similarity measure, and illustrates its validity and superiority through comparative analysis. Finally, it is combined with the traditional VIKOR method and applied to multi-attribute decision-making problems.

Keywords

Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Set, Similarity Measure, VIKOR Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

区间值直觉模糊集的概念由 Atanassov 和 Gargov [1]在 1989 年提出, 他将每个元素对模糊集的隶属度和非隶属度扩展到一个 $[0, 1]$ 之间的区间中, 使其能够包含更多的不确定性信息。接着, Atanassov [2]为区间值直觉模糊集定义了一些基础性质和运算法则。至此, 区间值直觉模糊集受到了广泛的关注, 并吸引了大量的学者对它进行研究。理所当然, 存在于直觉模糊集理论中的距离测度, 相似度等研究也深入到区间值直觉模糊集环境中。

相似度是模糊集理论中的一个重要测度, 负责计算两个模糊集间的相似程度, 在决策问题中可以替代距离测度使用, 因而具有重要的研究意义。下面是一些学者所做的研究, Xu [3] [4]在 2007 年引入了区间值直觉模糊相似度的概念以及一些距离测度。2009 年, Xu 和 Yager [5]研究了和区间值直觉模糊环境下的偏好关系和相似度。当两个模糊集的隶属度和非隶属度之间差异不大但犹豫度差异很大时, 犹豫指数就起着非常重要的作用。Xu 和 Xia [6]提出的新的相似度就考虑了犹豫度的问题, 克服了之前相似度的缺陷。同样的, Wu 等人[7]也提出了考虑犹豫度的区间值直觉模糊相似度并应用于专家系统问题之中。

在之后的研究中, 各研究者提出了更多的区间值直觉模糊相似度。Singh [8]为区间值直觉模糊集开发了一种新的余弦相似度, 并将其应用于模式识别。Luo 和 Liang [9]等人开发了一种新的相似度来解决区间值直觉模糊环境下的多准则决策问题。Jeevaraj [10]提出了一种新的基于非犹豫得分函数的区间值直觉模糊数的相似度, 并将其应用于解决模式重组问题。Verma 和 Merigo [11]提出了一种基于加权约简直觉模糊集的区间值直觉模糊余弦相似度, 并定义了准有序加权区间值直觉模糊余弦相似度。Tiwari 和 Gupta [12]开发了区间值直觉模糊软集的距离、相似度和熵。Rathnasabapathy 和 Palanisami [13]为区间值直觉模糊集设计了余弦相似度, 应用于现实世界的决策问题, 如模式识别、医疗诊断。Suo [14]建立了一个知识测度函数, 将距离与基于理想解的相似度排序偏好技术相结合。Chen 和 Ke [15]提出了余弦相似度, 利用区间值直觉模糊知识解决多准则决策问题。Nayagam [16]等人提出了一种基于传统梯形值直觉模糊集准确得分计算的相似度。

从以往的区间值直觉模糊相似度的相关文献和研究来看, 已经提出的相似度大多存在着反直觉的情况, 无法区分某些模糊集的相似程度。因此, 本文从熵测度的角度出发, 基于熵测度和相似度之间的相关关系, 利用一个双参数熵提出了一个新的区间值直觉模糊相似度, 证明其满足区间值直觉模糊相似度的公理化定义。之后, 通过一个简单实例, 说明其优越性和有效性。最后将其与 VIKOR 方法相结合, 提出了一个解决多属性决策问题的新方法, 应用于多属性决策问题中。

2. 预备知识

定义 1 [1] 设 X 是一个非空有限集合, 那么

$$A = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{AL}(x), \mu_{AR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x), \nu_{AR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\}$$

是定义在 X 上的一个区间值直觉模糊集(Interval-valued intuitionistic fuzzy set, IvIFS), 其中 $\mu_A(x) = [\mu_{AL}(x), \mu_{AR}(x)]$, $\nu_A(x) = [\nu_{AL}(x), \nu_{AR}(x)] \subseteq [0, 1]$ 分别表示 $x \in X$ 对于集合 A 的隶属度和非隶属度, 满足对任意 $x \in X$, $0 \leq \mu_{AR}(x) + \nu_{AR}(x) \leq 1$ 。

特别的, 当 $\mu_{AL}(x) = \mu_{AR}(x)$, $\nu_{AL}(x) = \nu_{AR}(x)$ 时, 区间值直觉模糊集 A 退化为直觉模糊集。

此外, $\pi_A(x) = [1 - \mu_{AR}(x) - \nu_{AR}(x), 1 - \mu_{AL}(x) - \nu_{AL}(x)]$ 表示元素 $x \in X$ 对于集合 A 的犹豫度。

