Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2020-2028
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135189

Hans汉斯

von Neumann代数上的*-Lie三重导子

崔久鹏，贺　衎*

太原理工大学数学学院，山西　太原

收稿日期：2024年4月21日；录用日期：2024年5月14日；发布日期：2024年5月23日

摘　要

算子代数上的导子作为算子理论研究的一个重要部分，得到国内外学者的广泛关注。近年来，学者们相继引入Lie导子、*-Lie导子、*-Lie三重导子等映射。然而Lie导子是Lie三重导子，但反过来Lie三重导子不一定是Lie导子。本文研究和探讨von Neumann代数上的*-Lie三重导子是否为Lie导子。证明了在不含I_1型中心直和项的有限von Neumann代数之间的每一个非线性*-Lie三重导子是一个可加*-导子。

关键词

非线性*-Lie三重导子，*-Lie三重导子，von Neumann代数

*-Lie Triple Derivation on von Neumann Algebras

Jiupeng Cui, Kan He*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Apr. 21st, 2024; accepted: May 14th, 2024; published: May 23rd, 2024

Abstract

As an important part of operator theory research, derivations on operator algebras have received widespread attention from scholars both domestically and internationally. In recent years, scholars have successively introduced mappings such as local Lie derivation, *-Lie derivation, *-Lie triple derivation. However, the Lie derivation is a Lie triple derivation; but conversely, the Lie triple derivation may not necessarily be a Lie derivation. This thesis studies and explores whether the *-Lie triple derivation on von Neumann algebra is a Lie derivation. We show that each nonlinear *-Lie triple derivation between von Neumann algebras without central summands of type I1 is an additive *-derivation.

*通讯作者。

文章引用: 崔久鹏, 贺衎. von Neumann 代数上的*-Lie 三重导子[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2020-2028.
DOI: 10.12677/aam.2024.135189

Keywords

Nonlinear ∗-Lie Triple Derivation, ∗-Lie Triple Derivation, von Neumann Algebra

1. 引言

设 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的∗-代数。若线性(可加)映射 $\delta:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 和任意的 $A,B\in\mathcal{A}$ 有 $\delta(AB)=A\delta(B)+B\delta(A)$，则称 δ 是(可加)导子。若对任意的 $A\in\mathcal{A}$ 有 $\delta(A^*)=\delta(A)^*$，则称 δ 为(可加)∗-导子。显然∗-导子是导子。对任意的 $A,B\in\mathcal{A}$，称 $[A,B]=AB-BA$ 为 Lie 积；称 $[A,B]_*=AB-BA^*$ 为∗-Lie 积。若映射(没有加性假设) $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 和任意的 $A,B\in\mathcal{A}$，有 $\varphi([A,B])=[\varphi(A),B]+[A,\varphi(B)]$，则称 φ 为 Lie 导子；若 $\varphi([A,B]_*)=[\varphi(A),B]_*+[A,\varphi(B)]_*$，则称 φ 为∗-Lie 导子。近年来，∗-Lie 导子的研究引起学者关注。文献[1]证明了每个由因子 von Neumann 代数到自身的非线性∗-Lie 导子都是一个可加∗-导子。文献[2]证明了包含非平凡对称幂等的 2-挠率自由酉素∗-环之间的每一个∗-Lie 导子都是一个可加∗-导子。文献[3]证明了标准算子代数上的每一个非线性∗-Lie 导子都是一个内导子。

在 Lie 导子的基础上，Miers 在[4]中引入了 Lie 三重导子的概念。设 $\mathcal{A}$ 是域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$)上的结合代数，$\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{A}$-双模。设 δ 为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的线性映射，若对任意的 $A,B,C\in\mathcal{A}$ 成立 $\delta([[A,B],C])=[[\delta(A),B],C]+[[A,\delta(B)],C]+[[A,B],\delta(C)]$，则称 δ 是 Lie 三重导子。易证每一个 Lie 导子都是一个 Lie 三重导子，反过来不成立。近年来不同算子代数上的 Lie 三重导子映射引起关注和研究(见[5]-[12]及其文献)。同样地，我们可以很自然地引入∗-Lie 三重导子的概念。设 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的∗-代数，$\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个映射，对任意的 $A,B,C\in\mathcal{A}$，若

$$\phi([[A,B]_*,C]_*)=[[\phi(A),B]_*,C]_*+[[A,\phi(B)]_*,C]_*+[[A,B]_*,\phi(C)]_*$$

