Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 1994-1999
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135187

Hans汉斯

$K_{1,3}$-Free图上的弦泛圈性

李 欢[1]**，田增娴**[2]**，杨卫华**[1*]

[1]太原理工大学数学学院，山西 太原
[2]成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都

收稿日期：2024年4月21日；录用日期：2024年5月14日；发布日期：2024年5月23日

摘 要

一个非诱导圈被称为弦圈，即在图中至少有一条额外的边连接圈内两个非相邻的顶点。一个阶数为n的图G，如果G包含长度为从4到n的弦圈，则称为弦泛圈图。1991年，R.J. Faudree, R.J. Gould和T.E. Lindquester得出结论：令G是阶数为$n(n\geq 14)$的2-连通，$K_{1,3}$-free图。如果对于每一对不相邻的顶点x,y，有$\left|N(x)\cup N(y)\right|\geq \frac{2n-2}{3}$，则$G$是泛圈图。在本文中，我们扩展了这个结果，把泛圈性推广到弦泛圈性：对于任意2-连通，阶数为$n(n\geq 34)$的$K_{1,3}$-free图G，如果每对不相邻顶点$x,y\in V(G)$，满足$\left|N(x)\cup N(y)\right|\geq \frac{2n-2}{3}$，则图$G$是弦泛圈图。

关键词

$K_{1,3}$-Free，弦圈，泛圈，弦泛圈，哈密尔顿

Chorded Pancyclicity on $K_{1,3}$-Free Graph

Huan Li[1]**, Zengxian Tian**[2]**, Weihua Yang**[1*]

[1]School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
[2]College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 21st, 2024; accepted: May 14th, 2024; published: May 23rd, 2024

Abstract

A non-induced cycle is called a chorded cycle, that is, a cycle that has at least one additional edge

*通讯作者。

文章引用: 李欢, 田增娴, 杨卫华. $K_{1,3}$-Free 图上的弦泛圈性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 1994-1999.
DOI: 10.12677/aam.2024.135187

connecting two non-consecutive vertices within the cycle. A graph G of order n is chorded pancyclic if G contains a chorded cycle of each length from 4 to n. In 1991, R.J. Faudree, R.J. Gould, and T.E. Lindquester concluded: Let G be a 2-connected $K_{1,3}$-free graph with the order $n(n \ge 14)$. If $|N(x) \cup N(y)| \ge \frac{2n-2}{3}$ for each pair of nonadjacent vertices x, y, then G is pancyclic. In this paper, we extended this result by generalizing the concept of pancyclicto chorded pancyclic: ever 2-connected, $K_{1,3}$-free graph G with order $n \ge 43$ is chorded pancyclic if the number of the union of for each pair of nonadjacent vertices at least $\frac{2n-2}{3}$.

Keywords

$K_{1,3}$-Free, Chorded Cycle, Pancyclic, Chorded Pancyclic, Hamiltonian

1. 引言

本文讨论的所有图都是有限的，无向且没有环和多重边的图。设 G 是一个图，$V(G)$ 表示图 G 的顶点集，$E(G)$ 表示图 G 的边集。对于 G 的子图 H 和点 $x \in V(G)$，令 $N_H(x) = \{v \in V(H) \mid xv \in E(G)\}$，即 $N_H(x) = V(H) \cap N_G(x)$。$G$ 的顶点 v 的度(或次) $d_G(v)$ 是指 G 中与 v 关联的边的数目。令 $d_H(x) = |N_H(x)|$。如果没有歧义，$N(x)$ 表示 $N_G(x)$，$d(x)$ 表示 $d_G(x)$。对于图 G 的顶点集 S，$G[S]$ 表示由 S 导出的子图。路(或圈)的长度是路(或圈)中边的数目。对于一个图 G，用 $\delta(G)$ 表示 G 的最小度，$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$。$C_m$ 表示长度为 m 的圈，m 为正整数。其他未加说明的定义可见参考文献[1]。