为了方便后续研究, 称 $\alpha = ([\mu_L, \mu_R], [\nu_L, \nu_R])$ 为区间值直觉模糊数(IvIFN), 其中 $[\mu_L, \mu_R] \subseteq [0, 1]$, $[\nu_L, \nu_R] \subseteq [0, 1]$, $0 \leq \mu_R + \nu_R \leq 1$ 。

定义 2 [2] 设 $A = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{AL}(x), \mu_{AR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x), \nu_{AR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\}$ 和

$B = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{BL}(x), \mu_{BR}(x) \right], \left[\nu_{BL}(x), \nu_{BR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\}$ 是两个 IvIFSs, 那么

$$1) A^c = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{AL}(x), \mu_{AR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x), \nu_{AR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\};$$

$$2) A \subseteq B = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{AL}(x) \leq \mu_{BL}(x), \mu_{AR}(x) \leq \mu_{BR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x) \geq \nu_{BL}(x), \nu_{AR}(x) \geq \nu_{BR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\};$$

$$3) A \cap B = \left\{ x, \left\langle \left[\min \{ \mu_{AL}(x), \mu_{BL}(x) \}, \min \{ \mu_{AR}(x), \mu_{BR}(x) \} \right], \left[\max \{ \nu_{AL}(x), \nu_{BL}(x) \}, \max \{ \nu_{AR}(x), \nu_{BR}(x) \} \right] \right\rangle \mid x \in X \right\};$$

$$4) A \cup B = \left\{ x, \left\langle \left[\max \{ \mu_{AL}(x), \mu_{BL}(x) \}, \max \{ \mu_{AR}(x), \mu_{BR}(x) \} \right], \left[\min \{ \nu_{AL}(x), \nu_{BL}(x) \}, \min \{ \nu_{AR}(x), \nu_{BR}(x) \} \right] \right\rangle \mid x \in X \right\};$$

$$5) A + B = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{AL}(x) + \mu_{BL}(x) - \mu_{AL}(x) \cdot \mu_{BL}(x), \mu_{AR}(x) + \mu_{BR}(x) - \mu_{AR}(x) \cdot \mu_{BR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x) \cdot \nu_{BL}(x), \nu_{AR}(x) \cdot \nu_{BR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\};$$

$$6) A \cdot B = \left\{ x, \left\langle \left[\mu_{AL}(x) \cdot \mu_{BL}(x), \mu_{AR}(x) \cdot \mu_{BR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x) + \nu_{BL}(x) - \nu_{AL}(x) \cdot \nu_{BL}(x), \nu_{AR}(x) + \nu_{BR}(x) - \nu_{AR}(x) \cdot \nu_{BR}(x) \right] \right\rangle \mid x \in X \right\};$$

定义 3 [17] 一个实值函数 $S: IvIFS \times IvIFS \rightarrow [0, 1]$ 叫做区间值直觉模糊集的相似度, 如果满足以下条件:

$$S1) 0 \leq S(A, B) \leq 1;$$

$$S2) S(A, B) = 1 \text{ 当且仅当 } A = B;$$

$$S3) S(A, B) = S(B, A);$$

$$S4) \text{ 如果 } A \subseteq B \subseteq C, \text{ 那么 } S(A, C) \leq S(A, B) \text{ 且 } S(A, C) \leq S(B, C)。$$

定义 4 [17] 一个实值函数 $\xi: IvIFS(Z) \rightarrow [0, 1]$ 叫做区间值直觉模糊集的熵, 如果满足以下条件:

$$E1) \xi(A) = 0 \text{ 当且仅当 } A \text{ 是一个清晰集};$$

- E2) 对任意 $x_i \in X$, $\xi(A)=1$ 当且仅当 $[\mu_{AL}(x_i), \mu_{AR}(x_i)] = [\nu_{AL}(x_i), \nu_{AR}(x_i)]$;
- E3) $\xi(A) = \xi(A^c)$;
- E4) 对任意 $x_i \in X$, 若当 $A \subseteq B$ 时, $\mu_{BL}(x_i) \leq \nu_{BL}(x_i)$ 且 $\mu_{BR}(x_i) \leq \nu_{BR}(x_i)$ 或当 $B \subseteq A$ 时, $\mu_{BL}(x_i) \geq \nu_{BL}(x_i)$ 且 $\mu_{BR}(x_i) \geq \nu_{BR}(x_i)$, 都有 $\xi(A) \leq \xi(B)$, 则称 $\xi(A)$ 为 IvIFS A 的熵。

3. 新的区间值直觉模糊相似度

文献[18]中提出了一个区间值直觉模糊熵

$$\xi^{(\alpha, \beta)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \left[\theta (\mu_{AL}(x_i) - \nu_{AL}(x_i)) (\mu_{AL}^\alpha(x_i) - \nu_{AL}^\alpha(x_i)) + (1 - \theta) (\mu_{AR}(x_i) - \nu_{AR}(x_i)) (\mu_{AR}^\beta(x_i) - \nu_{AR}^\beta(x_i)) \right] \quad (1)$$