则称 ϕ 为∗-Lie 三重导子。文献[13]证明了因子 von Neumann 代数间的每一个非线性∗-Lie 三重导子都是一个可加∗-导子，而因子 von Neumann 代数是一个素代数，对于更加一般的 von Neumann 代数，其上的∗-Lie 三重导子是否也是一个∗-导子？为解决此问题，本文继续研究有限 von Neumann 代数上的∗-Lie 三重导子。

在本文中，$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{A}_{sa}$ 分别表示代数 $\mathcal{A}$ 的中心和代数 $\mathcal{A}$ 的自伴随算子构成的集合。

2. ∗-Lie 三重导子

设 $\mathcal{H}$ 是复可分希尔伯特空间，我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有有界线性算子构成的集合。设 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为一个 von Neumann 代数。集合 $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}=\{S\in\mathcal{M}\mid ST=TS,\forall T\in\mathcal{M}\}$ 称为 $\mathcal{M}$ 的中心。对 $A\in\mathcal{M}$，A 的中心覆盖是所有满足 $PA=A$ ($P\in\mathcal{M}$)的中心投影的交集，记为 $\overline{A}$。A 的中心覆盖是值域为 $[\mathcal{M}A(H)]$ 的投影，即 $\{MA(x)\mid M\in\mathcal{M},\ x\in\mathcal{H}\}$ 的闭线性扩张。对于每个自伴算子 $A\in\mathcal{M}$，集合 $\{S\in\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}\mid S=S^*,S\le A\}$ 称为 A 的核，记为 $\underline{A}$。如果 P 是投影，且 $\underline{P}=0$，我们称 P 为 core-free 投影。显然，$A-\underline{A}\ge0$。若 $S\in\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，且 $A-\underline{A}\ge S\ge0$，则 $S=0$。如果 P 是投影，很明显 $\underline{P}$ 为 $\le P$ 的最大的中心投影。当且仅当 $\overline{I-P}=I$ 时，$\underline{P}=0$，其中 $\overline{I-P}$ 表示 $I-P$ 的中心覆盖。本文中将经常使用 von Neumann 代数的以下几个基本性质及

命题。

命题 1 [13] [14]设 $\mathcal{M}$ 为一个 von Neumann 代数。

(1)如果 $\mathcal{M}$ 不含 I_1 型的中心直和项，则 $\mathcal{M}$ 中每个非零的中心投影都是 $\mathcal{M}$ 的一个 core-free 投影的中心覆盖。

(2)如果 $T \in \mathcal{M}$，P 是 $\mathcal{M}$ 中的投影且 $\overline{P} = I$，那么对于所有 $M \in \mathcal{M}$，$TMP = 0$ 蕴含 $T = 0$。因此，如果 $Z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，则 $ZP = 0$ 蕴含 $Z = 0$。

在本文中，设 $\mathcal{M}$ 是一个不含 I_1 型中心直和项的 von Neumann 代数，根据命题 1(1)，存在一个中心覆盖为 I 的 core-free 投影，记为 P_1，即 $\overline{P_1} = I$ 且 $\underline{P_1} = 0$。显然 $P_1 \neq 0, I$。在本文中，P_1 是固定的。记 $P_2 = I - P_1$。根据 core-free 和中心覆盖的定义，P_2 是 core-free 投影且 $\overline{P_2} = I$。记 $\mathcal{M}_{ij} = P_i \mathcal{M} P_j$，$i, j = 1, 2$。记 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{12} + \mathcal{M}_{21} + \mathcal{M}_{22}$。对于每个元素 $T \in \mathcal{M}$，记 $T = \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}$。本文中 T_{ij} 表示 $T_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}$。

本节的主要结论表示如下。

定理 1 设 $\mathcal{M}$ 是一个不含 I_1 型中心直和项的有限 von Neumann 代数，$\phi: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个非线性∗-Lie 三重导子，即对任意的 $A, B, C \in \mathcal{M}$ 有

$$\phi\left(\left[[A,B]_*, C\right]_*\right) = \left[[\phi(A), B]_*, C\right]_* + \left[[A, \phi(B)]_*, C\right]_* + \left[[A,B]_*, \phi(C)\right]_*,$$