经过 G 中每个顶点恰好一次的圈(路)被称为**哈密尔顿圈**(路) (Hamiltonian Cycle (Path))。如果图 G 包含哈密尔顿圈，则称图 G 为**哈密尔顿的**。一个阶数为 n 的图被称为**泛圈的**(Pancyclic)，如果它包含从 3 到 n 的所有长度的圈。一个圈的**弦**(Chord)是指圈中一对不相邻顶点之间的边。如果一个圈至少有一条弦，我们称这样的圈为**弦圈**(Chorded Cycle)。一个阶数为 n 的图 G 是**弦泛圈的**(Chorded Pancyclic)，如果 G 包含从 4 到 n 的所有长度的弦圈。一个图 G 是**可追踪的**(Traceable)，如果存在一条包含 G 中所有顶点的路，即在 G 中包含一条哈密尔顿路。

令 H 为图 G 的子图。给定一个图族 $F = \{H_1, H_2, \cdots, H_K\}$，如果图 G 没有同构于任何由 H_i 的顶点导出的子图，其中 $i = 1, 2, \cdots, k$，则我们称图 G 是 F-free 的。特别地，如果 $F = \{H\}$，我们简单地说 G 是 H-free 的。如果 $H = K_{1,3}$，我们称 $K_{1,3}$-free 为**无爪图**。我们将 F 中的图称为**禁止子图**。对于禁止子图的哈密尔顿性已经被广泛研究，见文献[2]-[6]。

1971 年，Bondy 在[7]中提出了一个有趣的猜想(meta-conjecture)：几乎任何对图的非平凡条件，若暗示图是哈密尔顿的(Hamiltonian)，那么也意味着图是泛圈的(可能存在反例)。近 50 年来，这一猜想得到扩展，M. Cream，R.J. Gould 和 K. Hirohata 认为几乎任何暗示图为哈密尔顿图的条件也意味着图是弦泛圈图，可能会有一类明确定义的反例图和一些顶点较少的反例图。下面几个定理进一步支持了 Bondy 经典猜想的扩展。

对于图 G 和 H，令 $G\square H$ 表示 G 和 H 的笛卡尔积。

定理 1.1. [8]设 G 是阶数为 $n(n\geq 4)$ 的图。如果对于 G 中任意一对不相邻的顶点 x 和 y 的度和 $d(x)+d(y)\geq n$，那么 G 是弦泛圈的，或者 $G=K_{n/2,n/2}$，或者 $G=K_3\square K_2$。

定理 1.2. [9]一个阶数为 $n(n\geq 4)$ 的哈密尔顿图 G，如果其边数 $|E(G)|\geq \dfrac{n^2}{4}$，则 G 是弦泛圈的，或者 $G=K_{n/2,n/2}$，或者 $G=K_3\square K_2$。

定理 1.3. [10]设 G 是阶数为 $n(n\geq 35)$ 的 2-连通无爪图，如果 $\delta(G)\geq \dfrac{n-2}{3}$，则 G 是弦泛圈图。

我们研究了 $K_{1,3}$-*free* 图形成弦泛圈图的邻域条件。下面所给的结论启发了我们的研究。该结果给出了 $K_{1,3}$-*free* 图形成泛圈图的邻域条件。

定理 1.4. [11]令 G 是阶数为 $n(n\geq 14)$ 的 2-连通无爪图。如果对于 G 中每一对不相邻的顶点 u 和 v，有 $|N(u)\cup N(v)|\geq \dfrac{2n-2}{3}$，则 G 是泛圈的。

根据定理 1.4 与 Bondy 猜想的扩展，我们将泛圈性扩展为弦泛圈性，具体结果如下：

定理 1.5. 令 G 是阶数为 $n(n\geq 43)$ 的 2-连通无爪图。如果对 G 中每一对不相邻的顶点 u 和 v，有 $|N(u)\cup N(v)|\geq \dfrac{2n-2}{3}$，则 G 是弦泛圈的。

在本文中，第一部分介绍了相关的符号定义以及定理，第二部分给出了证明过程所需要的重要引理，第三部分进行主要结果的证明，第四部分进行了本文总结以及后续研究的展望。接下来，我们给出了证明所需的重要引理。

2. 引理

为了证明主要结果，我们介绍以下引理：

定理 2.1. [12]令 G 是一个阶数为 $n(n\geq 3)$ 的图。如果对于某个 s，G 是 s-连通的，并且不包含超过 s 个顶点的独立集，则 G 是哈密尔顿圈。

