

定义于单叶双曲面上的多元切触插值问题研究

王瀚霖*, 崔利宏#

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年4月23日; 录用日期: 2024年5月17日; 发布日期: 2024年5月28日

摘要

多元插值问题一直是计算数学专业研究领域的一个重要的研究方向, 与生产实践相结合更是成为主流趋势。本文针对在建筑学领域中常用的单叶双曲面来研究其上的多元函数切触插值问题。首先给出了定义于单叶双曲面上的多元切触插值定义以及其上正则性问题的提法, 对插值条件组的拓扑结构进行了较为深入的研究, 得到了定义于单叶双曲面上的切触插值正则条件组的判定定理及两种构造方法, 最后给出了定理证明, 并以实验算例验证了算法的有效性。

关键词

单叶双曲面, 切触插值, 正则性

Research on Multivariate Contact Interpolation Defined on Hyperboloid of One Sheet

Hanlin Wang*, Lihong Cui#

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 23rd, 2024; accepted: May 17th, 2024; published: May 28th, 2024

Abstract

The multivariate interpolation problem has been an important research direction in the research field of computational mathematics, and the combination with production practice has become a mainstream trend. In this paper, we study the multivariate tangent interpolation problem on hyperboloid of one sheet, which is commonly used in the field of architecture. Firstly, the definition of multivariate contact interpolation on hyperboloid of one sheet and the formulation of the regularity problem are given, the topology of the interpolation condition group is studied in depth,

*第一作者。

#通讯作者。

and the decision theorem of the contact interpolation condition group on hyperboloid of one sheet and the two constructive methods are obtained, and finally, the theorem proof is given, and the validity of the algorithm is verified by the experimental example.

Keywords

Hyperboloid of One Sheet, Contact Interpolation, Regularity

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

多元插值一直是计算数学专业研究领域的一个重要的研究方向。近些年来,随着科技的进步,将多元函数插值与实际应用相结合成为了重要的研究对象,而多元多项式切触插值则是多元函数插值研究的重点[1]。多元切触插值是给定一个多元函数,并且根据一组给定的插值条件(根据所给定的插值结点集并求出各自的微分算子)来构造一个多元多项式函数来近似地表示这个多元函数,而且要求在插值结点处函数值及导数值相同[2]。研究切触插值的正则性问题(存在且唯一)是研究多元切触插值的一个基本问题。国内外的计算数学学者目前对于这一问题的研究主要采用两种方法:一种方法是根据特定的插值条件组来构造相对应的正则插值多项式空间,并且要求多项式空间维数越低越好;另一种是给定插值多项式空间来构造使切触插值多项式唯一存在的插值条件组[3]。目前,有关于全空间插值和定义在空间内的广义代数流形插值方面的研究成果较为充分,并且针对于一些特定表面上的 Lagrange 插值,也存在一些详细的研究成果。然而,针对实际生产和生活中常见的具体流形的研究,则相对较少[4]。

单叶双曲面是二次曲面中一类重要的代数曲面,在力学以及建筑学中有着广泛的应用。在建筑学领域中,单叶双曲面有着良好的性质,比如美观和结构稳定。根据单叶双曲面设计的空间缆索,可大幅度提高人行悬索桥的抗侧刚度和抗扭刚度,具有良好的抗风稳定性,且节约造价[5]。因此,单叶双曲面上的多元切触插值具有研究意义。

2. 基本定义

本文主要研究定义于三维欧式空间 \mathbb{R}^3 中的单叶双曲面 $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ 进行切触插值的正则性问题。

首先给出概念: 设 $n, r \in \mathbb{N}$, k 为正整数, $P_n^{(3)}$ 表示全次数不超过 n 的三元多项式空间, $P_{n,r}^{(3)}[q(k)]$ 表示定义在 k 次代数曲面 $q(x, y, z) = 0$ 上的全次数不超过 n 且有 r 阶方向导数的三元代数多项式空间。定义 $d_{n,\eta}(k)$ 如下:

$$d_{n,\eta}(k) = \binom{n+3}{3} - \binom{n-(\eta+1)k+3}{3} = \begin{cases} \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3), & n < (\eta+1)k \\ \frac{1}{6}(\eta+1)k(3n-(\eta+1)k) + 12n + (\eta+1)^2 k^2 - 6(\eta+1)k + 11, & n \geq (\eta+1)k \end{cases} \quad (1)$$