其中 $[A,B]_* = AB - BA^*$，那么 ϕ 是一个可加∗-导子。

下面，我们首先证明 ϕ 的可加性，即证以下命题。

命题 2 设 $\mathcal{M}$ 是一个不含 I_1 型中心直和项的有限 von Neumann 代数，$\phi: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个非线性∗-Lie 三重导子，即对任意的 $A, B, C \in \mathcal{M}$ 有：

$$\phi\left(\left[[A,B]_*, C\right]_*\right) = \left[[\phi(A), B]_*, C\right]_* + \left[[A, \phi(B)]_*, C\right]_* + \left[[A,B]_*, \phi(C)\right]_*,$$

其中 $[A,B]_* = AB - BA^*$。那么 ϕ 是可加的。

现在我们将分以下几个步骤证明命题 2。

步骤 1 $\phi(0) = 0$。

实际上，对 $A = B = C = 0$，

$$\phi(0) = \phi\left[[0,0]_*, 0\right]_* = \left[[\phi(0), 0]_*, 0\right]_* + \left[[0, \phi(0)]_*, 0\right]_* + \left[[0,0]_*, \phi(0)\right]_* = 0。$$

步骤 2 对每个 $A_{11} \in \mathcal{M}_{11}$ 和 $A_{22} \in \mathcal{M}_{22}$，

$$\phi(A_{11} + A_{22}) = \phi(A_{11}) + \phi(A_{22})。$$

证明记 $T = \phi(A_{11} + A_{22}) - \phi(A_{11}) - \phi(A_{22})$。由于 $\left[[iI, P_1]_*, A_{22}\right]_* = 0$，根据步骤 1 有

$$\begin{aligned}
&\left[[\phi(iI), P_1]_*, A_{11} + A_{22}\right]_* + \left[[iI, \phi(P_1)]_*, A_{11} + A_{22}\right]_* + \left[[iI, P_1]_*, \phi(A_{11} + A_{22})\right]_* \\
&= \phi\left(\left[[iI, P_1]_*, A_{11} + A_{22}\right]_*\right) \\
&= \phi\left(\left[[iI, P_1]_*, A_{11}\right]_*\right) + \phi\left(\left[[iI, P_1]_*, A_{22}\right]_*\right) \\
&= \left[[\phi(iI), P_1]_*, A_{11} + A_{22}\right]_* + \left[[iI, \phi(P_1)]_*, A_{11} + A_{22}\right]_* + \left[[iI, P_1]_*, \phi(A_{11}) + \phi(A_{22})\right]_*.
\end{aligned}$$

因此，$\left[[iI, P_1]_*, T\right]_* = 0$，这说明 $T_{11} = T_{12} = T_{21} = 0$。

类似地，对 P_2 应用同样证明方法，可以得到 $T_{22} = 0$。因此 $T = 0$。

步骤 3 对所有 $A_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}$，$1 \le i, j \le 2$，

$$\phi\left(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(A_{ij}\right)。$$

证明记 $T=\phi\left(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right)-\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(A_{ij}\right)$。由于 $\left[\left[P_1,A_{21}\right]_*,P_2\right]=\left[\left[P_1,A_{11}\right]_*,P_2\right]=\left[\left[P_1,A_{22}\right]_*,P_2\right]_*=0$，由步骤 1 有

$$\begin{aligned}&\left[\left[\phi(P_1),\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*,P_2\right]_*+\left[\left[P_1,\phi\left(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right)\right]_*,P_2\right]_*+\left[\left[P_1,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*,\phi(P_2)\right]_*=\phi\left(\left[\left[P_1,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*,P_2\right]_*\right)\\&=\phi\left(\left[\left[P_1,A_{11}\right]_*,P_2\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[P_1,A_{12}\right]_*,P_2\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[P_1,A_{21}\right]_*,P_2\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[P_1,A_{22}\right]_*,P_2\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi(P_1),\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*,P_2\right]_*+\left[\left[P_1,\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(A_{ij}\right)\right]_*,P_2\right]_*+\left[\left[P_1,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*,\phi(P_2)\right]_*.\end{aligned}$$