根据定理 2.1，我们得到下面的引理：

引理 2.2. 设 G 是一个无爪图。对于任意的 $x\in V(G)$，$G[N_G(x)]$ 要么是可追踪的，要么是两个不相交的团。

证明：假设 x 是 G 的任意顶点。由于 G 是 $K_{1,3}$-*free* 的，根据定理 2.1，如果 $G[N_G(x)]$ 是连通的，则 $G[N_G(x)]$ 是可追踪的。假设 $G[N_G(x)]$ 是不连通的，那么由于 G 是 $K_{1,3}$-*free* 的，$G[N_G(x)]$ 中只有两个分支 G_1 和 G_2。不失一般性，假设 G_1 中存在一对不相邻的顶点 u 和 v，设 z 是 G_2 中的一个顶点。那么 $\{x,u,v,z\}$ 在 G 中导出一个 $K_{1,3}$，这与 G 是 $K_{1,3}$-*free* 的相矛盾。因此，$G[N_G(x)]$ 是两个不相交的团。该引理的证明完成。

3. 主要结果的证明

接下来我们将证明定理 1.5。

证明：对于任意一对不相邻的顶点 u 和 v，由于 $n\geq 43$，有 $|N(u)\cup N(v)|\geq \dfrac{2n-2}{3}\geq 28$。利用反证法，假设 G 不是弦泛圈的。设 m 是一个最大的值，满足 $4\leq m\leq n$，使得 G 中长度为 m 的每个圈都没有弦。根据定理 1.4，存在一个长度为 n 的弦圈，因此 $m\neq n$。令 $R=G-C_m$，根据定理 1.4，G 必然是泛圈的。根据 m 的值将证明分为以下几种情况。

情况 1. $m\ge 9$。

设 $C_m=v_1v_2v_3\cdots v_mv_1$ 是 G 中长度为 m 的圈。由于 C_m 没有弦，那么 $\{v_1,v_4,v_7\}$ 是一个独立集。

假设 $N_R(v_1)\cap N_R(v_4)\ne\varnothing$，令 $a\in N_R(v_1)\cap N_R(v_4)$。假设对于 $5\le i\le m$，有 $N_{R-\{a\}}(v_i)\ne\varnothing$，令 $b\in N_{R-\{a\}}(v_i)$。由于 G 是 $K_{1,3}$-*free* 的，并且 G 没有长度为 m 的弦圈，因此 $v_{i-1}b\in E(G)$ 或 $v_{i+1}b\in E(G)$。如果 $v_{i-1}b\in E(G)$，则 $C_m=v_1av_4\cdots v_{i-1}bv_i\cdots v_mv_1$；如果 $v_{i+1}b\in E(G)$，则 $C=v_1av_4\cdots v_ibv_{i+1}\cdots v_mv_1$。在这两种情况下，$C$ 都是长度为 m 且有弦 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 的圈，这与假设矛盾。因此，$N_{R-\{a\}}(v_i)=\varnothing$。由于 G 没有长度为 m 的弦圈，$\left|N(v_5)\cup N(v_7)\right|\le 4$，这与 $\left|N(u)\cup N(v)\right|\ge\dfrac{2n-2}{3}\ge 28$ 相矛盾。因此，$N_R(v_1)\cap N_R(v_4)\ne\varnothing$。同理，$N_R(v_4)\cap N_R(v_7)=\varnothing$。

情况 1.1. $m=9$。

根据 $N_R(v_1)\cap N_R(v_4)=\varnothing$，可得 $N_R(v_1)\cap N_R(v_7)=\varnothing$。由于 G 中长度为 m 的每个圈都没有弦，所以 $\left|N_{C_9}(v_1)\cup N_{C_9}(v_4)\right|+\left|N_{C_9}(v_4)\cup N_{C_9}(v_7)\right|+\left|N_{C_9}(v_1)\cup N_{C_9}(v_7)\right|\le 12$，因此可以得到以下不等式：

$$\begin{aligned}3\times\frac{2n-2}{3}&\le\left|N(v_1)\cup N(v_4)\right|+\left|N(v_4)\cup N(v_7)\right|+\left|N(v_1)\cup N(v_7)\right|\\&=12+\left|N_R(v_1)\cup N_R(v_4)\right|+\left|N_R(v_4)\cup N_R(v_7)\right|+\left|N_R(v_1)\cup N_R(v_7)\right|\\&=12+2\left(\left|N_R(v_1)\right|+\left|N_R(v_4)\right|+\left|N_R(v_7)\right|\right)\\&\le 12+2|R|\le 2n-6\end{aligned}$$