而且有 $\dim P_{n,r}^{(3)}[q(k)] = d_{n,\eta}(k)$ 。即定义于单叶双曲面上的切触插值正则条件组所包含的条件数等于插值空间的维数[6]。

再给出如下定义:

定义 1: [7] (\mathbb{R}^3 中全次数型多元切触插值)

设 $z_q \in \mathbb{Z}$ 且 $z_q \geq 0$, $q = 1, \dots, t$; $t \geq 0$ 及一个由 t 个结点组成的集合 $\Lambda = \{Q_q\}_{q=1}^t$ 。 \mathbb{R}^3 中的全次数型多元切触插值问题的核心是, 如果给定一个数组 $C_{q,p}$, $q = 1, \dots, t$ 及 $|p| \leq z_q$, 在 $P_n^{(3)}$ 中确定一个多项式 $p(x, y, z)$ 满足:

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+p_3}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3}} p(Q_q) = C_{q,p}, \quad q = 1, \dots, t; \quad |p| \leq z_q \tag{2}$$

这里如果 z_q 及 n 都满足:

$$\binom{n+3}{3} = \sum_{q=1}^t \binom{z_q+3}{3} \tag{3}$$

则 Λ 及相对应的求导条件一起构成了一个插值条件组, 称这个插值条件组为 $P_n^{(3)}$ 的一个正则切触插值条件组。如果对于 z_q 满足 $z_1 = z_2 = \dots = z_t$, 则该类切触插值问题被称为一致切触插值问题。

定义 1 推广: (\mathbb{R}^m 中全次数型多元切触插值)

\mathbb{R}^m 中的全次数型多元切触插值问题就是如果对于给定的数组 $C_{q,p}$, $q = 1, \dots, t$ 及 $|p| \leq z_q$, 在 $P_n^{(m)}$ 中确定一个多项式 $p(x, y, z)$ 满足:

$$\frac{\partial^{p_1+\dots+p_m}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} p(Q_q) = C_{q,p}, \quad q = 1, \dots, t; \quad |p| \leq z_q \tag{4}$$

这里如果 z_q 及 n 都满足:

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{q=1}^t \binom{z_q+m}{m} \tag{5}$$

定义 2: (单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上的切触插值正则条件组)

设 $F(x, y, z)$ 为如上所定义的单叶双曲面 $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$, 且

$\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ 为沿该二次代数曲面的一个 n 次 r 阶切触插值正则条件组。定义 $l_{n,r}(2)$ 如下:

$$l_{n,r}(2) = \frac{1}{2}(n-2r)2(n-(r+1)2+4) + \binom{2-1}{3} + 1 \tag{6}$$

对于上述 \mathcal{B} 满足 $\mathcal{B} \in I_{n,r}^{(3)}(q)$ (这里 $I_{n,r}^{(3)}(q)$ 表示的是沿该曲面全部 n 次 r 阶切触插值正则条件组的集合), 如果对于任意给定的一组数组 $\{f_i^{(r)} \mid r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(2)\}$, 在 $P_n^{(3)}$ 中存在多项式 $p(x, y, z)$, 满足下述切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, \quad r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(2) \tag{7}$$

上式中 $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)})$ 代表多项式 $p(x, y, z)$ 在曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上条件组 \mathcal{B} 中点 $Q_i (i = 1, \dots, l_{n,r}(2))$ 处沿这个曲面的 r 阶法向导数。(即沿曲面位于该点处的切平面的法方向的 r 阶方向导数)

定义 2 推广: [8] (任意曲面 $q(x, y, z)$ 上的切触插值正则条件组)

假设 $q(x, y, z) = 0$ 是一个 k 次没有重复的分量的代数曲面, $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} | r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(k)\}$ 为定义在这个面上的一个切触插值条件组。对于任意给定的一个实数组 $\{f_i^{(r)} | r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(k)\}$, 要求在 $\mathbb{P}_n^{(3)}$ 空间中存在一个多项式 $p(x, y, z)$, 并使其满足下述切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, \quad r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(k) \quad (8)$$

$$l_{n,r}(k) = \frac{1}{2}(n - rk)k(n - (r+1)k + 4) + \binom{k-1}{3} + 1 \quad (9)$$