$\alpha > 0, \beta > 0, \theta \in (0, 1)$

其中 A 是一个 IvIFS, 且 $\xi^{(\alpha, \beta)}$ 满足定义 4。

Wei 等人[17]定义了一些区间值直觉模糊熵和相似度之间的相关关系, 通过这些相关关系使得熵和相似度可以相互导出, 借助该方法, 本节通过(1)式构造出一个新的相似度。

3.1. 新的相似度及其证明

首先做如下定义:

定义 5 设 A 和 B 是 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中的两个 IvIFSs,

$$A = \left\{ x, \left[\mu_{AL}(x), \mu_{AR}(x) \right], \left[\nu_{AL}(x), \nu_{AR}(x) \right] \mid x \in X \right\}; \quad B = \left\{ x, \left[\mu_{BL}(x), \mu_{BR}(x) \right], \left[\nu_{BL}(x), \nu_{BR}(x) \right] \mid x \in X \right\},$$

由 A 和 B 定义的一个新的区间值模糊集 $\psi(A, B)$, 如下:

$$\begin{aligned} \psi_{AB1}(x_i) &= \frac{1 - \max \left\{ \left| \mu_{AL}(x_i) - \mu_{BL}(x_i) \right|, \left| \nu_{AL}(x_i) - \nu_{BL}(x_i) \right| \right\}}{2}, \\ \psi_{AB2}(x_i) &= \frac{1 - \max \left\{ \left| \mu_{AR}(x_i) - \mu_{BR}(x_i) \right|, \left| \nu_{AR}(x_i) - \nu_{BR}(x_i) \right| \right\}}{2}, \\ \psi_{AB3}(x_i) &= \frac{1 + \min \left\{ \left| \mu_{AL}(x_i) - \mu_{BL}(x_i) \right|, \left| \nu_{AL}(x_i) - \nu_{BL}(x_i) \right| \right\}}{2}, \\ \psi_{AB4}(x_i) &= \frac{1 + \min \left\{ \left| \mu_{AR}(x_i) - \mu_{BR}(x_i) \right|, \left| \nu_{AR}(x_i) - \nu_{BR}(x_i) \right| \right\}}{2}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \mu_{\psi(A, B)L}(x_i) &= \min \left\{ \psi_{AB1}(x_i), \psi_{AB2}(x_i) \right\}, \quad \mu_{\psi(A, B)R}(x_i) = \max \left\{ \psi_{AB1}(x_i), \psi_{AB2}(x_i) \right\}, \\ \nu_{\psi(A, B)L}(x_i) &= \min \left\{ \psi_{AB3}(x_i), \psi_{AB4}(x_i) \right\}, \quad \nu_{\psi(A, B)R}(x_i) = \max \left\{ \psi_{AB3}(x_i), \psi_{AB4}(x_i) \right\}. \\ \psi(A, B) &= \left\{ x_i, \left[\mu_{\psi(A, B)L}(x_i), \mu_{\psi(A, B)R}(x_i) \right], \left[\nu_{\psi(A, B)L}(x_i), \nu_{\psi(A, B)R}(x_i) \right] \mid x_i \in X \right\}. \end{aligned}$$

定理 1 $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B))$ 是区间值直觉模糊集 A 和 B 一个相似度, 其中 $\xi^{(\alpha, \beta)}$ 是(1)式中的熵。

证明: 为了证明该定理, 需验证定义(3)中的四个条件。

S1) 因为对任意 $A \in X$, $0 \leq \xi^{(\alpha, \beta)}(A) \leq 1$ 。又 $\psi(A, B) \in X$, 所以 $0 \leq \xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B)) \leq 1$ 。

S2) 根据熵 $\xi^{(\alpha, \beta)}$ 和 $\psi(A, B)$ 的定义可得, 对任意 $x_i \in X$, $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B)) = 1 \Leftrightarrow$,

$$\mu_{\psi(A,B)L}(x_i) = \nu_{\psi(A,B)L}(x_i), \quad \mu_{\psi(A,B)R}(x_i) = \nu_{\psi(A,B)R}(x_i) \Leftrightarrow, \quad |\mu_{AL}(x_i) - \mu_{BL}(x_i)| = 0, \quad |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{BL}(x_i)| = 0, \\ |\mu_{AR}(x_i) - \mu_{BR}(x_i)| = 0, \quad |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{BR}(x_i)| = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

S3) 由定义(5)可得, 显然 $\psi(A, B) = \psi(B, A)$, 于是

$$\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B)) = \xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(B, A)).$$