因此，$\left[\left[P_1,T\right]_*,P_2\right]_*=0$，这说明 $T_{12}=0$。

类似地可以证明 $\left[\left[P_2,T_*\right],P_1\right]_*=0$，这说明 $T_{21}=0$。

另一方面，由于 $\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,A_{12}\right]_*=\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,A_{21}\right]_*=0$，由步骤 1 和步骤 2 有

$$\begin{aligned}&\left[\left[\phi\left(i\left(P_1-P_2\right)\right),I\right]_*,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*+\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),\phi(I)\right]_*,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*+\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,\phi\left(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right)\right]_*\\&=\phi\left(\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,A_{11}+A_{22}\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,A_{12}\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,A_{21}\right]_*\right)\\&=\phi\left(\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(i\left(P_1-P_2\right)\right),I\right]_*,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*+\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),\phi(I)\right]_*,\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}\right]_*+\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(A_{ij}\right)\right]_*.\end{aligned}$$

因此 $\left[\left[i\left(P_1-P_2\right),I\right]_*,T\right]_*=0$，这说明 $T_{11}=T_{22}=0$。

综上可得 $T=0$。

步骤 4 对所有 $A_{ij},B_{ij}\in\mathcal{M}_{ij}$，$i\neq j$，

$$\phi\left(A_{ij}+B_{ij}\right)=\phi\left(A_{ij}\right)+\phi\left(B_{ij}\right)。$$

证明易证

$$\left[\left[\frac{i}{2}I,P_i+A_{ij}\right]_*,i\left(P_j+B_{ij}\right)\right]_*=-A_{ij}-B_{ij}-A_{ij}^*-B_{ij}A_{ij}^*。$$

由步骤 3 有

$$\begin{aligned}&-\phi\left(A_{ij}+B_{ij}\right)-\phi\left(A_{ij}^*\right)-\phi\left(B_{ij}A_{ij}^*\right)=\phi\left(\left[\left[\frac{i}{2}I,P_i+A_{ij}\right]_*,i\left(P_j+B_{ij}\right)\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(\frac{i}{2}I\right),P_i+A_{ij}\right]_*,i\left(P_j+B_{ij}\right)\right]_*+\left[\left[\frac{i}{2}I,\phi\left(P_i\right)+\phi\left(A_{ij}\right)\right]_*,i\left(P_j+B_{ij}\right)\right]_*+\left[\left[\frac{i}{2}I,P_i+A_{ij}\right]_*,\phi\left(iP_j\right)+\phi\left(B_{ij}\right)\right]_*\\&=\phi\left(\left[\left[\frac{i}{2}I,P_i\right]_*,iP_j\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[\frac{i}{2}I,P_i\right]_*,iB_{ij}\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[\frac{i}{2}I,A_{ij}\right]_*,iP_j\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[\frac{i}{2}I,A_{ij}\right]_*,iB_{ij}\right]_*\right)\\&=-\phi\left(A_{ij}\right)-\phi\left(B_{ij}\right)-\phi\left(A_{ij}^*\right)-\phi\left(B_{ij}A_{ij}^*\right).\end{aligned}$$

因此，可以得到

$$\phi\left(A_{ij}+B_{ij}\right)=\phi\left(A_{ij}\right)+\phi\left(B_{ij}\right)。$$

步骤 5 对所有 $A_{ii},B_{ii}\in\mathcal{M}_{ii}$，$1\le i\le 2$，

$$\phi\left(A_{ii}+B_{ii}\right)=\phi\left(A_{ii}\right)+\phi\left(B_{ii}\right)。$$

证明记 $T=\phi\left(A_{ii}+B_{ii}\right)-\phi\left(A_{ii}\right)-\phi\left(B_{ii}\right)$，且 $i\ne j$，有

$$\begin{aligned}&\left[\left[\phi\left(iP_j\right),I\right]_*,A_{ii}+B_{ii}\right]_*+\left[\left[iP_j,\phi\left(I\right)\right]_*,A_{ii}+B_{ii}\right]_*+\left[\left[iP_j,I\right]_*,\phi\left(A_{ii}+B_{ii}\right)\right]_*\\&=\phi\left(\left[\left[iP_j,I\right]_*,A_{ii}+B_{ii}\right]_*\right)\\&=\phi\left(\left[\left[iP_j,I\right]_*,A_{ii}\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[iP_j,I\right]_*,B_{ii}\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(iP_j\right),I\right]_*,A_{ii}+B_{ii}\right]_*+\left[\left[iP_j,\phi\left(I\right)\right]_*,A_{ii}+B_{ii}\right]_*+\left[\left[iP_j,I\right]_*,\phi\left(A_{ii}\right)+\phi\left(B_{ii}\right)\right]_*.\end{aligned}$$