由此我们可以得到一个推论: 设 $F(x, y, z)$ 为如上所定义的单叶双曲面, 是一个二次没有重复分量的代数曲面, 则在这个曲面上所求得的切触插值条件组为 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} | r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ 。如果对于任意给定的一个实数组 $\{f_i^{(r)} | r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ 方程组(8)总是存在一组解等价于若 $\mathbb{P}_n^{(3)}$ 中存在 $p(x, y, z)$ 满足齐次切触插值条件: $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, r = 0, \dots, \eta; i = 1, \dots, l_{n,r}(2)$, 可推出在曲面 $F(x, y, z)$ 上总是有零多项式 $p(x, y, z)$ 。

定义 1 首先提出了 \mathbb{R}^3 中全次数型多元切触插值问题的提法, 并且推广到了 \mathbb{R}^m 空间当中。定义 2 提出了单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上的切触插值正则条件组的定义, 并推广到了任意曲面上 $q(x, y, z)$ 的切触插值正则条件组, 根据定义 1 和定义 2 及其推广, 我们得到了一个结论: 切触插值条件组存在一组解满足切触条件的充分必要条件是曲面 $F(x, y, z)$ 上存在 $p(x, y, z)$ 为零多项式。为了继续说明本文定理, 引入理想等相关定义。

定义 3: (理想)

一个子集 $I \subset K[x_1, \dots, x_s]$, 如果其满足下述三个条件:

(1) $0 \in I$;

(2) 如果 $f, g \in I$, 则有 $f + g \in I$;

(3) 如果 $f \in I$ 且 $h \in K[x_1, \dots, x_n]$, 则有 $hf \in I$ 。那么 I 被称为是一个理想。

定义 4: [3] (生成理想)

令 f_1, \dots, f_s 为 n 元多项式环中的 s 个多项式, 则定义:

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i, h_1, \dots, h_s \in K[x_1, \dots, x_n] \right\} \quad (10)$$

显然有 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 是一个理想, 称 $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 是 f_1, \dots, f_s 的生成理想。

定义 5: [3] (理想根)

设 $I \subset K[x_1, \dots, x_s]$ 是一个理想, 用 \sqrt{I} 表示 I 的理想根, 它是集合: $\{f \text{ 对某些整数 } m \geq 1, f^m \in I\}$ 。

定义 6: [3] (关于 r 阶理想 I 的一个强 H -基)

设 f_1, \dots, f_s 为 $K[x_1, \dots, x_n]$ 中的 s 个多项式, $\deg(f_i) = l_i$, 且理想 $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 。若对于每个给定的多项式 $p \in I \cap \mathbb{P}_m^{(n)}$, 在 $K[x_1, \dots, x_n]$ 中恒存在多项式 p_1, \dots, p_s , 使得

$$p = \sum_{i=1}^s p_i f_i^{r+1}, \quad \deg(p_i) \leq n - (r+1)l_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (11)$$

称多项式集 $\{f_1, \dots, f_s\}$ 是关于 r 阶理想 I 的一个强 H -基。

再根据定义 3~6 引入如下命题:

命题 1:

设 I 为一个理想且令 V_1, V_2 为两个仿射簇, 则有 $V_1 \subset V_2$ 蕴含 $I(V_1) \supset I(V_2)$ 。

命题 2:

若 f 是一个 $K[x_1, \dots, x_n]$ 中的 s 元多项式, $I = \langle f \rangle$ 是由 f 生成的素理想, $f = f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n}$ 是 f 的不可约多项式的分解, 则有 I 的根理想为 $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ 。特别, 假若 f 是一个没有重复分量的代数多项式, 则有 I 的根理想与 I 相等。(注: 素理想是由一个元素生成的理想)

3. 研究成果

定理 1: (单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上的 n 次 r 阶切触插值正则条件组判定定理)

假设 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \eta; i=1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ 为上述定义的单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上的一个切触插值条件组, 则这个插值条件组 \mathcal{B} 是 n 次 r 阶的且能够做成在 $F(x, y, z)$ 上的切触插值正则条件组的充分必要条件是: 若 $P_n^{(3)}$ 中能找到一个多项式 $p(x, y, z)$, 满足下述齐次切触插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, \quad r=0, \dots, \eta; i=1, \dots, l_{n,r}(2) \tag{12}$$