S4) 设 A, B, C 是三个区间值直觉模糊集且 $A \subseteq B \subseteq C$, 那么

$$\mu_{AL}(x_i) \leq \mu_{BL}(x_i) \leq \mu_{CL}(x_i), \mu_{AR}(x_i) \leq \mu_{BR}(x_i) \leq \mu_{CR}(x_i), \\ \nu_{AL}(x_i) \geq \nu_{BL}(x_i) \geq \nu_{CL}(x_i), \nu_{AR}(x_i) \geq \nu_{BR}(x_i) \geq \nu_{CR}(x_i).$$

可得

$$|\mu_{AL}(x_i) - \mu_{CL}(x_i)| \geq |\mu_{AL}(x_i) - \mu_{BL}(x_i)|, \\ |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{CL}(x_i)| \geq |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{BL}(x_i)|, \\ |\mu_{AR}(x_i) - \mu_{CR}(x_i)| \geq |\mu_{AR}(x_i) - \mu_{BR}(x_i)|, \\ |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{CR}(x_i)| \geq |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{BR}(x_i)|.$$

于是有

$$\max\{|\mu_{AL}(x_i) - \mu_{CL}(x_i)|, |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{CL}(x_i)|\} \geq \max\{|\mu_{AL}(x_i) - \mu_{BL}(x_i)|, |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{BL}(x_i)|\}, \quad (2)$$

$$\max\{|\mu_{AR}(x_i) - \mu_{CR}(x_i)|, |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{CR}(x_i)|\} \geq \max\{|\mu_{AR}(x_i) - \mu_{BR}(x_i)|, |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{BR}(x_i)|\}, \quad (3)$$

$$\min\{|\mu_{AL}(x_i) - \mu_{CL}(x_i)|, |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{CL}(x_i)|\} \geq \min\{|\mu_{AL}(x_i) - \mu_{BL}(x_i)|, |\nu_{AL}(x_i) - \nu_{BL}(x_i)|\}, \quad (4)$$

$$\min\{|\mu_{AR}(x_i) - \mu_{CR}(x_i)|, |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{CR}(x_i)|\} \geq \min\{|\mu_{AR}(x_i) - \mu_{BR}(x_i)|, |\nu_{AR}(x_i) - \nu_{BR}(x_i)|\}. \quad (5)$$

然后可得

$$\psi_{AC1}(x_i) \leq \psi_{AB1}(x_i), \quad \psi_{AC2}(x_i) \leq \psi_{AB2}(x_i), \quad \psi_{AC3}(x_i) \geq \psi_{AB3}(z_i), \quad \psi_{AC4}(x_i) \geq \psi_{AB4}(x_i),$$

因此 $\psi(A, C) \subseteq \psi(A, B)$ 。此外, 由(2)~(5)式还可得出 $\mu_{\psi(A,B)L}(x_i) \leq \nu_{\psi(A,B)L}(x_i)$,

$\mu_{\psi(A,B)R}(x_i) \leq \nu_{\psi(A,B)R}(x_i)$ 。再根据定义 4 的条件(E4), 就有 $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, C)) \leq \xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B))$ 。同理可得, $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, C)) \leq \xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(B, C))$ 。

综上所述, $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B))$ 是一个有效的区间值直觉模糊熵。

例 1 计算集合 X 中两个区间值直觉模糊集 $A = \{x, \langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6] \rangle | x \in X\}$ 和 $B = \{x, \langle [0.1, 0.3], [0.4, 0.5] \rangle | x \in X\}$ 的相似度。其中参数 $\theta = \frac{1}{2}$, 结果见表 1 $\psi_{AB1}(z) = 0.45$, $\psi_{AB2}(z) = 0.45$, $\psi_{AB3}(z) = 0.55$, $\psi_{AB4}(z) = 0.5$ 。于是 $\psi(A, B) = \{x, \langle [0.45, 0.45], [0.5, 0.55] \rangle | x \in X\}$ 。

Table 1. Values of the proposed similarity measure

表 1. 新的相似度的计算结果

$\alpha = \beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi(A, B))$	0.9988	0.9978	0.9969	0.9962	0.9956	0.9950	0.9946	0.9942

3.2. 与现存相似度的比较分析

3.2.1. 一些现存相似度

1) Xu 和 Chen [19]的相似度:

$$S_{XC}(A, B) = \sqrt[p]{\frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_{AL}(x) - \mu_{BL}(x)|^p + |\mu_{AR}(x) - \mu_{BR}(x)|^p + |\nu_{AL}(x) - \nu_{BL}(x)|^p + |\nu_{AR}(x) - \nu_{BR}(x)|^p \right)}. \quad (6)$$

2) Wei 等人[17]的相似度:

$$S_W(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 - \min(\mu_{iL}, \nu_{iL}) - \min(\mu_{iR}, \nu_{iR})}{2 - \max(\mu_{iL}, \nu_{iL}) - \max(\mu_{iR}, \nu_{iR})}. \quad (7)$$

其中, $\mu_{iL} = |\mu_{AL}(x) - \mu_{BL}(x)|$, $\mu_{iR} = |\mu_{AR}(x) - \mu_{BR}(x)|$, $\nu_{iL} = |\nu_{AL}(x) - \nu_{BL}(x)|$, $\nu_{iR} = |\nu_{AR}(x) - \nu_{BR}(x)|$.