因此$\left[\left[iP_j,I\right]_*,T\right]_*=0$，这表明 $T_{ij}=T_{ji}=T_{jj}=0$。

另一方面，对所有 $C_{ij}\in\mathcal{M}_{ij}$，$i\ne j$ 由步骤 4 有

$$\begin{aligned}&\left[\left[\phi\left(iP_i\right),A_{ii}+B_{ii}\right]_*,C_{ij}\right]_*+\left[\left[iP_i,\phi\left(A_{ii}+B_{ii}\right)\right]_*,C_{ij}\right]_*+\left[\left[iP_i,A_{ii}+B_{ii}\right]_*,\phi\left(C_{ij}\right)\right]_*\\&=\phi\left(\left[\left[iP_i,A_{ii}+B_{ii}\right]_*,C_{ij}\right]_*\right)\\&=\phi\left(\left[\left[iP_i,A_{ii}\right]_*,C_{ij}\right]_*\right)+\phi\left(\left[\left[iP_i,B_{ii}\right]_*,C_{ij}\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(iP_i\right),A_{ii}+B_{ii}\right]_*,C_{ij}\right]_*+\left[\left[iP_i,A_{ii}+B_{ii}\right]_*,\phi\left(C_{ij}\right)\right]_*+\left[\left[iP_i,\phi\left(A_{ii}\right)+\varphi\left(B_{ii}\right)\right]_*,C_{ij}\right]_*.\end{aligned}$$

因此对所有 $C_{ij}\in\mathcal{M}_{ij}$，$i\ne j$ 有$\left[\left[iP_j,T\right]_*,C_{ij}\right]_*=0$，这表明 $P_iTC_{ij}=0$。由命题 1(ii)有 $T_{ii}=0$。

由以上步骤可得 $T=0$。

下面对命题 2 进行证明。

证明令 $A=\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}$，$B=\sum_{i,j=1}^{2}B_{ij}$。由步骤 2~5 有

$$\begin{aligned}\phi\left(A+B\right)&=\phi\left(\sum_{i,j=1}^{2}A_{ij}+\sum_{i,j=1}^{2}B_{ij}\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(A_{ij}+B_{ij}\right)\\&=\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(A_{ij}\right)+\sum_{i,j=1}^{2}\phi\left(B_{ij}\right)\\&=\phi\left(A\right)+\phi\left(B\right).\end{aligned}$$

接下来，我们给出定理 1 的证明。在证明定理 1 之前，我们需要以下引理。

引理 1 设 $\mathcal{M}$ 是一个单位元为 I 的 von Neumann 代数，$A\in\mathcal{M}$。若对所有的 $B\in\mathcal{M}$，$AB=BA^*$ 成立，则 $A\in\mathcal{M}_{sa}\cap\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$。

证明令 $B=I$，可以得到 $A=A^*$，这说明 $A\in\mathcal{M}_{sa}$。因此对于所有 $B\in\mathcal{M}$，有 $AB=BA$，这说明 $A\in\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，因此 $A\in\mathcal{M}_{sa}\cap\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$。

此外，下面的注记它在定理 1 的证明中起着重要的作用。

注记 1 如果 $\mathcal{M}$ 是有限的，则 $\mathcal{M}$ 上存在中心值迹，那么 $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$ 中每个非零元素不能写成 $\sum_{i=1}^{n}\left[A_i,B_i\right]$ 的

形式，其中 $A_i, B_i \in \mathcal{M}$。

断言 1 $\phi(\mathbb{R}I) \subseteq \mathcal{M}_{sa} \cap \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，$\phi(\mathbb{C}I) \subseteq \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，且当 $A = A^*$ 时，$\phi(A) = \phi(A)^*$ 成立。

对于任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $A \in \mathcal{M}$，由步骤 1 有

$$\begin{aligned}0 &= \phi\left(\left[[\lambda I, A]_*, I\right]_*\right) \\ &= \left[\left[\phi(\lambda I), A\right]_*, I\right]_* + \left[\lambda I, \phi(A)_*, I\right]_* + \left[[\lambda I, A]_*, \phi(I)\right]_* \\ &= \left[\left[\phi(\lambda I), A\right]_*, I\right]_* \\ &= \phi(\lambda I)\left(A + A^*\right) - \left(A + A^*\right)\phi(\lambda I)^*.\end{aligned}$$