则一定在 $P_{n-2(\eta+1)}^{(3)}$ 中存在多项式 $h(x, y, z)$, 使得

$$p(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right]^{\eta+1} \cdot h(x, y, z) \tag{13}$$

若 $n < 2(\eta+1)$, $h(x, y, z)$ 恒等于零。

定理 2: (构造 $P_n^{(3)}$ 上的切触插值正则条件组的添加单叶双曲面法)

设关于 $P_n^{(3)}$ 的一个切触插值正则条件组为 $\Theta = \{H_\tau(Q_i) \mid \tau \in \Lambda_i, i=0, 1, \dots, s\}$, 且 Θ 中任何点都不在单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上, 则对 $F(x, y, z)$ 上的一个 $n+2(\eta+1)$ 次 r 阶切触插值正则条件组 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid r=0, \dots, \eta; i=1, \dots, l_{n+2(\eta+1),r}(2)\}$, 则 $\mathcal{B} \cup \Theta$ 一定构成一个关于 $P_{n+2(\eta+1)}^{(3)}$ 的切触插值正则条件组。

由定理 1 的结果, 我们得到如下推论:

推论 1: (构造单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上切触插值正则条件组的添加平面法)

构造思想: 通过与 z 轴垂直的平面与单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 依次相交, 即把添加圆锥曲线法构造单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上切触插值正则条件组的问题转化为添加曲线交点法构造平面代数曲线上切触插值正则条件组的问题。

设二次代数曲面 $m(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - d^2 - 1 = 0$, d 为任意正的常数, 与另一条 $l(l > 2)$ 次代数曲线 $s(x, y) = 0$ 正好交于 $2l$ 个互不相同的点, 由此确定一个插值条件组, 将其记为

$\Lambda = \{Q_i^{(r)} \mid i=1, \dots, 2l; r=0, \dots, \eta\}$ (求导方向既有沿曲线 $m(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - d^2 - 1 = 0$ 的法方向又有沿曲线 $s(x, y) = 0$ 的法方向), 而 $\{m, s\}$ 正好做成关于理想 $\langle m, s \rangle$ 的强 H -基。若

$\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} \mid i=1, \dots, e_{n,r}(2); r=0, \dots, \eta\} \in I_{n,r}^{(2)}(s)$, 其中 $e_{n,r}(2) = 2(n-2r) - \binom{2-1}{2} + 1$, 且满足 $\mathcal{B} \cap \Lambda \neq \emptyset$, 则有 $\mathcal{B} \cup \Lambda \in I_{n+(\eta+1),r}^{(2)}(s)$ 。

4. 定理证明

定理 1 的证明:

由定义 2 的推广, 充分性得证, 以下只需证明定理的必要性。

设 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} | r=0, \dots, \eta; i=1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ 是定义在单叶双曲面 $F(x, y, z)$ 上的一个 n 次 r 阶切触插值正则条件组, 且在 $P_n^{(3)}$ 中存在多项式 $p(x, y, z)$ 满足

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = f_i^{(r)}, \quad r=0, \dots, \eta; i=1, \dots, l_{n,r}(2) \quad (14)$$

则若 $r=0$ 可得, 沿单叶双曲面 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 上恒有 $p(x, y, z) = 0$, 将 $\langle F \rangle$ 记为 I_1 , 将 $\langle p \rangle$ 记为 I_2 , 则有 $V(I_1) \subset V(I_2)$ 蕴含 $I(V(I_1)) \supset I(V(I_2))$, 而单叶双曲面是一个二次没有重复分量的代数曲面, 所以有

$$I(V(I_1)) = \sqrt{I_1} = I_1$$

又由

$$I(V(I_2)) = \sqrt{I_2} \supset I_2$$

故有 $I_2 \subset I_1$, 则根据理想的定义可知, 存在 $P_{n-2}^{(3)}$ 中的 $h(x, y, z)$, 使得:

$$p(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right] \cdot h(x, y, z) \quad (15)$$