3) Luo 和 Liang [9]的相似度:

$$S_{LL}(A, B) = 1 - \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{t_1 \left[(\mu_{AL}(x) - \mu_{BL}(x)) + (\mu_{AR}(x) - \mu_{BR}(x)) \right]^p - \left[(\nu_{AL}(x) - \nu_{BL}(x)) + (\nu_{AR}(x) - \nu_{BR}(x)) \right]^p}{2(t_1 + 1)} + \frac{t_2 \left[(\nu_{AL}(x) - \nu_{BL}(x)) + (\nu_{AR}(x) - \nu_{BR}(x)) \right]^p + \left[(\mu_{AL}(x) - \mu_{BL}(x)) + (\mu_{AR}(x) - \mu_{BR}(x)) \right]^p}{2(t_2 + 1)} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

3.2.2. 比较分析

例 2 考虑三个区间值直觉模糊集 $A = \langle [0.3, 0.4], [0.5, 0.7] \rangle$, $B = \langle [0.4, 0.5], [0.5, 0.7] \rangle$, $C = \langle [0.4, 0.5], [0.4, 0.6] \rangle$ 。 $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$, S_{XC} 计算 A, B 和 A, C 的相似度结果展示在表 2; $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$, S_W 计算 A, B 和 A, C 的相似度结果展示在表 3; $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$, S_{LL} 计算 A, B 和 A, C 的相似度结果展示在表 4。

Table 2. Values of $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$ and S_{XC}

表 2. $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$ 和 S_{XC} 的计算结果

	A, B	A, C
S_{XC}	0.9	0.9
$\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$	0.99	0.96

Table 3. Values of $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$ and S_W

表 3. $\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$ 和 S_W 的计算结果

	A, B	A, C
S_W	0.21	0.21
$\xi^{(\alpha, \beta)}(\psi)$	0.99	0.96

Table 4. Values of $\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi)$ and S_{LL} **表 4.** $\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi)$ 和 S_{LL} 的计算结果

	A, B	A, C
S_{LL}	0.93	0.93
$\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi)$	0.99	0.96

从表 2 至表 4 可得, S_{XC} , S_W , S_{LL} 无法区分区间值直觉模糊集之间的相似度, 而我们提出的相似度能够有效区分。

4. 基于新的相似度的 VIKOR 方法

4.1. 方法步骤

第一步: 建立决策矩阵 $R_{z_{ij}}^*$ 。假设 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 是需要解决决策问题的备选方案的集合, $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是备选方案的属性的集合, 那么该问题的决策矩阵为

$$R^* = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11} & \tilde{z}_{12} & \cdots & \tilde{z}_{1n} \\ \tilde{z}_{21} & \tilde{z}_{22} & \cdots & \tilde{z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{z}_{m1} & \tilde{z}_{m2} & \cdots & \tilde{z}_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

其中 $\tilde{z}_{ij} = \langle [\mu_{ijL}, \mu_{ijR}], [v_{ijL}, v_{ijR}] \rangle$ 是第 i 个方案的第 j 个属性的评价值 $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$ 。

第二步: 计算标准决策矩阵 $R_{z_{ij}}$ 。

$$z_{ij} = \begin{cases} \langle [\mu_{ijL}, \mu_{ijR}], [v_{ijL}, v_{ijR}] \rangle; & \text{对于效益属性} \\ \langle [v_{ijL}, v_{ijR}], [\mu_{ijL}, \mu_{ijR}] \rangle; & \text{对于成本属性} \end{cases}$$

第三步: 计算正理想解 $PIS = (z_j^+)_{1 \times m}$ 和负理想解 $NIS = (z_j^-)_{1 \times m}$ 。

$z_j^+ = \langle [\mu_{jL}^+, \mu_{jR}^+], [v_{jL}^-, v_{jR}^-] \rangle$, $z_j^- = \langle [\mu_{jL}^-, \mu_{jR}^-], [v_{jL}^+, v_{jR}^+] \rangle$ 。其中 $\mu_{jL}^+ = \max \mu_{ijL}$, $\mu_{jR}^+ = \max \mu_{ijR}$, $\mu_{jL}^- = \min \mu_{ijL}$, $\mu_{jR}^- = \min \mu_{ijR}$, $v_{jL}^+ = \max v_{ijL}$, $v_{jR}^+ = \max v_{ijR}$, $v_{jL}^- = \min v_{ijL}$, $v_{jR}^- = \min v_{ijR}$, $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$ 。