得矛盾。

情况 1.2. $m\ge 10$。

假设 $\left|N_R(v_1)\cap N_R(v_7)\right|\ge 3$。令 x_1,x_2,x_3 是 $N_R(v_1)\cap N_R(v_7)$ 中的不同顶点。由于 G 是 $K_{1,3}$-*free* 图，不妨假设 $x_1x_2\in E(G)$。由于 $\left|N(v_8)\cup N(v_{10})\right|\ge\dfrac{2n-2}{3}\ge 28$，那么至少有三个顶点 y_1,y_2,y_3 满足 $y_1,y_2,y_3\in N_{R-\{x_1,x_2\}}(v_8)$ 或者 $y_1,y_2,y_3\in N_{R-\{x_1,x_2\}}(v_{10})$。

由此在 G 中构造一个长度为 m 弦圈。令 $y_1,y_2,y_3\in N(v_8)$，由于 G 是 $K_{1,3}$-*free* 图，我们可以假设 $y_1y_2\in E(G)$。由于 C_m 没有弦，且 G 是 $K_{1,3}$-*free* 图，所以 y_1 和 y_3 要么与 v_7 相邻，要么与 v_9 相邻。假设 v_7 和 v_9 中有一个点不与 y_1 或 y_3 相邻。那么由于 G 是 $K_{1,3}$-*free* 图，$y_1y_3\in E(G)$。如果 $y_1v_7\in E(G)$ 且 v_9 与 y_1 和 y_3 不相邻，从而 $G\left[\{v_8,v_7,v_9,y_3\}\right]$ 导出一个 $K_{1,3}$，则 $y_3v_7\in E(G)$，则存在 $C=v_1x_1x_2v_7y_3y_1y_2v_8v_9\cdots v_mv_1$；如果 $y_1v_9\in E(G)$ 且 v_7 与 y_1 和 y_3 不相邻，同理，$y_3v_9\in E(G)$，则存在 $C=v_1x_1x_2v_7v_8y_2y_1y_3v_9\cdots v_mv_1$。在这两种情况中，$C$ 是长度为 m 的弦圈，与假设矛盾。因此 v_7 和 v_9 都与 y_1 或 y_3 相邻。如果 $y_1v_7\in E(G)$，$y_3v_9\in E(G)$，则 $C'=v_1x_1x_2v_7y_1y_2v_8y_3v_9\cdots v_mv_1$；如果 $y_3v_7\in E(G)$，$y_1v_9\in E(G)$，则 $C'=v_1x_1x_2v_7y_3v_8y_2y_1v_9\cdots v_mv_1$。在这两种情况下，$C'$ 是长度为 m 的弦圈，与假设矛盾。

同理，假设 $y_1,y_2,y_3\in N(v_{10})$，则可得到一个长度为 m 的弦圈。因此，$\left|N_R(v_1)\cap N_R(v_7)\right|\le 2$。因此存在以下不等式：

$$\begin{aligned}3\times\frac{2n-2}{3}&\le\left|N(v_1)\cap N(v_4)\right|+\left|N(v_4)\cap N(v_7)\right|+\left|N(v_1)\cap N(v_7)\right|\\&\le 12+\left|N_R(v_1)\cap N_R(v_4)\right|+\left|N_R(v_4)\cap N_R(v_4)\right|+\left|N_R(v_1)\cap N_R(v_7)\right|\\&\le 12+2\left(\left|N_R(v_1)\right|+\left|N_R(v_4)\right|+\left|N_R(v_7)\right|\right)\\&\le 12+2\left(|R|+2\right)\le 2n-4\end{aligned}$$

得矛盾，情况 1 得证。

情况 2. $4 \le m \le 8$。

如果 G 是一个完全图，那么我们证明就完成了。如果存在两个不相邻的顶点 $u,v \in V(G)$，那么 $|N(u)| \ge 14$ 或 $|N(v)| \ge 14$，因为 $|N(u) \cup N(v)| \ge \frac{2n-2}{3} \ge 28$。不失一般性，我们假设 $|N(u)| \ge 14$。根据引理 2.2，$G[N(u)]$ 是可追踪的或两个不相交的团。如果 $G[N(u)]$ 是可追踪的，那么必定存在一个长度为 $k(4 \le k \le 8)$ 的弦圈。如果 $G[N(u)]$ 是两个不相交的团 G_1 和 G_2，那么 $|G_1| \ge 7$ 或 $|G_2| \ge 7$，并且必定存在一个长度为 $k(4 \le k \le 8)$ 的弦圈，情况 2 得证。