假定结论对 $r=m$, $r \in \mathbb{Z}$ 且 $r > 0$ 成立, 即有 $\mathcal{B} = \{Q_i^{(r)} | r=0, \dots, \eta; i=1, \dots, l_{n,r}(2)\}$ 为定义在单叶双曲面上 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 的 n 次 m 阶切触插值正则条件组, 同时满足条件

$$\frac{\partial^m}{\partial n^m} p(Q_i^{(r)}) = 0, \quad \forall Q_i^{(m)} \in \mathcal{B} \quad (16)$$

有

$$p(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right]^{m+1} \cdot h(x, y, z) \quad (17)$$

则若 $r=m+1$ 时, 我们对公式(16)两端求法向导数直到 $m+1$ 阶, 并使用 Leibniz 公式, 有

$$r(Q_i^{(r)}) = 0, \quad \forall Q_i^{(r)} \in \mathcal{B} \quad (18)$$

因为 $h(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$ 同时经过唯一且确定的 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ 的所有条件点, 所以沿上总有 $h(x, y, z) \equiv 0$ 。由 $r=0$ 情况同理可得

$$h(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right] \cdot h'(x, y, z) \quad (19)$$

将公式(19)代入到公式(17)中得:

$$p(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right]^{m+2} \cdot h'(x, y, z) \quad (20)$$

由数学归纳法知, 结论成立。

定理 2 的证明:

只需证本定理所给出的齐次切触插值条件仅存在零多项式满足即得出结论成立。

可知所有的条件数是:

$$\begin{aligned} & \binom{n+3}{3} + \sum_{r=0}^{\eta} l_{n+2(\eta+1),r} (2) \\ &= \binom{n+3}{3} + \sum_{r=0}^{\eta} \left(2 \cdot \frac{1}{2} (n+2(\eta+1)-2r)(n+2(\eta+1)-2(r+1)+4) + \binom{2-1}{3} + 1 \right) \\ &= \binom{n+3}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} (\eta+1) (3 \cdot 2n(n+(\eta+1)) + 12n + 4(\eta+1)^2 - 6 \cdot 2(\eta+1) + 11) \\ &= \binom{n+3}{3} + \binom{n+2(\eta+1)+3}{3} - \binom{n+3}{3} \\ &= \binom{n+2(\eta+1)+3}{3} \end{aligned}$$

显然这与多项式空间 $P_{n+2(\eta+1)}^{(3)}$ 的维数相等。

假设 $P_{n+2(\eta+1)}^{(3)}$ 中存在满足齐次切触插值条件的多项式 $p(x, y, z)$, 即有:

$$H_{\tau} p(Q_i) = 0, \quad \forall Q_i \in \mathfrak{N} \tag{21}$$

$$\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \quad \forall Q_i^{(r)} \in \mathfrak{B} \tag{22}$$

因为 $\frac{\partial^r}{\partial n^r} p(Q_i^{(r)}) = 0, \quad \forall Q_i^{(r)} \in \mathfrak{B}$, 同时有 $\mathfrak{B} \in I_{n+2(\eta+1)l,r}^{(3)}(F)$, $p(x, y, z) \in P_{n+2(\eta+1)}^{(3)}$ 。

则据定理 1 可得, 在 $P_n^{(3)}$ 中存在多项式 $h(x, y, z)$, 使得

$$p(x, y, z) = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right]^{\eta+1} \cdot h'(x, y, z) \tag{22}$$

对公式(18)两端求导数直到 $s+1$ 阶, 得到

$$H_{\tau} p(Q_2) = H_{\tau} \left\{ \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \right]^{\eta+1} \cdot h'(x, y, z) \right\} (Q_i) = 0, \quad \forall Q_i \in \mathfrak{N} \tag{23}$$

因为对 $\forall Q_i \in \mathfrak{N}$ 在 $F(x, y, z)$ 上取值都不为零, 则根据 Leibniz 公式得任意 $Q_i \in \mathfrak{N}, H_{\tau} p(Q_i) = 0$ 。但 Θ 是关于 $P_n^{(3)}$ 的正则切触插值条件组, 则有 $h(x, y, z) \equiv 0$, 即 $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

5. 实验算例

设被插值函数为 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 单叶双曲面方程: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$, 取该曲面外一点