第四步: 基于(1)式的熵确定客观属性权重。

首先计算决策矩阵每一个属性的熵值。

$$\xi_j^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1 - \left[\frac{(mu_{ijL} - mv_{ijL})(mu_{ijL}^\alpha - mv_{ijL}^\alpha)}{2} + \frac{(mu_{ijR} - mv_{ijR})(mu_{ijR}^\beta - mv_{ijR}^\beta)}{2} \right], \quad j=1, 2, \dots, n。$$

然后计算每个属性的散度。

$$W_j = 1 - \xi_j^{(\alpha,\beta)}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

最后进行归一化的到属性权重。

$$\omega_j = \frac{W_j}{\sum_{j=1}^n W_j}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

第五步: 基于新提出的相似度 $\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi)$ 计算效用指标 S_i 和遗憾指标 R_i :

$$S_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \frac{\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi(z_j^+, z_{ij}^+))}{\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi(z_j^+, z_j^-))}, R_i = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \omega_j \frac{\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi(z_j^+, z_{ij}^+))}{\xi^{(\alpha,\beta)}(\psi(z_j^+, z_j^-))} \right\}, i = 1, 2, \dots, m。$$

第六步: 计算 VIKOR 指数 Q_i :

$$Q_i = \varepsilon \frac{S_i - S^-}{S^+ - S^-} + (1 - \varepsilon) \frac{R_i - R^-}{R^+ - R^-}, i = 1, 2, \dots, m。$$

其中 $S^+ = \max S_i$, $S^- = \min S_i$, $R^+ = \max R_i$, $R^- = \min R_i$ 。 ε 为“大多数准则”策略的权重或最大群体效用权重。 $\varepsilon > 0.5$ 时, 表示根据大多数人的意见制定决策; $\varepsilon = 0.5$ 时, 表示根据赞同的情况制定决策; $\varepsilon < 0.5$ 时, 表示根据拒绝的情况制定决策。

第七步: 对方案排序。根据 S_i , R_i , Q_i 的值对方案排序, 值越小越好, 共得到三种排序结果。

第八步: 找出折衷方案。当下面两个条件满足时, 可以根据 Q_i 的值对方案排序。假设 $A_{(1)}$ 是按照 Q_i 的值排序第一的方案, 它的值为 Q_1 。

条件 1: 可接受优势。

$$Q_2 - Q_1 \geq \frac{1}{m-1}。$$

其中 Q_2 为排序第二的方案 $A_{(2)}$ 的值, m 为备选方案个数。

条件 2: 决策过程中可接受的稳定性。根据 Q_i 值的第一排序方案 A_1 必须是 S_i 和 R_i 的值的的第一排序方案。

如果以上条件有一个不满足, 将得到一个折衷解集。折衷解包含两个部分:

(a) 如果不满足条件 2, 则 $A_{(1)}$, $A_{(2)}$ 均为折衷解。

(b) 如果不满足条件 1, 通过

$$Q_k - Q_1 < \frac{1}{m-1}$$

得到最大的 k , $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(k)}$ 均为折衷解。

4.2. 实例分析

考虑一个 Hu [20] 提出的数值例子。一家制造电子产品的高科技公司计划评估和选择一个 USB 连接器供应商。有四家供应商 A_1, A_2, A_3 和 A_4 被选中。我们用四个属性来对它们进行评估: C_1 是财务, C_2 是绩效, C_3 是技术, C_4 是组织文化。决策者使用区间值直觉模糊数对四个方案 $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的四种属性 $C_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 进行评价。

第一步: 建立决策矩阵 $R_{z_{ij}}^*$ 如表 5 所示。

Table 5. The decision matrix $R_{z_{ij}}^*$

表 5. 决策矩阵 $R_{z_{ij}}^*$

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle [0.6, 0.7], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.3, 0.5] \rangle$	$\langle [0.5, 0.7], [0.1, 0.3] \rangle$
A_2	$\langle [0.2, 0.3], [0.4, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.3, 0.5] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.3] \rangle$
A_3	$\langle [0.3, 0.4], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.4, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.3] \rangle$
A_4	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.6, 0.7], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.4, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$

第二步: 计算标准决策矩阵 $R_{z_{ij}}$ 。因为所有属性都是效益属性, 所以 $R_{z_{ij}} = R_{z_{ij}}^*$ 。

第三步: 计算正理想解 $PIS = (z_j^+)_{1 \times m}$ 和负理想解 $NIS = (z_j^-)_{1 \times m}$, 结果见表 6。

Table 6. The positive and negative idea solutions

表 6. 正负理想解

	A_1	A_2	A_3	A_4
PIS	$\langle [0.6, 0.7], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.6, 0.7], [0.1, 0.2] \rangle$	$\langle [0.5, 0.6], [0.3, 0.4] \rangle$	$\langle [0.5, 0.7], [0.1, 0.3] \rangle$
NIS	$\langle [0.2, 0.3], [0.5, 0.6] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.2, 0.3] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.3, 0.5] \rangle$	$\langle [0.4, 0.5], [0.3, 0.4] \rangle$