因此，对于任意的 $B \in \mathcal{M}_{sa}$ 可以得到 $\phi(\lambda I)B = B\phi(\lambda I)^*$，由于对于任意 $B \in \mathcal{M}$，均有 $B = B_1 + iB_2$，其中 $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{sa}$，从而可得 $\phi(\lambda I)B = B\phi(\lambda I)^*$。从而由引理 1 有 $\phi(\lambda I) \in \mathcal{M}_{sa} \cap \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，进而可以得到 $\phi(\mathbb{R}I) \in \mathcal{M}_{sa} \cap \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$。对于任意 $A = A^* \in \mathcal{M}$，由 $\phi(I) \in \mathbb{R}I$ 可得

$$0 = \phi\left(\left[[A, I]_*, I\right]_*\right) = 2\phi(A) - 2\phi(A)^* = \left[\left[\phi(A), I\right]_*, I\right]_*.$$

因此 $A = A^*$ 时 $\phi(A) = \phi(A)^*$ 成立。

接下来证明 $\phi(\mathbb{C}I) \subseteq \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$。

对于任意的 $\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $A = A^* \in \mathcal{M}$，由 $\phi(A) = \phi(A)^*$ 得到

$$0 = \phi\left(\left[[A, \alpha I]_*, C\right]_*\right) = \left[A, \phi(\alpha I)_*, C\right]_*。$$

对所有 $C \in \mathcal{M}$ 成立，根据引理 1 有

$$\left[A, \phi(\alpha I)\right]_* = \left[A, \phi(\alpha I)\right] \in \mathcal{M}_{sa} \cap \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$$

对所有 $A = A^* \in \mathcal{M}$ 成立。由注记 1 可得 $\left[A, \phi(\alpha I)\right] = 0$，即对每个 $A = A^* \in \mathcal{M}$，有 $A\phi(\alpha I) = \phi(\alpha I)A$。而对任意的 $B \in \mathcal{M}$，有 $B = B_1 + iB_2$，其中 $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{sa}$，从而可得对于任意的 $B \in \mathcal{M}$，有 $\phi(\alpha I)B = B\phi(\alpha I)$。因此，$\phi(\alpha I) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$，则 $\phi(\mathbb{C}I) \subseteq \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}$。

断言 2 $\phi\left(\frac{1}{2}I\right) = \phi\left(\frac{1}{2}iI\right) = 0$，$\phi(iA) = i\phi(A)$，其中 $A \in \mathcal{M}$。

由断言 1，假设

$$\phi\left(-\frac{1}{2}I\right) = Z_1，\ \phi\left(\frac{1}{2}I\right) = Z_2，\ \phi\left(-\frac{1}{2}iI\right) = Z_3 + iZ_4，\ \phi\left(-\frac{1}{2}iI\right) = Z_5 + iZ_6,$$

其中 $Z_i \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{M}_{sa}$，由

$$0 = \left[\left[-\frac{1}{2}iI, -\frac{1}{2}iI\right]_*, -\frac{1}{2}I\right]_*$$

和步骤 1 有

$$\begin{aligned}0 &= \phi\left(\left[\left[-\frac{1}{2}iI, -\frac{1}{2}iI\right]_*, -\frac{1}{2}I\right]_*\right) \\ &= \left[\left[\phi\left(-\frac{1}{2}iI\right), -\frac{1}{2}iI\right]_*, -\frac{1}{2}I\right]_* + \left[\left[-\frac{1}{2}iI, \phi\left(-\frac{1}{2}iI\right)\right]_*, -\frac{1}{2}I\right]_* \\ &= \left[\left[Z_3 + iZ_4, -\frac{1}{2}iI\right]_*, -\frac{1}{2}I\right]_* + \left[\left[-\frac{1}{2}iI, Z_3 + iZ_4\right]_*, -\frac{1}{2}I\right]_* = iZ_3,\end{aligned}$$

这表明 $Z_3=0$。

同样，由 $0=\left[\left[\frac{1}{2}iI,\frac{1}{2}iI\right]_*,-\frac{1}{2}I\right]_*$ 可得 $Z_5=0$。

因此可以进一步假设，

$$\phi\left(-\frac{1}{2}I\right)=Z_1,\ \phi\left(\frac{1}{2}I\right)=Z_2,\ \phi\left(-\frac{1}{2}iI\right)=iZ_4,\ \phi\left(-\frac{1}{2}iI\right)=iZ_6,$$