综上所述，令 G 是阶数为 $n(n \ge 43)$ 的 2-连通无爪图。如果对 G 中每一对不相邻的顶点 u,v，有 $|N(u) \cup N(v)| \ge \frac{2n-2}{3}$，则 G 是弦泛圈的。

4. 总结与展望

在本文中，我们利用反证法证明了 2-连通无爪图形成弦泛圈图的领域条件，即令 G 是阶数为 $n(n \ge 43)$ 的 2-连通无爪图。如果对 G 中每一对不相邻的顶点 u 和 v，有 $|N(u) \cup N(v)| \ge \frac{2n-2}{3}$，则是弦泛圈图，这是对 Bondy 猜想拓展的一个验证。在这个结论下，我们可以进行进一步的研究，证明其双弦泛圈性，以及计算弦的个数，具体猜想与问题如下。

如果一个圈至少有两条弦，则称该圈为**双弦圈**(doubly Chorded Cycle)。如果一个阶数为 n 的图 G 包含每个长度从 4 到 n 的双弦圈，则称该图为双弦泛圈的(doubly Chorded Pancyclic)。根据所得的结果，我们有进一步的猜想：

猜想 4.1. 令 G 是阶数为 $n(n \ge 43)$ 的 2-连通无爪图，如果对于 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v，有 $|N(u) \cup N(v)| \ge \frac{2n-2}{3}$，则 G 是双弦泛圈的。

问题 4.2. 令 G 是阶数为 $n(n \ge 43)$ 的 2-连通无爪图，如果对 G 中任意一对不相邻的顶点 u,v，有 $|N(u) \cup N(v)| \ge \frac{2n-2}{3}$，则 G 含有多少条弦？怎样计算每个弦圈中含有弦的个数？

基金项目

四川国家应用数学中心－成都信息工程大学智能系统应用数学研究所项目基金(2023ZX003)和科学研究项目基金(KYTZ2022146)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan, London. https://doi.org/10.1007/978-1-349-03521-2

[2] Faudree, R.J. and Gould, R.J. (1997) Characterizing Forbidden Pairs for Hamiltonian Properties. *Discrete Mathematics*, **273**, 45-60. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00147-1

[3] Gould, R.J. and Jacobson, M.S. (1982) Forbidden Subgraphs and Hamiltonian Properties of Graphs. *Discrete Mathematics*, **42**, 189-196. https://doi.org/10.1016/0012-365X(82)90216-3

[4] Brousek, J., Ryjáček, Z. and Schiermeyer, I. (1999) Forbidden Subgraphs, Stability and Hamiltonicity. *Discrete Mathematics*, **197**, 143-155.

[5] Faudree, R., Gould, R. and Jacobson, M. (2004) Forbidden Triples Implying Hamiltonicity: For All Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **24**, 47-54. https://doi.org/10.7151/dmgt.1212

[6] Bedrossian, P.M. (1991) Forbidden Subgraph and Minimum Degree Conditions for Hamiltonicity. Ph.D. Thesis, Memphis State University, Memphis.

[7] Bondy, J.A. (1971) Pancyclic Graphs I. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **11**, 80-84. https://doi.org/10.1016/0095-8956(71)90016-5

[8] Cream, M., Gould, R.J. and Hirohata, K. (2017) A Note on Extending Bondy's Meta-Conjecture. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **67**, 463-469.

[9] Chen, G., Gould, R.J., Gu, X.F. and Saito, A. (2018) Cycles with a Chord in Dense Graphs. *Discrete Mathematics*, **342**, 2131-2142. https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.04.016

[10] Tian, Z.X. (2021) Pancyclicity in Hamiltonian Graph Theory. Ph.D. Thesis, Université Paris-Saclay, Paris.

[11] Faudree, R.J., Gould, R.J. and Lindquester, T.E. (1991) Hamiltonian Properties and Adjacency Conditions in $K_{1,3}$ *-Free* Graphs. *Graph Theory Combinatorics and Applications*, **1**, 467-479.

[12] Chvátal, V. and Erdös, P. (1972) A Note on Hmiltonian Circuits. *Discrete Mathematics*, **2**, 111-113. https://doi.org/10.1016/0012-365X(72)90079-9