第四步: 确定客观属性权重。结果见表 7。

Table 7. Values of ξ , W and ω

表 7. ξ , W and ω 的值

	C_1	C_2	C_3	C_4
ξ	0.9189	0.9255	0.9834	0.9481
W	0.0811	0.0745	0.0166	0.0519
ω	0.4	0.3	0.1	0.2

第五步: 效用指标 S_i 和遗憾指标 R_i 的计算结果展示在表 8。

Table 8. Values of S_i and R_i

表 8. S_i 和 R_i 的计算结果

$\alpha = \beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
S_1	1.0146	1.0277	1.0394	1.0496	1.0584	1.0659	1.0722	1.0774	1.0815
S_2	1.0025	1.0048	1.0069	1.0084	1.0087	1.0102	1.0128	1.0138	1.0146
S_3	1.0032	1.0062	1.0089	1.0114	1.0136	1.0155	1.0172	1.0186	1.0199
S_4	1.0127	1.0241	1.0342	1.0430	1.0507	1.0572	1.0628	1.0672	1.0707
R_1	0.4129	0.4247	0.4351	0.443	0.4523	0.4591	0.4648	0.4696	0.4733
R_2	0.4013	0.4026	0.4037	0.4047	0.4057	0.4065	0.4073	0.4079	0.4085
R_3	0.4026	0.4051	0.4074	0.4095	0.4113	0.4130	0.4145	0.4158	0.4169
R_4	0.4111	0.4212	0.4301	0.4380	0.4449	0.4507	0.4556	0.4597	0.4629

第六步: VIKOR 指数 Q_i 计算结果展示在表 9。

Table 9. Values of Q_i

表 9. Q_i 的计算结果

$\alpha = \beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Q_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Q_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Q_3	0.0861	0.0884	0.0907	0.0930	0.0953	0.0976	0.0998	0.1021	0.1044
Q_4	0.8416	0.8411	0.8408	0.8405	0.8403	0.8401	0.8400	0.83970	0.8396

第七步: 根据表 8 和表 9 可以清楚得到通过 S_i 、 R_i 、 Q_i 对方案的排序结果都为 $A_2 > A_3 > A_4 > A_1$ 。

第八步: 找出折衷方案。

首先计算 $\tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_2 < \frac{1}{3}$, 不满足条件 1, 满足条件 2, 于是计算 $\tilde{Q}_4 - \tilde{Q}_2 > \frac{1}{3}$ 得到折衷解 A_2 和 A_3 。

将我们使用的方法和以下几个方法进行比较:

- 1) Zhang [21]提出的基于余弦交叉熵的拓展的 TOPSIS 方法。
- 2) Narayanamoorthy [22]提出的区间直觉犹豫模糊 VIKOR 方法。
- 3) Hu [20]提出的基于 IVIFGWHM 算子的决策方法。

结果展示在表 10。

Table 10. Comparison result

表 10. 比较结果

方法	结果
Zhang	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
Narayanamoorthy	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
Hu	$A_1 > A_4 > A_3 > A_2$

从表 10 中可以看出 Zhang 和 Narayanamoorthy 的方法和我们提出的方法得到的结果相同, 与 Hu 的结果相反。方法中的不同之处在于 Zhang 和 Narayanamoorthy 选择的正负理想解为 $\langle [1,1], [0,0] \rangle$ 和 $\langle [0,0], [1,1] \rangle$, 不会随评价值的改变而改变。Zhang 使用一个线性规划模型计算属性权重, Narayanamoorthy 和我们基于熵确定属性权重但 Hu 得属性权重是由专家直接给出。在计算正负理想解和备选方案之间的差异程度时, Narayanamoorthy 使用的是归一化 Hamming 距离测度, 而我们使用的是新提出的相似度, 更加有效。总的来说, 我们提出的新方法是有效的且具有一定的优越性。

5. 结论

本文考虑了区间值直觉模糊环境下的相似度, 针对现存的相似度存在反直觉, 无法准确计算模糊集合相似程度的问题, 基于区间值直觉模糊熵导出了一个新的区间值直觉模糊相似度, 去克服现存相似度的缺陷, 并证明了新的相似度满足相应的公理化定义。其次, 运用一个实例将新的相似度与几个现存相似度进行比较分析, 凸显其优越性。最后, 将新的相似度与 VIKOR 方法相结合, 提出了解决多属性决策问题的新方法, 并将其应用于一个现实例子中, 说明其有效性。未来的研究可以考虑将新的相似度应用于其它决策方法, 并在其中考虑加入犹豫度的问题。