$Q_0^0(2, 2, 0)$, 在此椭圆抛物面上取点 $Q_1^0(1, 1, 0)$, 此时 Q_1^0 的一阶法向导数为 $Q_1^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, 由上述定理

1 得, 条件组 $\{Q_0^0, Q_1^0, Q_1^1\}$ 构成沿椭圆抛物面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的 1 次插值正则条件组, 如图 1 所示。设被插值函数在这些条件下的一次插值多项式为:

$$p(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z + a_4$$

$$\text{插值条件: } \begin{cases} p(Q_0^{(0)}) = f_0^{(0)} \\ p(Q_1^{(0)}) = f_1^{(0)} \\ \frac{\partial^1}{\partial n^1} p(Q_1^{(1)}) = f_1^{(1)}, n=1 \end{cases}$$

$$\text{代入条件得: } \begin{cases} 2a_1 + 2a_2 + a_4 = 2\sqrt{2} \\ a_1 + a_2 + a_4 = \sqrt{2} \\ a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解方程组得: } \begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

代入得到插值多项式 $p(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$ 。

经计算求得被插值函数和插值多项式在点 $(\frac{1}{8}, 0, 0)$ 处的值分别是:

$$f\left(\frac{1}{8}, 0, 0\right) = \frac{1}{8}, \quad p\left(\frac{1}{8}, 0, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{误差 } m = \left| \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{16} \right| \approx 0.0366。$$

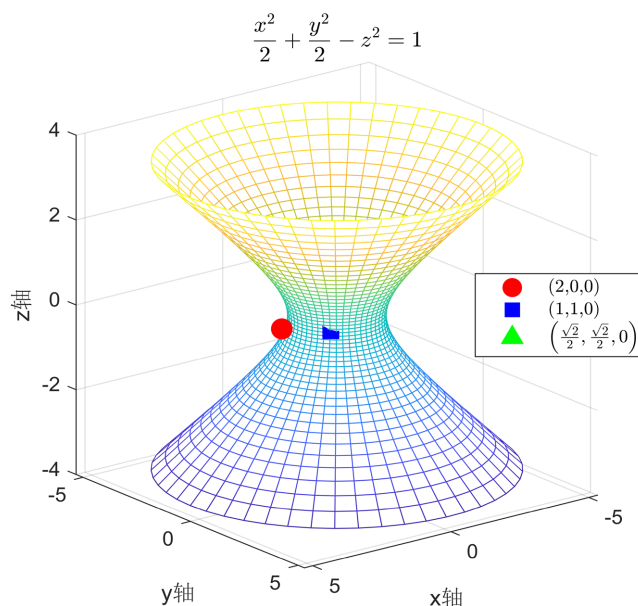


Figure 1. The point taking picture of hyperboloid of one sheet (including nodes)
图 1. 单叶双曲面取点图(含结点)

6. 结语

本研究首先引入了全次数多元切触插值问题的概念, 深入探讨了多元切触插值在单叶双曲面上的正则插值条件组及插值条件, 并且阐述了与定理相关的命题与理想的定义。然后得到了定义于单叶双曲面上的正则插值条件组的判定定理, 并给出了构造 $P_n^{(3)}$ 空间正则条件组的新方法。通过对定理的进一步研究, 提出了添加曲线法构造切触插值正则条件组。最后通过实验算例证明了理论的可行性和实用性。

参考文献

- [1] 王文跃, 崔利宏. 定义于锥面上的多元切触插值问题研究[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1652-1659.
- [2] 王亚琦, 董相好, 王文跃, 崔利宏. 定义于双叶双曲面上的多元函数切触插值问题[J]. 应用数学进展, 2022, 11(12): 8929-8935.
- [3] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2005.
- [4] 梁学章, 李强, 刘畅. 圆锥曲面上的 Lagrange 插值[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(9): 1573-1582.
- [5] 李兵, 徐文平, 王国华, 等. 800 m 级无塔单叶双曲面空间悬索网人行悬索桥设计[J]. 交通科技, 2022(3): 59-63.
- [6] 牟朝会. 关于球面切触插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2021.
- [7] 姜文芳. 定义于四面体上的切触插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2021.
- [8] 崔利宏, 张志辉, 李纬国. 关于二元 Hermite 插值问题的某些研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2012, 35(2): 145-149.