由 $-\frac{1}{2}iI=\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}iI\right]_*,-\frac{1}{2}I\right]_*$ 有

$$\begin{aligned}iZ_4&=\phi\left(\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,-\frac{1}{2}I\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(-\frac{1}{2}iI\right),-\frac{1}{2}I\right]_*,-\frac{1}{2}I\right]_*+\left[-\frac{1}{2}iI,\phi\left(-\frac{1}{2}I\right)_*,-\frac{1}{2}I\right]_*+\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\phi\left(-\frac{1}{2}I\right)\right]_*\\&=iZ_4+2iZ_1\end{aligned}$$

这说明 $Z_1=0$。

由 $\frac{1}{2}iI=\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\frac{1}{2}I\right]_*$ 可以得到

$$\begin{aligned}iZ_6&=\phi\left(\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\frac{1}{2}I\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(-\frac{1}{2}iI\right),-\frac{1}{2}I\right]_*,\frac{1}{2}I\right]_*+\left[\left[-\frac{1}{2}iI,\ -\frac{1}{2}I\right]_*,\phi\left(\frac{1}{2}I\right)\right]_*\\&=iZ_2-iZ_4,\end{aligned}$$

这说明 $Z_6=Z_2-Z_4$。

由 $\frac{1}{2}I=\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,-\frac{1}{2}iI\right]_*$ 可以得到

$$\begin{aligned}Z_2&=\phi\left(\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,-\frac{1}{2}iI\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(-\frac{1}{2}iI\right),-\frac{1}{2}I\right]_*,-\frac{1}{2}iI\right]_*+\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\phi\left(-\frac{1}{2}iI\right)\right]_*\\&=-2Z_4.\end{aligned}$$

由 $-\frac{1}{2}I=\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\frac{1}{2}iI\right]_*$ 可以得到

$$\begin{aligned}0&=\phi\left(\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\frac{1}{2}iI\right]_*\right)\\&=\left[\left[\phi\left(-\frac{1}{2}iI\right),-\frac{1}{2}I\right]_*,\frac{1}{2}iI\right]_*+\left[\left[-\frac{1}{2}iI,-\frac{1}{2}I\right]_*,\phi\left(\frac{1}{2}iI\right)\right]_*\\&=Z_4-Z_6.\end{aligned}$$

因此 $Z_4 = Z_6$，所以 $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 = 0$ 并且 $\phi\left(\frac{1}{2}I\right) = \phi\left(\frac{1}{2}iI\right) = 0$。

对于每个 $A \in \mathcal{M}$，由 $iA = \left[\left[\frac{1}{2}iI, \frac{1}{2}I\right]_*, A\right]_*$ 可以得到

$$\phi(iA) = \phi\left(\left[\left[\frac{1}{2}iI, \frac{1}{2}I\right]_*, A\right]_*\right) = \left[\left[\frac{1}{2}iI, \frac{1}{2}I\right]_*, \phi(A)\right]_* = i\phi(A)。$$

最后我们证明定理 1，通过命题 2，我们只需要证明 ϕ 是一个*-导子。

证明对于每个 $A \in \mathcal{M}$，$A = A_1 + iA_2$，其中 $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{sa}$。由断言 1 和 2 可以得到

$$\begin{aligned}
\phi(A^*) &= \phi(A_1 - iA_2) = \phi(A_1) - \phi(iA_2) \\
&= \phi(A_1) - i\phi(A_2) = \phi(A_1)^* - i(\phi(A_2))^* \\
&= \phi(A_1)^* + (i\phi(A_2))^* = (\phi(A_1) + i\phi(A_2))^* \\
&= \phi(A_1 + iA_2)^* = \phi(A).
\end{aligned}$$

根据断言 2 和命题 2，$\phi(iI) = 0$。那么对于所有 $A, B \in \mathcal{M}$ 可以得到

$$\begin{aligned}
2i\phi(AB + BA^*) &= \phi\left(2i(AB + BA^*)\right) \\
&= \phi\left(\left[[iI, A]_*, B\right]_*\right) \\
&= \left[[iI, \phi(A)]_*, B\right]_* + \left[[iI, A]_*, \phi(B)\right]_* \\
&= 2i\left(\phi(A)B + A\phi(B) + \phi(B)A^* + B\phi(A)^*\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\phi(AB + BA^*) = \phi(A)B + A\phi(B) + \phi(B)A^* + B\phi(A)^* \tag{1}$$