参考文献

- [1] Atanassov, K.T. and Atanassov, K.T. (1999) Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. In: Atanassov, K.T., Ed., *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*, Springer, Berlin, 139-177. https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1870-3_2
- [2] Atanassov, K.T. (1994) Operators over Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **64**, 159-174. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)90331-X](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90331-X)
- [3] Xu, Z.S. (2007) On Similarity Measures of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Application to Pattern Recognitions. *Journal of Southeast University (English Edition)*, **23**, 139-143.
- [4] Xu, Z. (2007) Some Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Applications to Multiple Attribute Decision Making. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **6**, 109-121. <https://doi.org/10.1007/s10700-007-9004-z>
- [5] Xu, Z. and Yager, R.R. (2009) Intuitionistic and Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Preference Relations and Their Measures of Similarity for the Evaluation of Agreement within a Group. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **8**, 123-139. <https://doi.org/10.1007/s10700-009-9056-3>

- [6] Xia, M. and Xu, Z. (2010) Some New Similarity Measures for Intuitionistic Fuzzy Values and Their Application in Group Decision Making. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, **19**, 430-452. <https://doi.org/10.1007/s11518-010-5151-9>
- [7] Wu, C., Luo, P., Li, Y., et al. (2014) A New Similarity Measure of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets Considering Its Hesitancy Degree and Applications in Expert Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, **2014**, Article ID: 359214. <https://doi.org/10.1155/2014/359214>
- [8] Singh, P. (2012) A New Method on Measure of Similarity between Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets for Pattern Recognition. *Journal of Applied and Computational Mathematics*, **1**, 1-5.
- [9] Luo, M. and Liang, J. (2018) A Novel Similarity Measure for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Applications. *Symmetry*, **10**, Article No. 441. <https://doi.org/10.3390/sym10100441>
- [10] Jeevaraj, S. (2020) Similarity Measure on Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Numbers Based on Non-Hesitance Score and Its Application to Pattern Recognition. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 212. <https://doi.org/10.1007/s40314-020-01250-3>
- [11] Verma, R. and Merigó, J.M. (2020) A New Decision Making Method Using Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Cosine Similarity Measure Based on the Weighted Reduced Intuitionistic Fuzzy Sets. *Informatica*, **31**, 399-433. <https://doi.org/10.15388/20-INFOR405>
- [12] Tiwari, P. and Gupta, P. (2022) Novel Distance, Similarity and Entropy Measures for Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Soft Set. *Journal of Intelligent of Fuzzy Systems*, **43**, 3067-3086. <https://doi.org/10.3233/JIFS-212647>
- [13] Rathnasabapathy, P. and Palanisami, D. (2023) A Theoretical Development of Improved Cosine Similarity Measure for Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Applications. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, **14**, 16575-16587. <https://doi.org/10.1007/s12652-022-04019-0>
- [14] Suo, C., Li, X. and Li, Y. (2023) Distance-Based Knowledge Measure and Entropy for Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. *Mathematics*, **11**, Article No. 3468. <https://doi.org/10.3390/math11163468>
- [15] Chen, S.M. and Ke, M.R. (2023) Multiattribute Decision Making Method Based on Nonlinear Programming Model, Cosine Similarity Measure, and Novel Score Function of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Values. *Information Sciences*, **645**, Article ID: 119370. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2023.119370>
- [16] Nayagam, V.L.G., Suriyapriya, K. and Jagadeeswari, M. (2023) A Novel Similarity Measure Based on Accuracy Score of Conventional Type of Trapezoidal-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Applications in Multi-Criteria Decision-Making Problems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **16**, Article No. 106. <https://doi.org/10.1007/s44196-023-00274-x>
- [17] Wei, C.P., Wang, P. and Zhang, Y.Z. (2011) Entropy, Similarity Measure of Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets and Their Applications. *Information Sciences*, **181**, 4273-4286. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.06.001>
- [18] 伍淼锋, 陈子春, 袁家琪. 一个新的区间值直觉模糊熵[J]. *运筹与模糊学*, 2024, 14(1): 748-759.
- [19] Xu, Z.S. and Chen, J. (2008) An Overview of Distance and Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **16**, 529-555. <https://doi.org/10.1142/S0218488508005406>
- [20] Hu, X., Yang, S. and Zhu, Y.R. (2022) Multiple-Attribute Decision Making Based on Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Generalized Weighted Heronian Mean. *Information*, **13**, Article No. 138. <https://doi.org/10.3390/info13030138>
- [21] Zhang, H. and Yu, L. (2012) MADM Method Based on Cross-Entropy and Extended TOPSIS with Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets. *Knowledge-Based Systems*, **30**, 115-120. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.01.003>
- [22] Narayanamoorthy, S., Geetha, S., Rakkuyappan, R., et al. (2019) Interval-Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Entropy Based VIKOR Method for Industrial Robots Selection. *Expert Systems with Applications*, **121**, 28-37. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2018.12.015>