由断言 2 和式(1)可知

$$\begin{aligned}
\phi(AB - BA^*) &= \phi(iA)(-iB) + (-iB)(iA)^* \\
&= \phi(iA)(-iB) + (iA)\phi(-iB) + \phi(-iB)(iA)^* + (-iB)\phi(iA)^* \\
&= \phi(A)B + A\phi(B) - \phi(B)A^* - B\phi(A)^*.
\end{aligned}$$

因此

$$\phi(AB - BA^*) = \phi(A)B + A\phi(B) - \phi(B)A^* - B\phi(A)^* \tag{2}$$

结合式(1)和(2)可得

$$\phi(AB) = \phi(A)B + A\phi(B)$$

定理证明完毕。

3. 结论

本文针对代数上的*-Lie 三重导子是否为*-导子的问题，对代数做 Pierce 分解，证明了有限 von Neumann 代数上的每一个非线性*-Lie 三重导子是一个可加*-导子。设 $\mathcal{M}$ 是不含 I_1 型中心直和项的有限 von Neumann 代数，则 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 的每一个非线性*-Lie 三重导子是一个可加*-导子。

关于代数上的 Lie 导子及*-Lie 导子还有一些问题有待于继续深入研究。例如，我们证明了在不含I_1型中心直和项的有限 von Neumann 代数上的每一个非线性*-Lie 三重导子是一个可加*-导子，但有限条件是否可以去掉？又如，$\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 的上的*-Lie n 重导子是否为*-导子？接下来，我们将继续研究 Lie n 重导子*-Lie n 重导子和的相关问题。

参考文献

[1] Yu, W.Y. and Zhang, J.H. (2012) Nonlinear ∗-Derivations on Factor von Neumann Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 1979-1991. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.05.032

[2] Kong, L. and Zhang, J.H. () Nonlinear Skew Lie Derivations on Prime ∗-Rings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **54**, 475-484. https://doi.org/10.1007/s13226-022-00269-y

[3] Jing, W. (2016) Nonlinear ∗-Lie Derivations of Standard Operator Algebras. *Quaestiones Mathematicae*, **39**, 1037-1046. https://doi.org/10.2989/16073606.2016.1247119

[4] Miers, C.R. (1978) Lie Triple Derivations of von Neumann Algebras. Proceedings of the American Mathematical Society, Los Angeles, 11 May 1922, 57-61.

[5] Li, J. and Shen, Q. (2012) Characterizations of Lie Higher and Lie Triple Derivations on Triangular Algebras. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **49**, 419-433. https://doi.org/10.4134/JKMS.2012.49.2.419

[6] Ji, P.S., Liu, R.R. and Zhao, Y.Z. (2012) Nolinear Lie Triple Derivations of Triangualr Algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, **60**, 1155-1164. https://doi.org/10.1080/03081087.2011.652109

[7] Sun, S.L. and Ma, X.F. (2012) Lie Triple Derivations of Nest Algebras on Banach Spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 3443-3462. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.12.018

[8] Yu, W.Y. and Zhang, J.H. (2013) Lie Triple Derivations of CSL Algebras. *International Journal of Theoretical Physics*, **52**, 2118-2127. https://doi.org/10.1007/s10773-013-1507-5

[9] Li, C.J., Fang, X.C. and Lu, F.Y. (2014) Lie Triple Derivable Mappings on Rings. *Communications in Algebra*, **42**, 2510-2527. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.763041

[10] Benkovic, D. (2015) Lie Triple Derivations of Unital Algebras with Idempotents. *Linear Multilinear Algebra*, **63**, 141-165. https://doi.org/10.1080/03081087.2013.851200

[11] Ebrahimi, S. (2015) Lie Triple Derivations on Primitive Rings. *Asian-European Journal of Mathematics*, **8**, 1550019-1-1550019-7. https://doi.org/10.1142/S1793557115500199

[12] Ansari, M.A., Ashraf, M. and Akhtar, M.S. (2022) Lie Triple Terivations on Trivial Extension Algebras. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **48**, 1763-1774. https://doi.org/10.1007/s41980-021-00618-3

[13] Kaison, R.V. and Ringrose, J.R. (1983) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I. Academic Press, New York.

[14] Kaison, R.V. and Ringrose, J.R. (1986) Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. II. Academic Press, New York.